УДК 681.518.5:004.052.32
DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-5-333-343

КЛАССИФИКАЦИЯ ОШИБОК В ИНФОРМАЦИОННЫХ ВЕКТОРАХ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ КОДОВ

В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников, Д. В. Ефанов

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I,
190031, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: TrES-4b@yandex.ru

Предложена классификация ошибок в информационных векторах систематических кодов, позволяющая учитывать все возможные варианты искажений информационных разрядов и изучать возможности различных систематических кодов по обнаружению ошибок, что может быть использовано при построении надежных систем автоматики и вычислительной техники.

Ключевые слова: *техническая диагностика, систематический код, информационный вектор, ошибки в информационных векторах, классификация ошибок, код Бергера, система функционального контроля.*

Введение. В задачах построения надежных логических устройств автоматики и вычислительной техники используются разнообразные систематические коды, каждый из которых характеризуется своим показателем избыточности и способностью к обнаружению ошибок [1, 2]. Выбранный на этапе проектирования логического устройства вариант кодирования определяет способ обеспечения контролепригодности устройства. Например, большое значение имеет выбор варианта кодирования при организации систем функционального контроля логических устройств [3, 4]. Известны алгоритмы, обеспечивающие с учетом свойств кодов построение систем функционального контроля со 100%-ным обнаружением любых одиночных неисправностей в контролируемом устройстве [5, 6].

В настоящей статье рассматривается задача определения всех возможных видов ошибок в информационных векторах систематических кодов, или (m,k)-кодов, где m — длина информационного вектора, а k — длина контрольного вектора. Предложена классификация ошибок в информационных векторах и приведены формулы подсчета ошибок различных типов.

Классификация ошибок в информационных векторах (m,k)-кодов. Рассмотрим возможные типы ошибок в информационных векторах кодовых слов длиной m.

Обозначим через d кратность ошибки в информационном векторе (m,k)-кода. Ошибка — это искажение некоторого количества нулевых и (или) единичных разрядов в кодовом векторе. Если e_1 — число искажений типа $0\rightarrow1$, а e_0 — число искажений типа $1\rightarrow0$, то кратность ошибки может быть представлена в виде суммы $d=e_0+e_1$.

Число ошибок кратностью d в информационном векторе длиной m вычисляется по формуле

$$N_{m,d} = 2^m C_m^d, \tag{1}$$

где сомножитель 2^m определяет общее количество различных информационных векторов; величина C_m^d — число вариантов ошибок кратностью d.

В информационных векторах длиной m существуют различные виды ошибок в зависимости от соотношений между количеством искажений нулевых и единичных разрядов (значениями e_0 и e_1) (рис. 1). Если при возникновении ошибки в информационном векторе искажаются только нулевые или только единичные разряды (когда $e_1=0$ при $e_0\neq0$ или $e_0=0$ при $e_1\neq0$), то возникает *монотонная, или однонаправленная, ошибка*. В противном случае, при $e_1\neq0$ и $e_0\neq0$, возникает *немонотонная, или разнонаправленная, ошибка*. Выделим среди немонотонных ошибок вариант, когда $e_0=e_1$. В этом случае число единичных разрядов в информационном векторе не изменяется (т.е. не изменяется вес двоичного вектора). Такие ошибки назовем *симметричными*. При возникновения немонотонной ошибки, когда $e_0\neq e_1$, вес информационного вектора изменяется. Такие ошибки отнесем к *асимметричным*.

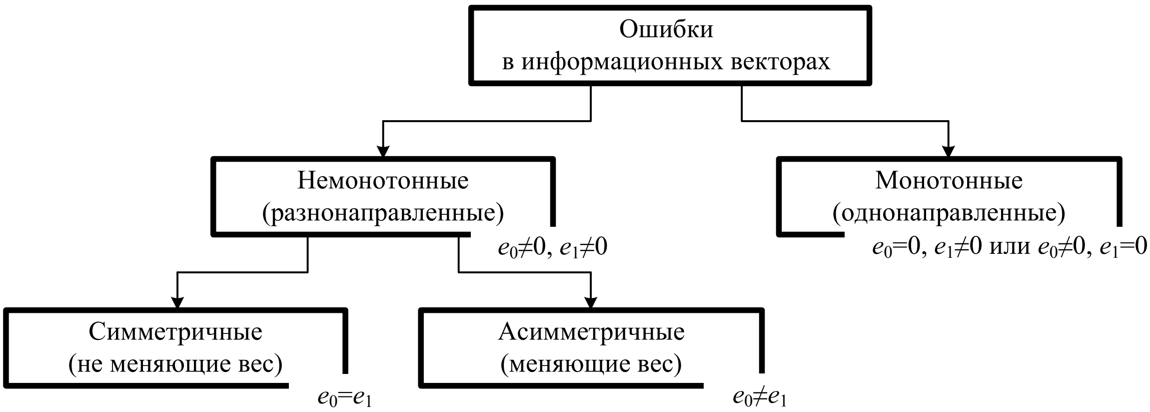

Рис. 1

Таким образом, в любом (m,k)-коде среди $2^m C_m^d$ возможных ошибок кратностью d в информационных векторах некоторая часть является ошибками симметричными (symmetric) — s-типа, некоторая часть — асимметричными (asymmetric) — a-типа, некоторая часть — монотонными (unidirectional) — u-типа:

