УДК 681.51
DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-681-686

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ ИНТЕГРАТОРОВ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

К. А. Зименко[1], А. Е. Поляков[2], Д. В. Ефимов[2], А. С. Кремлев[1]

[1] *Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия*
E-mail: kostyazimenko@gmail.com

[2] *Государственный институт исследований в информатике и автоматике, 59650, Вильнёв-д'Аск, Франция*

Рассматривается проблема анализа устойчивости системы последовательно соединенных интеграторов на конечном интервале времени. Предложен алгоритм стабилизации системы, основанный на использовании метода неявных функций Ляпунова и применении некоторых свойств однородных систем. Расчет параметров управления базируется на решении системы линейных матричных неравенств. Эффективность предложенного метода подтверждается результатами компьютерного моделирования.

Ключевые слова: *устойчивость на конечном интервале времени, метод неявных функций Ляпунова, управление по вектору состояний.*

Введение. Использование алгоритмов управления и наблюдения за вектором состояний системы гарантирует выполнение всех переходных процессов на конечном интервале времени. На практике такие алгоритмы востребованы, в частности, для синтеза систем управления робототехническими, мехатронными, транспортными и другими устройствами. Поэтому проблема управления на конечном интервале времени весьма актуальна и является предметом множества исследований (см., например, [1—5]).

В настоящей статье предложен алгоритм стабилизации системы последовательно соединенных интеграторов на конечном интервале времени. Схемы управления, используемые при решении задачи стабилизации цепи интеграторов, могут быть легко расширены для более широкого класса систем [6], более того, необходимость разработки подобных алгоритмов управления обусловливается их применением во множестве механических и электромеханических систем [7, 8]. Представленный в настоящей статье алгоритм управления базируется на развитии результатов, полученных в работе [9], в отличие от которых предлагаемый алгоритм не требует выполнения каких-либо дополнительных вычислительных процедур. Расчет параметров управления, как и в [9], выполняется на основе решения системы линейных матричных неравенств. Реализация алгоритма базируется на использовании метода неявных функций Ляпунова и применении некоторых свойств однородных систем.

Постановка задачи. Основные положения. Рассмотрим систему, описывающую цепь интеграторов:

$$\dot{x} = Ax + bu\,, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния, $u \in R$ — управляющее воздействие,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача заключается в синтезе алгоритма стабилизации системы (1) на конечном интервале времени с простой схемой настройки параметров системы управления.

Приведем предварительные сведения о некоторых свойствах системы.

Устойчивость на конечном интервале времени. Рассмотрим математическую модель системы:

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния, $f \in R_+ \times R^n \to R^n$ — нелинейное непрерывное векторное поле (может быть разрывным по отношению к переменной состояния).

Примем, что начало координат является положением равновесия системы (2).

Определение 1 [2, 4, 9, 10]. Начало координат системы (2) является глобально устойчивым на конечном интервале времени, если для системы выполняются следующие условия:

— аттрактивность на конечном интервале времени (существует такая функция времени стабилизации $T: R^n \setminus \{0\} \to R_+$, что $\lim\limits_{t \to T(x_0)} x(t, x_0) = 0$ для всех $x_0 \in R^n \setminus \{0\}$);

— устойчивость по Ляпунову.

Отметим, что функция времени стабилизации системы позволяет оценить время ее перехода в состояние равновесия.

Однородные системы [11—13]. Введем вектор весов $r = \left(r_1, \ldots, r_n\right)^T$ и симметричную матрицу $D(\lambda) = \operatorname{diag}\{\lambda^{r_i}\}_{i=1}^n$, где $r_i \in R_+$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, и $\lambda > 0$. Отметим, что $D(\lambda)x = \left(\lambda^{r_1} x_1, \ldots, \lambda^{r_n} x_n\right)^T$ для $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)^T \in R^n$.

Определение 2 [12]. Функция $g: R^n \to R$ (векторное поле $f: R^n \to R^n$) однородна со степенью m, если $g\left(D(\lambda)x\right) = \lambda^m g(x)$ $\left(f\left(D(\lambda)x\right) = \lambda^m D(\lambda) f(x)\right)$ для всех $\lambda > 0$ и $x \in R^n$.

Введем однородную единичную сферу $S_r = \left\{x \in R^n : \|x\|_r = 1\right\}$, где $\|x\|_r = \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^{\rho/r_i}\right)^{1/\rho}$ — однородная норма, $\rho \geq \max_i r_i$.

Теорема 1 [13]. Пусть f — однородное непрерывное векторное поле на пространстве R^n, такое что система (2) локально асимптотически устойчива. Тогда система (2) глобально асимптотически устойчива и для нее существует однородная функция Ляпунова V.

