2. *Алешкин А. П., Гусаков В. М., Мысливцев Т. О.* Моделирование измерений навигационных параметров в коротковолновых радиолокационных системах пространственной волны // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55, № 9. С. 54—62.

3. *Алешкин А. П., Шпаков А. П.* Метод юстировки наземных радиолокационных систем по низкоорбитальным малым КА // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общетехническая. 2010. Вып. 2. С. 54—59.

4. *Агаджанов П. А., Барабанов Н. М., Буренин Н. И.* и др. Космические траекторные измерения / Под ред. *П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича, А. А. Коростелева*. М.: Сов. радио, 1969. 752 с.

5. *Губин В. А., Клюев Н. Ф.* и др. Основы радионавигационных измерений. М.: МО СССР, 1987. 373 с.

Сведения об авторах

Андрей Петрович Алешкин — д-р техн. наук, профессор; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург; E-mail: a_aleshkin@mail.ru

Тимофей Олегович Мысливцев — д-р техн. наук; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург; начальник кафедры; E-mail: a_aleshkin@mail.ru

Андрей Александрович Макаров — канд. техн. наук, доцент; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург; начальник кафедры; E-mail: a_aleshkin@mail.ru

Рекомендована
ВКА им. А. Ф. Можайского

Поступила в редакцию
11.03.14 г.

УДК 519.2

В. Н. Арсеньев, П. В. Лабецкий

ОЦЕНИВАНИЕ ОБЛАСТИ РАССЕИВАНИЯ КООРДИНАТ СПЕЦИАЛЬНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

Рассматривается задача оценивания радиуса сферы, ограничивающей область расположения специального космического аппарата относительно исследуемого космического объекта после завершения маневра сближения. Для повышения качества оценивания использован метод приоритета опытной информации, позволяющий при ограниченном числе натурных испытаний учитывать априорную информацию.

Ключевые слова: *космический мусор, специальный космический аппарат, ограниченное число натурных испытаний.*

Введение. В настоящее время в околоземном космическом пространстве скопилось большое количество космического мусора. Для проведения технического обслуживания (выяснения состояния, назначения, потенциальной опасности и т.д.) того или иного космического объекта используются специальные космические аппараты (СКА) [1]. Получить необходимую информацию об исследуемом объекте (ИО) можно, если расстояние от СКА до ИО не превышает некоторой величины. Это означает, что область, в пределах которой должен находиться СКА после завершения маневра сближения, ограничивается сферой с заданным радиусом.

Расстояние между СКА и ИО зависит от точности функционирования системы управления движением аппарата. Вероятностные характеристики (прежде всего, математическое ожидание и дисперсия) расстояния между аппаратом и объектом определяют область, в которой будет находиться СКА в конце траектории сближения. Эта область может выходить за пределы заданной сферы. Для определения ее фактических размеров проводятся натурные испытания опытных образцов СКА. В силу ряда причин число испытаний ограничено, а точность оценок на их основе низка. Повысить точность оценок можно, используя дополнительную априорную информацию, полученную на этапах исследования, предшествующих натурным испытаниям.

В настоящее время существуют методы, позволяющие производить совместную обработку априорной и опытной информации [2—8]. Большинство из них требует большого объема однородной информации об оцениваемых характеристиках. Поэтому при ограниченном числе натурных испытаний для повышения качества оценивания целесообразно использовать метод приоритета опытной информации (ПОИ) [9],согласно которому результаты априорных исследований не должны противоречить результатам натурных испытаний; вес априорной информации в апостериорной оценке не может превышать веса опытных данных.

Постановка задачи. Полагается, что по окончании сближения положение СКА относительно исследуемого объекта в трехмерном пространстве характеризуется вектором отклонений фазовых координат центра масс аппарата от соответствующих координат ИО. Распределение вектора отклонений является сферическим — трехмерным нормальным с нулевым математическим ожиданием и одинаковыми дисперсиями компонентов.