$$N_{m,d} = N_{m,d}^s + N_{m,d}^a + N_{m,d}^u. \quad (2)$$

В классе монотонных ошибок целесообразно выделить однократные ошибки (когда $d=1$), обнаружение которых должно осуществляться любыми (m,k)-кодами. Если код не удовлетворяет этому условию, то он будет неэффективен при использовании для повышения надежности систем автоматики и вычислительной техники.

Очевидно, что симметричная ошибка ($e_0=e_1\neq0$) может иметь только четную кратность $d\in\{2;4;...;m\}$ при четном значении m и $d\in\{2;4;...;m-1\}$ — при нечетном значении m. При асимметричной ошибке, когда $e_0\neq e_1\neq0$, значение d лежит в пределах $3\leq d\leq m$. Монотонные же ошибки могут иметь любую кратность: $d\in\{1;2;...;m\}$.

Использование возможностей (m,k)-кодов по обнаружению ошибок в информационных векторах позволяет обеспечить построение различных по степени сложности, тестируемости, быстродействию, энергопотреблению и другим характеристикам систем функционального контроля логических устройств. Например, классический код с суммированием (код Бергера [7]) обладает способностью обнаружения любых ошибок, нарушающих вес информационного вектора, т.е. всех асимметричных и монотонных ошибок. Такое свойство кода Бергера позволяет использовать его для контроля комбинационных схем, в которых любая одиночная неисправность логических элементов их внутренней структуры может приводить только к монотонным искажениям на выходах схемы (такие логические схемы принято называть схемами с монотонно независимыми выходами [6]). Известно, что любую произвольную комбинационную схему можно преобразовать в схему с монотонно независимыми выходами [3, 5, 6].

Код Бергера не обнаруживает все симметричные ошибки кратностью d, где d — четное. Их число при заданном значении m определяется по формуле [8]

$$N_{m,d}^{s} = 2^{m-d} C_d^{d/2} C_m^d. \quad (3)$$

Общее же количество возможных симметричных ошибок вычисляется по формуле

$$N_m^s = \sum_{d=2}^{l} N_{m,d}^s = \sum_{d=2}^{l} 2^{m-d} C_d^{d/2} C_m^d, \quad (4)$$

где $l=m$ при четном значении m и $l=m-1$ при нечетном m.

Такими же возможностями по обнаружению ошибок, как и код Бергера, обладают, например, неразделимые равновесные коды (только в приложении ко всему кодовому слову) [3]. Другие типы кодов могут не обнаруживать часть монотонных и асимметричных ошибок в информационных векторах.

Определим, сколько монотонных ошибок кратностью $d \in \{1; 2; ...; m\}$ может возникнуть в информационных векторах длиной m. Для этого (m,k)-код представим в табличной форме, где множество информационных векторов разобьем на контрольные группы, соответствующие контрольным векторам.

Рассмотрим процесс подсчета числа монотонных ошибок на примере кода со значением m=4. В табл. 1 для $(4,k)$-кода представлен результат подсчета возможных монотонных ошибок отдельно для величин e_1 и e_0 при различных значениях d. Число монотонных ошибок кратностью d=1 при искажениях нулевых разрядов равно $C_4^0 C_4^1 + C_4^1 C_3^1 + C_4^2 C_2^1 + C_4^3 C_1^1$, а при искажениях единичных разрядов — $C_4^1 C_1^1 + C_4^2 C_2^1 + C_4^3 C_3^1 + C_4^4 C_4^1$; при d=2 для искажений нулевых и единичных разрядов соответственно имеем $C_4^0 C_4^2 + C_4^1 C_3^2 + C_4^2 C_2^2$ и $C_4^2 C_2^2 + C_4^3 C_3^2 + C_4^4 C_4^2$; при d=3 — $C_4^0 C_4^3 + C_4^1 C_3^3$ и $C_4^3 C_3^3 + C_4^4 C_4^3$; при d=4 – $C_4^0 C_4^4$ и $C_4^4 C_4^4$.