Для однородной функции Ляпунова V со степенью m существуют константы c_1 и c_2, такие что выполняется следующее неравенство:

$$c_1 \|x\|_r^m \leq V(x) \leq c_2 \|x\|_r^m. \tag{3}$$

Доказательство теоремы приведено в работе [13].

Метод неявных функций Ляпунова. Приведем следующую теорему.

Теорема 2 [9, 14, 15]. Если существует такая непрерывная функция $Q(V,x): R^{n+1} \to R$, что:

1) функция $Q(V,x)$ непрерывно дифференцируема для $\forall x \in R^n \setminus \{0\}$ и $\forall V \in R_+$;

2) для любого $\forall x \in R^n \setminus \{0\}$ существуют $V^- \in R_+$ и $V^+ \in R_+$, такие что $Q(V^-,x) < 0 < Q(V^+,x)$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ (V,x)\in\Omega}} V = 0^+$, $\lim\limits_{\substack{V\to 0^+\\ (V,x)\in\Omega}} \|x\| = 0$, $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to\infty\\ (V,x)\in\Omega}} V = +\infty$, где $\Omega = \{(V,x) \in R^{n+1} : Q(V,x) = 0\}$;

4) неравенство $-\infty < \dfrac{\partial Q(V,x)}{\partial V} < 0$ выполняется для $\forall x \in R^n \setminus \{0\}$ и $\forall V \in R_+$;

5) неравенство $\dfrac{\partial Q(V,x)}{\partial x} f(x) \le \eta V^{1-\mu} \dfrac{\partial Q(V,x)}{\partial V}$ выполняется для $\forall (V,x) \in \Omega$ и некоторых констант $0 < \mu \le 1$ и $\eta > 0$,

то начало координат системы (2) глобально устойчиво на конечном интервале времени со следующей оценкой времени стабилизации: $T(x_0) \le \dfrac{V_0^{\mu}}{\eta\mu}$.

Доказательство теоремы приведено в работах [9, 14, 15].

Основной результат. Введем неявную функцию Ляпунова:

$$Q(V,x) = x^T D(V^{-1}) P D(V^{-1}) x - 1, \tag{4}$$

где $P = P^T \in R^{n\times n}$ — симметричная положительно-определенная матрица, $D(\lambda) = \operatorname{diag}\{\lambda^{1+(n-i)\mu}\}_{i=1}^n$ — диагональная матрица, $\mu \in (0,1]$.

Теорема 3. Если разрешима система линейных матричных неравенств

$$\left.\begin{array}{l} AX + XA^T + by + y^T b^T + \alpha X + \beta \mathbf{I}_n \le 0, \\ XH_\mu + H_\mu X < 0, \quad X > 0, \quad \beta \mathbf{I}_n \ge \gamma X, \\ \begin{pmatrix} \gamma & y \\ y^T & X \end{pmatrix} \ge 0, \quad \begin{pmatrix} X & \mathbf{I}_n - H(C) \\ I_n - H(C) & \beta \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \ge 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

для $H_\mu = \operatorname{diag}\{-1-(n-i)\mu\}_{i=1}^n$, $H(\lambda) = \operatorname{diag}\{\lambda^{(n+1-i)\mu}\}_{i=1}^n$, $\mu \in (0,1]$, $\alpha, \beta, \gamma, C \in R_+ : \alpha > \beta$, $X \in R^{n\times n}$, $y \in R^{1\times n}$ и существует такое c_u, которое удовлетворяет одному из неравенств

$$\frac{c_1}{C} \ge c_u \ge c_2; \tag{6}$$

$$c_1 \ge c_u \ge \frac{c_2}{C}, \tag{7}$$

где коэффициенты c_1 и c_2 удовлетворяют неравенству (3), то закон управления

$$u(x) = \left(c_u \|x\|_r\right)^{1-\mu} kD\left(\left(c_u \|x\|_r\right)^{-1}\right)x, \tag{8}$$

где $k = yX^{-1}$, стабилизирует систему (1) на конечном интервале времени.

Доказательство. В соответствии с работой [9] система $\dot{x} = Ax + bu + d(t,x)$ робастно устойчива на конечном интервале времени для некоторого возмущающего воздействия $d(t,x)$, если выполняются следующие условия:

1) разрешима система линейных матричных неравенств

$$AX + XA^T + by + y^T b^T + \alpha X + \beta \mathbf{I}_n \le 0,$$
$$-\upsilon X \le XH_\mu + H_\mu X < 0,\ X > 0,\ \upsilon \in R_+; \tag{9}$$

2) закон управления представлен выражением

$$u(V, x) = V^{1-\mu} k D(V^{-1}) x, \tag{10}$$

где $V \in R_+ : Q(V, x) = 0$ и функция $Q(V, x)$ приведена в (4) для $P = X^{-1}$;

3) функция возмущений $d(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$d^T(t, x) D^2(V^{-1}) d(t, x) \le \beta^2 V^{-2\mu}. \tag{11}$$

Доказательство соответствия функции (4) условиям 1—5 теоремы 2 приведены в работе [9].