Известно [10], что в этом случае расстояние $\hat{X}$ („$\wedge$“ означает случайную физическую величину) от СКА до ИО (модуль вектора отклонений) распределено по закону Максвелла, функция плотности распределения которого имеет вид

$$\varphi_{\hat{X}}(X;\mu)=\left(2/\pi\mu^3\right)^{1/2}X^2\exp\left\{-X^2/2\mu\right\}, \tag{1}$$

где μ — параметр распределения.

Величина $\sigma=\sqrt{\mu}$ называется радиальным среднеквадратическим отклонением исходного трехмерного нормального распределения.

Математическое ожидание $M_{\hat{X}}$ и дисперсия $D_{\hat{X}}$ модуля $\hat{X}$ вектора отклонений, определяющие область расположения СКА относительно ИО по окончании маневра сближения, связаны с параметром μ выражениями [10]:

$$M_{\hat{X}}=2\sqrt{2\mu/\pi}\,;\ D_{\hat{X}}=(3\pi-8)\mu/\pi \tag{2}$$

или

$$\mu=\pi M_{\hat{X}}^2\Big/8=\pi D_{\hat{X}}\Big/(3\pi-8)=\left(M_{\hat{X}}^2+D_{\hat{X}}\right)\Big/3. \tag{3}$$

В одних и тех же условиях проведены натурные испытания $N_{\text{о}}$ опытных образцов СКА, в результате которых получены значения $X_i\left(i=\overline{1,N_{\text{о}}}\right)$ модуля вектора отклонений координат СКА от соответствующих координат ИО в конечной точке траектории сближения. В ходе предварительных исследований расчетным путем получена априорная оценка $M_{\text{р}}$ математического ожидания $M_{\hat{X}}$ величины $\hat{X}$.

Необходимо по имеющимся априорным и опытным данным получить апостериорные оценки параметров μ, $M_{\hat{X}}$ и $D_{\hat{X}}$ расстояния между СКА и ИО после окончания маневра сближения.

Получение апостериорной оценки параметра μ. В соответствии с методом приоритета опытной информации [9] сначала определяется оценка максимального правдоподобия $\mu_о$ параметра μ распределения (1).

Для этого по выборке X_i $\left(i=\overline{1,N_о}\right)$ составляется функция правдоподобия

$$\prod_{i=1}^{N_о} \varphi_{\hat{X}}\left(X_i;\mu\right)=\left(\frac{2}{\pi\mu^3}\right)^{N_о/2} \prod_{i=1}^{N_о} X_i^2 \exp\left\{-\frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{N_o} X_i^2\right\}. \quad (4)$$

Поскольку функция плотности распределения (1) удовлетворяет условиям регулярности, оценка максимального правдоподобия является решением уравнения правдоподобия $\partial \ln \prod_{i=1}^{N_о} \varphi_{\hat{X}}\left(X_i;\mu\right) \Big/ \partial\mu \Big|_{\mu=\mu_о}=0$ или $-\frac{3N_о}{2\mu_о}+\frac{1}{2\mu_о^2}\sum_{i=1}^{N_о} X_i^2=0$,

отсюда

$$\mu_о=\sum_{i=1}^{N_о} X_i^2 \Big/ 3N_о = G_о/3, \quad (5)$$

где $G_о=\sum_{i=1}^{N_о} X_i^2 \Big/ N_о$ — опытная оценка второго начального момента расстояния $\hat{X}$.

Максимальное правдоподобие математического ожидания и дисперсии случайной величины $\hat{X}$ оценивается путем подстановки (5) в (2):

$$M_о=2\sqrt{2\mu_о/\pi};\ D_о=\left(3\pi-8\right)\mu_о/\pi. \quad (6)$$

С учетом (5) функцию правдоподобия (4) можно представить в виде

$$\prod_{i=1}^{N_о} \varphi_{\hat{X}}\left(X_i;\mu\right)=\left(2/\pi\mu^3\right)^{N_о/2} \prod_{i=1}^{N_о} X_i^2 \exp\left\{-3N_о\mu_о/2\mu\right\}. \quad (7)$$

Тогда отношение правдоподобия [9] для проверки гипотезы об однородности опытной и априорной информации $H:\mu=\mu_р$

$$\nu^*=\prod_{i=1}^{N_о} \varphi_{\hat{X}}\left(X_i;\mu_р\right) \Big/ \prod_{i=1}^{N_о} \varphi_{\hat{X}}\left(X_i;\mu_о\right)=\left(\mu_о/\mu_р\right)^{3N_о/2} \exp\left\{-3N_о\left(\mu_о/\mu_р-1\right)\Big/2\right\}, \quad (8)$$

где, согласно (3), $\mu_р=\pi M_р^2 \big/ 8$ — априорная оценка параметра μ.