Обобщим расчет для произвольного (m,k)-кода. При кратности d=1 число вариантов искажений нулевых разрядов равно $\sum_{r=0}^{m-1} C_m^r C_{m-r}^1$, а единичных разрядов — $\sum_{r=1}^{m} C_m^r C_r^1$; при d=2 число вариантов искажений нулевых разрядов равно $\sum_{r=0}^{m-2} C_m^r C_{m-r}^2$, а единичных разрядов — $\sum_{r=2}^{m} C_m^r C_r^2$; и т.д. При произвольном значении $d \in \{1; 2; ...; m\}$ имеем следующую зависимость: число вариантов искажений нулевых разрядов равно $\sum_{r=0}^{m-d} C_m^r C_{m-r}^d$, а единичных разрядов — $\sum_{r=d}^{m} C_m^r C_r^d$. Общее число монотонных ошибок кратностью d в (m,k)-коде равно сумме полученных величин:

$$N_{m,d}^u = \sum_{r=0}^{m-d} C_m^r C_{m-r}^d + \sum_{r=d}^{m} C_m^r C_r^d. \quad (5)$$

Таблица 1

Контрольные группы по весу *r* информационных векторов				
0	1	2	3	4
0000	0001	0011	0111	1111
	0010	0101	1011	
	0100	0110	1101	
	1000	1001	1110	
		1010		
		1100		
Число информационных векторов в группе				
C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4
e_1, d=1 для каждого вектора				
C_4^1	C_3^1	C_2^1	C_1^1	0
e_1, d=2 для каждого вектора				
C_4^2	C_3^2	C_2^2	0	0
e_1, d=3 для каждого вектора				
C_4^3	C_3^3	0	0	0
e_1, d=4 для каждого вектора				
C_4^4	0	0	0	0
e_0, d=1 для каждого вектора				
0	C_1^1	C_2^1	C_3^1	C_4^1
Число e_0, d=2 для каждого вектора				
0	0	C_2^2	C_3^2	C_4^2
e_0, d=3 для каждого вектора				
0	0	0	C_3^3	C_4^3
e_0, d=4 для каждого вектора				
0	0	0	0	C_4^4
Общее число монотонных ошибок в информационных векторах				
130				

Можно показать, что слагаемые в выражении (5) равны между собой:

$$\sum_{r=0}^{m-d} C_m^r C_{m-r}^d = \sum_{r=d}^{m} C_m^r C_r^d . \qquad (6)$$

Тогда выражение (6) позволяет упростить подсчет числа монотонных ошибок в информационных векторах длиной m:

$$N_{m,d}^u = 2\sum_{r=0}^{m-d} C_m^r C_{m-r}^d = 2\sum_{r=d}^{m} C_m^r C_r^d . \qquad (7)$$

Рассмотрим более подробно формулу

$$N_{m,d}^u = 2\sum_{r=d}^{m} C_m^r C_r^d = 2\left(C_m^d C_d^d + C_m^{d+1} C_{d+1}^d + \ldots + C_m^{m-1} C_{m-1}^d + C_m^m C_m^d \right) \qquad (8)$$

и преобразуем выражение в скобках к следующему виду:

$$C_m^d C_d^d + C_m^{d+1} C_{d+1}^d + C_m^{d+2} C_{d+2}^d + \ldots + C_m^{m-2} C_{m-2}^d + C_m^{m-1} C_{m-1}^d + C_m^m C_m^d =$$

$$= \frac{m!}{d!(m-d)!} \frac{d!}{d! \cdot 0!} + \frac{m!}{(d+1)!(m-d-1)!} \frac{(d+1)!}{d! \cdot 1!} + \frac{m!}{(d+2)!(m-d-2)!} \frac{(d+2)!}{d! \cdot 2!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m!}{(m-2)!(m-m+2)!} \frac{(m-2)!}{(m-2-d)!d!} + \frac{m!}{(m-1)!(m-m+1)!} \frac{(m-1)!}{(m-1-d)!d!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m!}{m! \cdot 0!} \frac{m!}{(m-d)!d!} = \frac{m!}{d!(m-d)!} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{0!} + \frac{(m-d)}{1!} + \frac{(m-d)(m-d-1)}{2!} + \ldots + \frac{(m-d)(m-d-1)}{2!} + \frac{(m-d)}{1!} + \frac{1}{0!} \right). \qquad (9)$$

Выражение в скобках в последней строке формулы (9) является биномиальным разложением величины 2^{m-d}. Таким образом, формула подсчета числа монотонных ошибок кратностью d в информационных векторах (m,k)-кода принимает вид

$$N_{m,d}^u = 2 \sum_{r=d}^{m} C_m^r C_r^d = 2\left(C_m^d C_d^d + C_m^{d+1} C_{d+1}^d + \ldots + C_m^{m-1} C_{m-1}^d + C_m^m C_m^d \right) =$$

$$= 2 \cdot 2^{m-d} C_m^d = 2^{m+1-d} C_m^d. \qquad (10)$$

Общее же число монотонных ошибок равно

$$N_m^u = \sum_{d=1}^{m} N_{m,d}^u = \sum_{d=1}^{m} 2^{m+1-d} C_m^d = 2^{m+1} \sum_{d=1}^{m} 2^{-d} C_m^d, \qquad (11)$$