Представив разность законов управления (10) и (8) как функцию возмущений

$$d(t,x) = -b\left(V^{1-\mu} k D\left(V^{-1}\right)\right) - \left(c_u \|x\|_r\right)^{1-\mu} k D\left(c_u \|x\|_r\right)^{-1} x = -V^{1-\mu} bk \left(\mathbf{I}_n - H\left(\frac{V}{c_u \|x\|_r}\right)\right) D\left(V^{-1}\right) x$$

и подставив ее в неравенство (11), получим

$$\left(\mathbf{I}_n - H\left(\frac{V}{c_u \|x\|_r}\right)\right) k^T k \left(\mathbf{I}_n - H\left(\frac{V}{c_u \|x\|_r}\right)\right) \le \beta^2 P. \tag{12}$$

Введя неравенство $\beta P \ge \gamma \mathbf{I}_n$ (соответствующее четвертому неравенству системы (5)) и неравенство $k^T k \le \gamma P$ (соответствующее пятому неравенству системы (5) при использовании дополнения Шура), выражение (12) можно переписать в виде

$$\left(\mathbf{I}_n - H\left(\frac{V}{c_u \|x\|_r}\right)\right) P \left(\mathbf{I}_n - H\left(\frac{V}{c_u \|x\|_r}\right)\right) \le \beta \mathbf{I}_n$$

или для $X = P^{-1}$ и $y = kP^{-1}$ — в виде

$$\beta X \ge \left(\mathbf{I}_n - H\left(\frac{V}{c_u \|x\|_r}\right)\right)^2. \tag{13}$$

В соответствии с уравнением (4) можно сделать вывод, что функция Ляпунова $V(x)$ является однородной со степенью, равной единице, так как $Q(V, D(\lambda)x) = Q(\lambda^{-1}V, x)$ или $V(D(\lambda)x) = \lambda V(x)$.

Перепишем неравенство (3) следующим образом: $c_1 \|x\|_r \le V(x) \le c_2 \|x\|_r$. Тогда для $C \in R_+$, удовлетворяющего неравенству (6) или (7), получим выражение

$$\left(\mathbf{I}_n - H\left(\frac{V}{c_u \|x\|_r}\right)\right)^2 \le \left(\mathbf{I}_n - H(C)\right)^2. \tag{14}$$

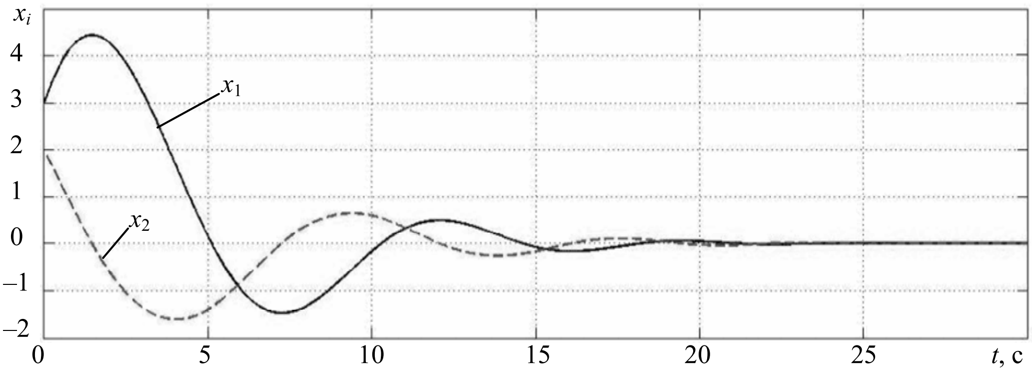
Используя дополнение Шура, неравенство $\left(\mathbf{I}_n - H(C)\right)^2 \le \beta X$ можно переписать в виде линейного матричного неравенства, совпадающего с последним неравенством системы (5). ■

Пример. Рассмотрим систему (1) для случая, когда $n = 2$. Решив систему линейных матричных неравенств (5) для $\mu = 0{,}2, C = 0{,}55, \alpha = \gamma = 0{,}1$, получим следующие значения матриц P и k:

$$P=\begin{pmatrix}2,1637 & 0,5956\\ 0,5956 & 3,8310\end{pmatrix},\quad k=\begin{pmatrix}-0,6121 & -0,4418\end{pmatrix}.$$

Согласно полученным оценкам коэффициентов $c_1=1,1$ и $c_2=1,96$ параметр c_u в соответствии с выражением (6) должен удовлетворять неравенству $2\geq c_u\geq 1,96$.

Результаты моделирования для $c_u=1,97$, $x_1(0)=3$ и $x_2(0)=2$ приведены на рисунке.