Число гипотетических испытаний, определяющее вес априорной информации в апостериорных оценках, $N_р=\nu^* N_о$.

Рассматривается гипотетическая выборка $X_{гi}$ $\left(i=\overline{1,N_р}\right)$ [9]. Для нее формируются априорная функция правдоподобия

$$\prod_{i=1}^{N_р} \varphi_{\hat{X}}\left(X_{гi};\mu\right)=\left(2/\pi\mu^3\right)^{N_р/2} \prod_{i=1}^{N_р} X_{гi}^2 \exp\left\{-3N_р\mu_р/2\mu\right\}$$

и общая функция правдоподобия

$$L=\prod_{i=1}^{N_\text{о}}\varphi_{\hat{X}}\left(X_i;\mu\right)\prod_{i=1}^{N_\text{р}}\varphi_{\hat{X}}\left(\text{X}_{\text{г}i};\mu\right)=\left(\frac{2}{\pi\mu^3}\right)^{\left(N_\text{о}+N_\text{р}\right)/2}\prod_{i=1}^{N_\text{о}}X_i^2\prod_{i=1}^{N_\text{р}}X_{\text{г}i}^2\exp\left\{-\frac{3N_\text{о}\mu_\text{о}}{2\mu}-\frac{3N_\text{р}\mu_\text{р}}{2\mu}\right\}.$$

Апостериорная оценка $\mu_\text{а}$ параметра μ, учитывающая априорную информацию и результаты натурных испытаний, определяется из необходимого условия $\partial L/\partial\mu\Big|_{\mu=\mu_\text{а}}=0$ максимума функции L:

$$\mu_\text{а}=\left(N_\text{о}\mu_\text{о}+N_\text{р}\mu_\text{р}\right)\Big/\left(N_\text{с}+N_\text{р}\right)=\left(\mu_\text{о}+\nu^*\mu_\text{р}\right)\Big/\left(1+\nu^*\right). \tag{9}$$

На ее основе получаются апостериорные оценки математического ожидания и дисперсии расстояния между СКА и ИО в конечной точке траектории сближения:

$$M_\text{а}=2\sqrt{2\mu_\text{а}/\pi}\,;\;D_\text{а}=\left(3\pi-8\right)\mu_\text{а}/\pi, \tag{10}$$

а также вероятностные моменты более высокого порядка.

Для определения выигрыша в точности, получаемого благодаря учету априорной информации, необходимо сравнить дисперсии опытной $\mu_\text{о}$ и апостериорной $\mu_\text{а}$ оценок.

Дисперсия оценки максимального правдоподобия (5):

$$D\left[\mu_\text{о}\right]=\frac{1}{9N_\text{о}^2}\sum_{i=1}^{N_\text{о}}D\left[X_i^2\right]=\frac{D[\hat{X}^2]}{9N_\text{о}}=\frac{M[(\hat{X}^2-M[\hat{X}^2])^2]}{9N_\text{о}}=\frac{M[\hat{X}^4]-(M[\hat{X}^2])^2}{9N_\text{о}}.$$

Поскольку, согласно (3), $M[\hat{X}^2]=M_{\hat{X}}^2+D_{\hat{X}}=3\mu$, а $M[\hat{X}^4]=\int_0^\infty X^4\varphi_{\hat{X}}(X;\mu)dX=15\mu^2$,

то $D\left[\mu_\text{о}\right]=\left(15\mu^2-9\mu^2\right)\Big/9N_\text{о}=2\mu^2/3N_\text{о}\approx2\mu_\text{о}^2/3N_\text{о}$.