откуда следует, например, что для любого (m,k)-кода общее количество однократных ошибок в информационных векторах (d=1) равно

$$N_{m,1} = 2^m C_m^1 = 2^m \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = m \cdot 2^m. \qquad (12)$$

Учитывая выражения (1)—(3) и (10), нетрудно найти число асимметричных ошибок в информационных векторах (m,k)-кодов. При четных и нечетных значениях d данная величина будет вычисляться по-разному (вследствие того, что при четных значениях d существуют симметричные ошибки, а при нечетных — нет):

— при нечетных значениях d

$$N_{m,d}^a = 2^m C_m^d - 2^{m+1-d} C_m^d = 2^m C_m^d \left(1 - 2^{1-d}\right), \qquad (13)$$

— при четных значениях d

$$N_{m,d}^a = 2^m C_m^d - 2^{m+1-d} C_m^d - 2^{m-d} C_d^{d/2} C_m^d = 2^m C_m^d \left(1 - \left(2^{1-d} + 2^{-d} C_d^{d/2}\right)\right). \qquad (14)$$

Число немонотонных ошибок равно

$$N_{m,d}^{nu} = N_{m,d} - N_{m,d}^u = 2^m C_m^d - 2^{m+1-d} C_m^d = 2^m C_m^d \left(1 - 2^{1-d}\right). \qquad (15)$$

Классификация ошибок в информационных векторах (m,k)-кодов с указанием формул расчета их количества по каждому типу и кратности d приведена на рис. 2.

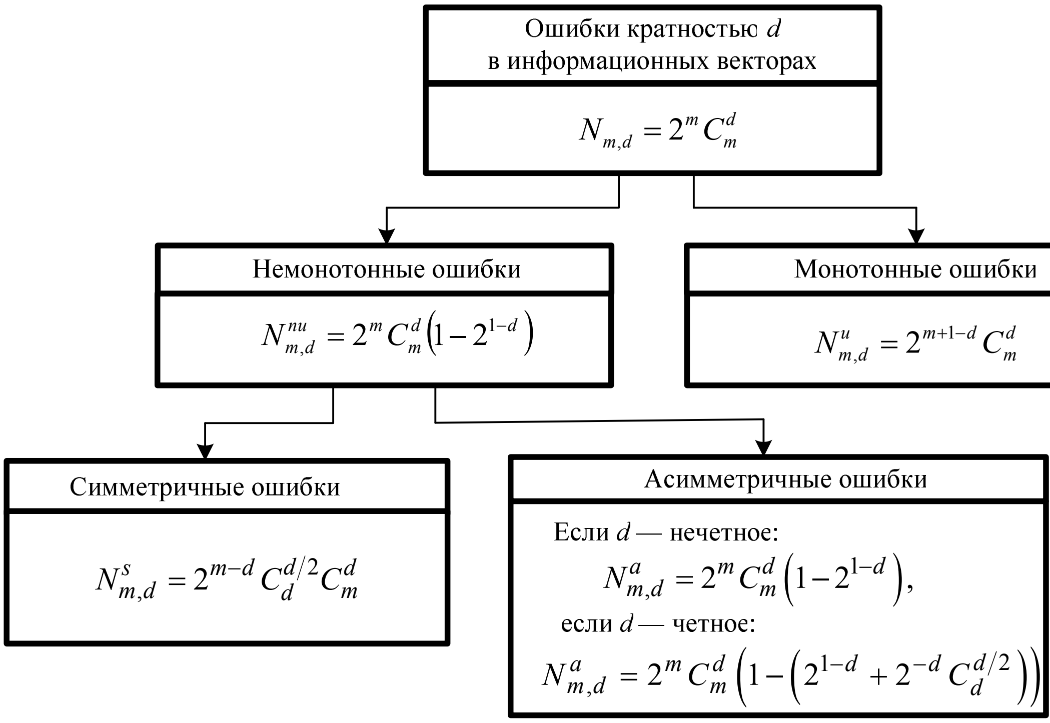

Рис. 2

Свойства (*m*,*k*)-кодов. Полученные выше формулы расчета числа ошибок в информационных векторах (m,k)-кодов позволяют установить ряд особенностей каждого из существующих типов ошибок.

На основе анализа соотношения величин (1) и (10) приходим к следующему положению.

Теорема 1. Доли монотонных (υ_d) и немонотонных (η_d) ошибок кратностью d в информационных векторах (m,k)-кодов от общего количества ошибок данной кратностью являются постоянными величинами при любых значениях m:

$$\upsilon_d = \frac{N_{m,d}^u}{N_{m,d}} = \frac{2^{m+1-d} C_m^d}{2^m C_m^d} = 2^{1-d}, \tag{16}$$

$$\eta_d = \frac{N_{m,d}^{nu}}{N_{m,d}} = \frac{2^m C_m^d \left(1 - 2^{1-d}\right)}{2^m C_m^d} = 1 - 2^{1-d}. \tag{17}$$

С увеличением кратности значение υ_d уменьшается и, например, при d=10 составляет 0,00195 (т.е. 1,95 % от общего числа ошибок), значение же η_d, наоборот, увеличивается и составляет 0,99805 при d=10 (99,805 %).