Заключение. Представлен алгоритм стабилизации системы последовательно соединенных интеграторов, основанный на использовании метода неявных функций Ляпунова и применении некоторых свойств однородных систем. Расчет параметров управления базируется на решении системы линейных матричных неравенств. Эффективность предложенного метода подтверждается результатами компьютерного моделирования.

Статья подготовлена по результатам работы, выполненной при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01) и Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0031).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amato F., Ariola M.* Finite-time control of discrete-time linear systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2005. Vol. 50, Iss. 5. P. 724—729.

2. *Roxin E.* On finite stability in control systems // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1966. Vol. 15(3). P. 273–283.

3. *Levant A.* On fixed and finite time stability in sliding mode control // IEEE of the 52nd Annual Conf. on Decision and Control (CDC). 2013. P. 4260—4265.

4. *Bhat S. P., Bernstein D. S.* Finite-time stability of continuous autonomous systems // SIAM Journal of Control and Optimization. 2000. Vol. 38(3). P. 751—766.

5. *Moulay E., Perruquetti W.* Finite-time stability and stabilization: State of the art // Lecture Notes in Control and Information Sciences. 2006. Vol. 334. P. 23—41.

6. *Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W.* Robust stabilization of MIMO systems in finite/fixed time // Intern. J. Robust. Nonlinear Control. 2014. P. 1—19.

7. *Chernous'ko F. L., Ananevski I. M., Reshmin S. A.* Control of Nonlinear Dynamical Systems: Methods and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

8. *Utkin V. I., Guldner J., Shi J.* Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems. CRC Press, 2009. 503 p.

9. *Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W.* Finite-time stabilization using implicit Lyapunov function technique // Proc. of the 9th Symp. on Nonlinear Control Systems. 2013. P. 140—145.

10. *Orlov Y.* Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems // SIAM Journal of Control and Optimization. 2010. Vol. 43(4). P. 1253—1271.

11. *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957. 242 с.

12. *Зубов В. И.* О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенно-однородными правыми частями // Изв. вузов. Математика. 1958. № 1. С. 80—88.

13. *Bacciotti A., Rosier L.* Lyapunov Functions and Stability in Control Theory. Springer, 2005. 237 p.

14. *Коробов В. И.* Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 5. С. 1051—1055.

15. *Adamy J., Flemming A.* Soft variable-structure controls: A survey // Automatica. 2004. Vol. 40. P. 1821–1844.

Сведения об авторах

Константин Александрович Зименко — аспирант; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: kostyazimenko@gmail.com

Андрей Евгениевич Поляков — канд. техн. наук; Государственный институт исследований в информатике и автоматике; E-mail: andrey.polyakov@inria.fr

Денис Валентинович Ефимов — канд. техн. наук; Государственный институт исследований в информатике и автоматике; E-mail: Denis.Efimov@inria.fr

Артем Сергеевич Кремлев — канд. техн. наук; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: kremlev_artem@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики
Университета ИТМО

Поступила в редакцию
22.04.15 г.

Ссылка для цитирования: *Зименко К. А., Поляков А. Е., Ефимов Д. В., Кремлев А. С.* Устойчивость системы последовательно соединенных интеграторов на конечном интервале времени // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 9. С. 681—686.

FINITE-TIME STABILITY OF SYSTEM OF SERIES-CONNECTED INTEGRATORS

K. A. Zimenko[1], A. E. Polyakov[2], D. V. Efimov[2], A. S. Kremlev[1]

[1] *ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia*
E-mail: kostyazimenko@gmail.com

[2] *National Institut for Research in Informatics & Automatics*
(Institut national de recherche en informatique et en automatique — INRIA),
59650, Villeneuve-d'Ascq, France

The problem of finite-time stability analysis of system of series-connected integrators is considered. An algorithm of the system stabilization is proposed. The algorithm makes use of implicit Lyapunov function technique as well as several properties of homogeneous systems. Evaluation of control parameters is based on solution to a system of linear matrix inequalities. Effectiveness of the proposed method is confirmed by presented results of computer modeling.

Keywords: finite time stability, implicit Lyapunov function technique, state feedback control.

Data on authors

Konstantin A. Zimenko — Post-Graduate Student; ITMO University; Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: kostyazimenko@gmail.com

Andrey E. Polyakov — PhD; INRIA; E-mail: andrey.polyakov@inria.fr

Denis V. Efimov — PhD; INRIA; E-mail: Denis.Efimov@inria.fr

Artem S. Kremlev — PhD; ITMO University; Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: kremlev_artem@mail.ru

For citation: *Zimenko K. A., Polyakov A. E., Efimov D. V., Kremlev A. S.* Finite-time stability of system of series-connected integrators // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie. 2015. Vol. 58, N 9. P. 681—686 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-681-686