Дисперсия апостериорной оценки (9) будет следующей:

$$D\left[\mu_\text{а}\right]=\left(N_\text{о}^2D\left[\mu_\text{о}\right]+N_\text{р}^2D\left[\mu_\text{р}\right]\right)\Big/\left(N_\text{о}+N_\text{р}\right)^2\approx2\left(N_\text{о}\mu_\text{о}^2+N_\text{р}\mu_\text{р}^2\right)\Big/3\left(N_\text{о}+N_\text{р}\right)^2.$$

Выигрыш в точности оценивания, получаемый за счет использования априорной информации, определяется по формуле

$$\delta=\frac{D\left[\mu_\text{о}\right]}{D\left[\mu_\text{а}\right]}\approx\frac{\mu_\text{о}^2\left(N_\text{о}+N_\text{р}\right)^2}{N_\text{о}\left(N_\text{о}\mu_\text{о}^2+N_\text{р}\mu_\text{р}^2\right)}=\frac{\mu_\text{о}^2\left(1+\nu^*\right)^2}{\mu_\text{о}^2+\nu^*\mu_\text{р}^2}. \tag{11}$$

Очевидно, что $\delta>1$, если дисперсия апостериорной оценки меньше дисперсии оценки, полученной только по результатам натурных испытаний. Из (11) видно, что это условие будет выполняться при

$$\nu^*>\mu_\text{р}^2/\mu_\text{о}^2-2. \tag{12}$$

Правая часть неравенства (12) определяет критическое значение отношения правдоподобия $\nu_\text{кр}=\mu_\text{р}^2/\mu_\text{о}^2-2$.

Если величина отношения правдоподобия, вычисленная по формуле (8), удовлетворяет неравенству $\nu^*>\nu_\text{кр}$, то апостериорные оценки (9), (10) точнее соответствующих опытных оценок (5), (6), причем выигрыш в точности тем больше, чем больше ν^*. Максимальный выигрыш в точности $\delta=2$ достигается при $\nu^*=1$, что, как видно из (8), соответствует полному совпадению априорных и опытных данных. Если априорная и опытная информация однородна, т.е. справедлива гипотеза $H:\mu_\text{о}=\mu_\text{р}$, то выигрыш в точности оценивания может быть получен по приближенной формуле $\delta \approx 1+\nu^*$. Следует также отметить, что даже при выполнении условия (12) выигрыш в точности может оказаться небольшим, если значение ν^* мало (например, при $\mu_\text{р} << \mu_\text{о}$). В таких случаях априорная оценка является достаточно грубой.

Пример. Рассматривается задача выведения СКА в заданную область космического пространства, ограниченную сферой с радиусом $R_d = 10$ км. В центре сферы находится исследуемый объект. Относительное положение в трехмерной системе координат характеризуется вектором, компонентами которого являются разности соответствующих координат ИО и СКА в конечной точке траектории сближения. Полагается, что элементы вектора отклонений являются независимыми и распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией. Необходимо определить вероятность того, что расстояние от космического аппарата до исследуемого объекта не превысит R_d.

По результатам моделирования возмущенного движения СКА получена априорная оценка $M_\text{р} = 5{,}3$ км математического ожидания модуля вектора отклонений, на основе которой рассчитано значение $\mu_\text{р} = \pi M_\text{р}^2 \big/ 8 = 11{,}0$ км^2 параметра распределения (1).

Проведены натурные испытания шести СКА ($N_\text{о} = 6$), результаты которых представлены значениями модуля $\hat{X}$ вектора отклонений: $X_1 = 6{,}4$; $X_2 = 0{,}63$; $X_3 = 8{,}31$; $X_4 = 8{,}38$; $X_5 = 5{,}74$; $X_6 = 10{,}50$ км. По этим данным получена оценка максимального правдоподобия $\mu_\text{о} = 18{,}0$ км^2 параметра μ. Область, в пределах которой будет находиться СКА после окончания маневра сближения, характеризуется оценками максимального правдоподобия математического ожидания и дисперсии модуля вектора отклонений: $M_\text{о} = 6{,}8$ км и $D_\text{о} = 8{,}2$ км^2.

Отношение правдоподобия для проверки гипотезы $H: \mu_\text{о} = \mu_\text{р}$ определяется по формуле (8): $\nu^* = 0{,}2791$. Соответствующее число гипотетических испытаний $N_\text{р} = 1{,}6748$.