Таким образом, при большом значении d число монотонных ошибок невелико по сравнению с числом немонотонных ошибок.

Немонотонные ошибки классифицируются на симметричные и асимметричные. Используя выражения (1) и (3), установим следующую закономерность.

Теорема 2. Доля симметричных ошибок (σ_d) кратностью d, где d — четное, в информационных векторах (m,k)-кодов от общего количества ошибок данной кратностью является постоянной величиной при любом значении m:

$$\sigma_d = \frac{N_{m,d}^s}{N_{m,d}} = \frac{2^{m-d} C_d^{d/2} C_m^d}{2^m C_m^d} = 2^{-d} C_d^{d/2}. \tag{18}$$

Из выражения (18) следует свойство 1 [8].

Свойство 1. С увеличением значения d величина σ_d уменьшается и при $d \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{d\to\infty} \sigma_d = \lim_{d\to\infty} 2^{-d} C_d^{d/2} = 0. \quad (19)$$

Значение σ_d уменьшается не столь быстро, как величина υ_d; для сравнения: σ_{10}=0,24609 (24,609 %), тогда как υ_{10}=0,00195 (1,95 %).

Используя выражения (1), (13) и (14), запишем следующее положение.

Теорема 3. Доля асимметричных ошибок (α_d) кратностью d в информационных векторах (m,k)-кодов от общего количества ошибок данной кратностью является постоянной величиной при любых значениях m:

— при нечетном значении d

$$\alpha_d = \frac{N_{m,d}^a}{N_{m,d}} = \frac{2^m C_m^d \left(1 - 2^{1-d}\right)}{2^m C_m^d} = 1 - 2^{1-d}, \quad (20)$$

— при четном значении d

$$\alpha_d = \frac{N_{m,d}^a}{N_{m,d}} = \frac{2^m C_m^d \left(1 - \left(2^{1-d} + 2^{-d} C_d^{d/2}\right)\right)}{2^m C_m^d} = 1 - \left(2^{1-d} + 2^{-d} C_d^{d/2}\right). \quad (21)$$

Поскольку число асимметричных ошибок в (m,k)-кодах представляет собой разность между общим числом немонотонных и симметричных ошибок, характер изменения величины α_d с увеличением значения d прямо противоположен характеру изменения величины σ_d. Асимметричные ошибки характеризуются следующей закономерностью.

Свойство 2. С увеличением значения d величина α_d увеличивается и при $d\to\infty$ стремится к единице:

$$\lim_{d\to\infty} \alpha_d = 1. \quad (22)$$

Рассмотренные свойства различных типов ошибок в информационных векторах, проявляющиеся при увеличении значения d, иллюстрируются табл. 2 и графиками на рис. 3.

Таблица 2

d	υ_d	η_d	σ_d	α_d
1	1	0	0	0
2	0,5	0,5	0,5	0
3	0,25	0,75	0	0,75
4	0,125	0,875	0,375	0,5
5	0,0625	0,9375	0	0,9375
6	0,03125	0,96875	0,3125	0,65625
7	0,01563	0,98438	0	0,98438
8	0,00781	0,99219	0,27344	0,71875
9	0,00391	0,99609	0	0,99609
10	0,00195	0,99805	0,24609	0,75196
11	0,00098	0,99902	0	0,99902
12	0,00049	0,99951	0,22559	0,77392
13	0,00024	0,99976	0	0,99976
14	0,00012	0,99988	0,20947	0,79041
15	0,00006	0,99994	0	0,99994
16	0,00003	0,99997	0,19638	0,80359
17	0,00002	0,99998	0	0,99998
18	0,00001	0,99999	0,18547	0,81452
19	0	1	0	1
20	0	1	0,1762	0,8238
50	0	1	0,11228	0,88772
100	0	1	0,07959	0,92041

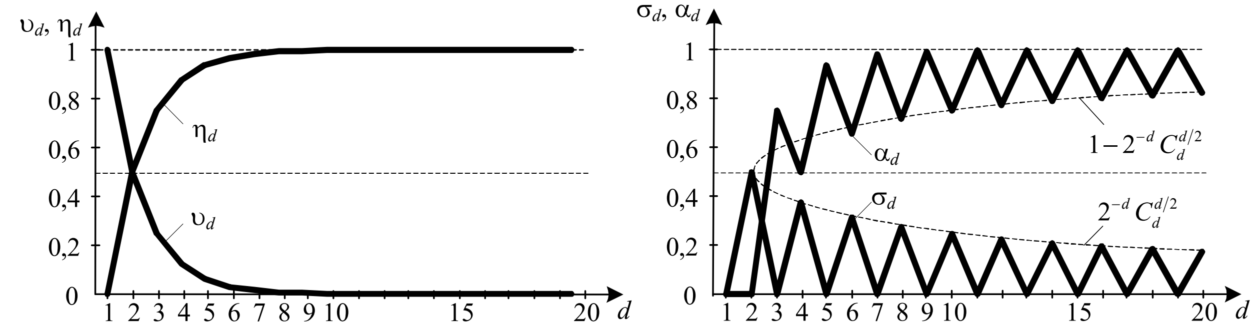

Рис. 3

Исследуем характер изменения количества *ошибок различных типов при увеличении длины информационного вектора и фиксированном значении кратности ошибки*.

Рассмотрим (m,k_1)- и (m+1, k_2)-коды. Сравнивая соотношения количества необнаруживаемых ошибок различных типов в (m+1, k_2)-кодах и в (m,k_1)-кодах (величины τ_d^u, τ_d^{nu}, τ_d^s и τ_d^a для монотонных, немонотонных, симметричных и асимметричных ошибок соответственно), отметим следующее:

— при нечетном значении m

$$\tau_d^u = \tau_d^{nu} = \tau_d^s = 2\frac{m+1}{m-d+1}, \tag{23}$$

$$\tau_d^a = \frac{N_{m+1,d}^a}{N_{m,d}^a} = \frac{2^{m+1}C_{m+1}^d\left(1-\left(2^{1-d}+2^{-d}C_d^{d/2}\right)\right)}{2^m C_m^d\left(1-2^{1-d}\right)} = 2\frac{m+1}{m-d+1}\left(1-\frac{2^{-d}C_d^{d/2}}{1-2^{1-d}}\right); \tag{24}$$

— при четном значении m

$$\tau_d^a = \frac{N_{m+1,d}^a}{N_{m,d}^a} = \frac{2^{m+1}C_{m+1}^d\left(1-2^{1-d}\right)}{2^m C_m^d\left(1-\left(2^{1-d}+2^{-d}C_d^{d/2}\right)\right)} = 2\frac{m+1}{m-d+1}\left(1-\frac{1-2^{1-d}}{2^{-d}C_d^{d/2}}\right). \tag{25}$$

Рассмотрим также соотношения между общим количеством ошибок в информационных векторах (m,k_1)- и (m+1, k_2)-кодов при постоянном значении d:

$$\tau_d = \frac{N_{m+1,d}}{N_{m,d}} = \frac{2^{m+1}C_{m+1}^d}{2^m C_m^d} = 2\frac{m+1}{m-d+1}. \tag{26}$$

Из сравнения выражений (23) и (26) следует, что $\tau_d = \tau_d^u = \tau_d^{nu} = \tau_d^s$. Вычислим предел величины τ_d:

$$\lim_{m\to\infty}\tau_d = \lim_{m\to\infty} 2\frac{m+1}{m-d+1} = 2\lim_{m\to\infty}\frac{1+1/m}{1-d/m+1/m} = 2. \tag{27}$$

Таким образом, приходим к следующему свойству.

Свойство 3. При $m\to\infty$ число ошибок различных типов в информационных векторах (m+1, k_2)-кода увеличивается в 2 раза по сравнению с аналогичным показателем (m,k_1)-кода вне зависимости от кратности ошибки.

Свойство 3 нетрудно обобщить и на случай сравнения количества ошибок в (m,k_1)- и (m+j, k_2)-кодах. С учетом того, что количество ошибок различных типов для некоторых значений m и d есть величина $2^m C_m^d$, умноженная на некоторый постоянный коэффициент (υ_d, η_d, σ_d или α_d), имеем:

$$\tau_{d,j}=\frac{N_{m+j,d}}{N_{m,d}}=\frac{2^{m+j}C_{m+j}^{d}}{2^{m}C_{m}^{d}}=2^{j}\,\frac{(m+1)(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+j)}{(m-d+1)(m-d+2)\cdot\ldots\cdot(m-d+j)},\tag{28}$$

$$\lim_{m\to\infty}\tau_{d,j}=\lim_{m\to\infty}2^{j}\,\frac{(m+1)(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+j)}{(m-d+1)(m-d+2)\cdot\ldots\cdot(m-d+j)}=2^{j}.\tag{29}$$

Свойство 4. При $m\to\infty$ число ошибок различных типов в информационных векторах (m+j, k_2)-кода увеличивается в 2^j раз по сравнению с аналогичным показателем (m,k_1)-кода вне зависимости от кратности ошибки.

Рассмотрим далее, как изменяется *общее количество ошибок всех кратностей в информационных векторах с увеличением значения m* [8].