Апостериорная оценка параметра μ получается по формуле (9): $\mu_\text{а} = 16{,}5$ км^2. Из (11) следует, что дисперсия этой оценки примерно в 1,48 раза меньше дисперсии оценки $\mu_\text{о}$, полученной по результатам натурных испытаний без учета априорной информации. Апостериорные оценки $M_{\hat{X}}$ и $D_{\hat{X}}$, характеризующие область расположения СКА относительно ИО, $M_\text{а} = 6{,}5$ км, $D_\text{а} = 7{,}5$ км^2.

Вероятность того, что расстояние от космического аппарата до исследуемого объекта не превысит 10 км, можно рассчитать по формуле

$$P = \int_0^{R_d} \varphi_{\hat{X}}(X;\mu)dX = \left(\frac{2}{\pi\mu^3}\right)^{1/2} \int_0^{R_d} X^2 \exp\left\{-\frac{X^2}{2\mu}\right\} dX = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{R_d/2\mu} y^{1/2} \exp\{-y\}\, dy,$$

подстановка в нее вместо параметра μ апостериорной оценки дает оценку вероятности, учитывающую всю имеющуюся априорную и опытную информацию: $P_\text{а} = 0{,}89$. Оценки вероятности P, полученные только по априорной информации или только по результатам натурных испытаний, равны 0,97 и 0,86 соответственно. Отсюда видно, что априорная оценка вероятности является существенно завышенной.

Заключение. При ограниченном числе натурных испытаний использование дополнительной информации позволяет повысить точность оценивания области расположения СКА относительно исследуемого объекта. Точность апостериорных оценок, по сравнению с опытными оценками, тем выше, чем ближе априорные данные к опытным. Мерой, определяющей вес априорной информации в апостериорной оценке, является отношение правдоподобия для проверки гипотезы об однородности априорных и опытных данных. Максимальный выигрыш в точности оценивания достигается при $\nu^* = 1$. Малые значения отношения правдоподобия говорят о грубости моделей, используемых на предварительных этапах исследования системы управления движением СКА. В этих случаях априорная информация слабо влияет на качество оценивания, а апостериорные оценки практически совпадают с опытными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заворуев Г. В.* Выбор закона управления для синтеза метода наведения на космические объекты при проведении их инспекции // Наука и образование. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011 [Электронный ресурс]: <http://www.mai.ru/science/trudy>.
2. *Пугачев В. Н.* Комбинированные методы определения вероятностных характеристик. М.: Сов. радио, 1973. 256 с.
3. *Шаракшанэ А. С., Железнов И. Г.* Испытания сложных систем. М.: Высшая школа, 1974. 184 с.
4. Элементы теории испытаний и контроля технических систем / Под ред. *Р. М. Юсупова*. Л.: Энергия, 1978. 192 с.
5. *Кринецкий Е. И.* и др. Летные испытания ракет и космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. 464 с.
6. *Щербаков П. С.* Использование априорной информации для уточнения оценок параметров // Изв. АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1988. № 5. С. 80—89.
7. *Моррис У.* Наука об управлении. Байесовский подход. М.: Мир, 1971. 304 с.
8. *Арсеньев В. Н.* Метод апостериорного оценивания показателей качества системы при ограниченном объеме информации // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 1991. № 11. С. 16—22.
9. *Арсеньев В. Н.* Оценивание характеристик систем управления по ограниченному числу натурных испытаний. М.: Рестарт, 2013. 126 с.
10. *Абезгауз Г. Г.* и др. Справочник по вероятностным расчетам. М.: Воениздат, 1970. 536 с.

Сведения об авторах

Владимир Николаевич Арсеньев — д-р техн. наук, профессор; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра бортовых информационных и измерительных комплексов, Санкт-Петербург; E-mail: vladar56@mail.ru

Павел Владимирович Лабецкий — аспирант; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург; E-mail: p.v.labetskiy@gmail.com

Рекомендована кафедрой
бортовых информационных
и измерительных комплексов

Поступила в редакцию
30.12.13 г.