Общее количество ошибок определяется по формуле

$$N_m=\sum_{d=1}^{m}N_{m,d}=\sum_{d=1}^{m}2^{m}C_{m}^{d}=2^{m}\left(2^{m}-1\right),\tag{30}$$

тогда

$$\varepsilon_m=\frac{N_{m+1}}{N_m}=\frac{2^{m+1}\left(2^{m+1}-1\right)}{2^{m}\left(2^{m}-1\right)}=2\,\frac{2^{m+1}-1}{2^{m}-1}\tag{31}$$

и при $m\to\infty$ имеем

$$\lim_{m\to\infty}\varepsilon_m=\lim_{m\to\infty}2\,\frac{2^{m+1}-1}{2^{m}-1}=2\lim_{m\to\infty}\frac{2^{m+1}/2^{m}-1/2^{m}}{1-1/2^{m}}=4.\tag{32}$$

Свойство 5. При $m\to\infty$ общее число ошибок в информационных векторах (m+1,k_2)-кода увеличивается в 4 раза по сравнению с аналогичным показателем (m,k_1)-кода.

Формулы (31) и (32) можно обобщить на случай сравнения общего количества ошибок в (m+j, k_2)-коде и в (m,k_1)-коде:

$$\varepsilon_{m,j}=\frac{N_{m+j}}{N_m}=\frac{2^{m+j}\left(2^{m+j}-1\right)}{2^{m}\left(2^{m}-1\right)}=2^{j}\,\frac{2^{m+j}-1}{2^{m}-1},\tag{33}$$

$$\lim_{m\to\infty}\varepsilon_{m,j}=\lim_{m\to\infty}2^{j}\,\frac{2^{m+j}-1}{2^{m}-1}=4^{j}.\tag{34}$$

Свойство 6. При $m\to\infty$ общее число ошибок в информационных векторах (m+j, k_2)-кода увеличивается в 4^j раз по сравнению с аналогичным показателем (m,k_1)-кода.

Определим, как изменяется общее количество монотонных ошибок с увеличением длины информационного вектора. Используя формулу (11), запишем отношение числа монотонных ошибок в (m+1, k_2)-коде к аналогичной величине в (m,k_1)-коде: $\varepsilon_m^u=N_{m+1}^u/N_m^u$; при $m\to\infty$ получим

$$\lim_{m\to\infty}\varepsilon_m^u=\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{d=1}^{m+1}2^{m+2-d}C_{m+1}^{d}}{\sum_{d=1}^{m}2^{m+1-d}C_{m}^{d}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2^{m+2}\sum_{d=1}^{m+1}2^{-d}C_{m+1}^{d}}{2^{m+1}\sum_{d=1}^{m}2^{-d}C_{m}^{d}}=2\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{d=1}^{m+1}2^{-d}C_{m+1}^{d}}{\sum_{d=1}^{m}2^{-d}C_{m}^{d}}.\tag{35}$$

Положим $f(m)=\sum_{d=1}^{m}2^{-d}C_{m}^{d}$, тогда выражение (35) преобразуется к виду

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m^u = 2\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{d=1}^{m+1} 2^{-d} C_{m+1}^d}{\sum_{d=1}^{m} 2^{-d} C_m^d} = 2\lim_{m\to\infty} \frac{f(m+1)}{f(m)}, \qquad (36)$$

отсюда следует, что

$$f(1)=\frac{1}{2},\ f(2)=\frac{5}{4},\ f(3)=\frac{19}{8},\ f(4)=\frac{65}{16},\ f(5)=\frac{211}{32},\ \ldots,$$

а отношения ε_m^u равны соответственно

$$2\frac{f(5)}{f(4)} \approx 3,2462,\ \ldots,\ 2\frac{f(10)}{f(9)} \approx 3,0267,\ \ldots, 2\frac{f(20)}{f(19)} \approx 3,0005, \ldots,\ 2\frac{f(50)}{f(49)} \approx 3.$$

Свойство 7. При $m\to\infty$ общее число монотонных ошибок в информационных векторах $(m+1, k_2)$-кода увеличивается в 3 раза по сравнению с аналогичным показателем (m,k_1)-кода.

Аналогично установленным ранее свойствам при сравнении монотонных ошибок в $(m+j, k_2)$- и (m,k_1)-кодах справедливо следующее.

Свойство 8. При $m\to\infty$ общее число монотонных ошибок в информационных векторах $(m+j, k_2)$-кода увеличивается в 3^j раз по сравнению с аналогичным показателем (m,k_1)-кода.

Подобным образом можно установить и свойства, присущие другим типам ошибок (m,k)-кодов. Так, по аналогии со свойством 8, отношение общего числа немонотонных, симметричных и асимметричных ошибок в $(m+1, k_2)$-коде к соответствующим величинам в (m,k_1)-коде (величины ε_m^{nu}, ε_m^s и ε_m^a) характеризуется следующим свойством.

Свойство 9. При $m\to\infty$ общее число немонотонных ошибок (как симметричных, так и асимметричных) в информационных векторах $(m+1, k_2)$-кода увеличивается в 4 раза по сравнению с аналогичным показателем (m,k_1)-кода.

Свойство 9 обобщается и на случай сравнения немонотонных ошибок в информационных векторах $(m+j, k_2)$- и (m,k_1)-кодов.

Свойство 10. При $m\to\infty$ общее число немонотонных ошибок (как симметричных, так и асимметричных) в информационных векторах $(m+j, k_2)$-кода увеличивается в 4^j раз по сравнению с аналогичным показателем (m,k_1)-кода.

Заключение. Предложенная классификация ошибок в информационных векторах систематических кодов позволяет более детально изучать свойства (m,k)-кодов, часто используемых в задачах построения надежных логических устройств, а также новых кодов, разрабатываемых для этих целей [9, 10]. В свою очередь, использование на практике возможностей (m,k)-кодов по обнаружению ошибок различных типов позволяет синтезировать алгоритмы построения систем технического диагностирования, обладающих способностью 100%-ного обнаружения одиночных неисправностей и оптимальными показателями аппаратурной избыточности. Учет возможностей (m,k)-кодов по обнаружению ошибок в информационных векторах также может быть полезен при организации контроля логических устройств без изменения их внутренней структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McCluskey E. J.* Logic Design Principles: With Emphasis on Testable Semicustom Circuits. N. J.: Prentice Hall PTR, 1986. 549 p.

2. *Fujiwara E.* Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. John Wiley & Sons, 2006. 720 p.

3. *Согомонян Е. С., Слабаков Е. В.* Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. М.: Радио и связь, 1989. 208 с.

4. *Nicolaidis M., Zorian Y.* On-line testing for VLSI — a compendium of approaches // J. of Electronic Testing: Theory and Applications. 1998. N 12. P. 7—20.
5. *Busaba F. Y., Lala P. K.* Self-checking combinational circuit design for single and unidirectional multibit errors // J. of Electronic Testing: Theory and Applications. 1994. Iss. 5. P. 19—28.
6. Self-checking combinational circuits with unidirectionally independent outputs / *A. Morosow, V. V. Saposhnikov, Vl. V. Saposhnikov, M. Goessel* // VLSI Design. 1998. Vol. 5, iss. 4. P. 333—345.
7. *Berger J. M.* A note on error detection codes for asymmetric channels // Information and Control. 1961. Vol. 4, iss. 1. P. 68—73.
8. *Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В.* О свойствах кода с суммированием в схемах функционального контроля // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6. С. 155—162.
9. Low cost concurrent error detection based on modulo weight-based codes / *D. Das, N. A. Touba, M. Seuring, M. Gossel* // Proc. of IEEE 6th Intern. On-Line Testing Workshop (IOLTW), Palma de Mallorca, Spain, July 3—5, 2000. P. 171—176.
10. О кодах с суммированием единичных разрядов в системах функционального контроля / *А. А. Блюдов, Д. В. Ефанов, В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников* // Автоматика и телемеханика. 2014. № 8. С. 131—145.

Сведения об авторах

Валерий Владимирович Сапожников — д-р техн. наук, профессор; ПГУПС, кафедра автоматики и телемеханики на железных дорогах; E-mail: port.at.pgups.1@gmail.com

Владимир Владимирович Сапожников — д-р техн. наук, профессор; ПГУПС, кафедра автоматики и телемеханики на железных дорогах; E-mail: port.at.pgups.1@gmail.com

Дмитрий Викторович Ефанов — канд. техн. наук; ПГУПС, кафедра автоматики и телемеханики на железных дорогах; E-mail: TrES-4b@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
автоматики и телемеханики
на железных дорогах

Поступила в редакцию
04.12.14 г.

Ссылка для цитирования: *Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В.* Классификация ошибок в информационных векторах систематических кодов // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 5. С. 333—343.

ERRORS CLASSIFICATION IN INFORMATION VECTORS OF SYSTEMATIC CODES

V. V. Sapozhnikov, Vl. V. Sapozhnikov, D. V. Ephanov

Petersburg State Transport University, 190031, Saint Petersburg, Russia
E-mail: TrES-4b@yandex.ru

A classification of errors in information vectors of systematic codes is proposed. The classification allows to account all the possible variants of information distortion and enables investigation of abilities of various systematic codes in the error detection. Applications of the approach to development of reliable automation systems and computer technique are discussed.

Keywords: technical diagnostics, systematic code, information vector, errors in information vectors, errors classification, Berger code, functional control system.

Data on authors

Valery V. Sapozhnikov — Dr. Sci., Professor; PSTU, Department of Automation and Telemechanics on the Railways; E-mail: port.at.pgups.1@gmail.com

Vladimir V. Sapozhnikov — Dr. Sci., Professor; PSTU, Department of Automation and Telemechanics on the Railways; E-mail: port.at.pgups.1@gmail.com

Dmitry V. Ephanov — PhD; PSTU, Department of Automation and Telemechanics on the Railways; E-mail: TrES-4b@yandex.ru

Reference for citation: *Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov Vl. V., Ephanov D. V.* Errors classification in information vectors of systematic codes // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie. 2015. Vol. 58, N 5. P. 333—343 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-5-333-343