

**СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ САУ
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ АППРОКСИМАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК**В. Ф. Шишлаков¹, Е. В. Анисимова¹, А. В. Шишлаков², Д. В. Шишлаков¹

¹ Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
190000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: syfmail@yandex.ru

² Концерн «НПО „АВРОРА“», 194021, Санкт-Петербург, Россия

Рассматривается решение задачи синтеза параметров законов управления САУ при аппроксимации характеристик нелинейных элементов аналитическими и иррациональными функциями. В качестве математического аппарата применяется обращение прямого вариационного метода анализа — обобщенного метода Галеркина — на решение поставленной задачи. Показано преимущество данных способов аппроксимации нелинейностей для САУ с гладкими нелинейностями, исключающее необходимость определения точек переключения нелинейных характеристик при работе алгоритма.

Ключевые слова: аналитическая аппроксимация, аппроксимация иррациональными функциями, нелинейные характеристики, обобщенный метод Галеркина.

При решении задачи синтеза нелинейных систем автоматического управления (САУ), в том числе электромеханических и электроэнергетических, не всегда целесообразно использовать кусочно-линейную аппроксимацию. Применение кусочно-линейной аппроксимации в случае гладких нелинейных характеристик обусловлено двумя обстоятельствами:

- допустимостью данного вида аппроксимации для реальной характеристики;
- ограничением числа участков аппроксимации кусочно-линейной характеристики, что связано с точностью интегрирования вычислительной модели или используемым методом синтеза системы.

Многие элементы и устройства САУ имеют гладкие нелинейные статические характеристики, а возможность кусочно-линейной аппроксимации применительно к таким характеристикам связана как с физикой процесса функционирования исследуемой системы, так и с видом нелинейной характеристики. Теоретически любую нелинейную характеристику можно аппроксимировать кусочно-линейными участками, однако с точки зрения функционирования системы подобная модель может оказаться неадекватной реальной САУ.

Для решения задачи синтеза нелинейных САУ произвольной структуры и порядка, при кусочно-линейной аппроксимации нелинейных характеристик, хорошо зарекомендовал себя метод синтеза, математическую основу которого составляет обращение одного из прямых вариационных методов анализа — обобщенного метода Галеркина — на решение задачи синтеза [1—5].

Данный подход позволяет с единых математических, методологических и алгоритмических позиций решать задачу синтеза параметров регулятора по заданным показателям качества работы САУ в переходном режиме для широкого класса линейных и нелинейных систем управления: непрерывных, импульсных (с различными видами модуляции сигнала), дискретных (с несколькими импульсными элементами, работающими как синхронно, так и не синхронно, с одной и несколькими частотами прерывания), дискретно-непрерывных, в том числе и со звеньями чистого запаздывания.

Общая схема решения задачи синтеза параметров закона управления для нелинейных САУ подробно изложена в работах [1—7], где показано, что задача синтеза обобщенным методом Галеркина в вычислительном плане представляет собой задачу нелинейного программирования с целевой функцией, построенной на основе уравнений Галеркина:

$$J = \sum_{q=1}^m \left\{ \sum_{i=0}^n a_i(c_k) A_{qi} + \sum_{i=0}^u b_i(c_k) B_{qi} - \sum_{i=0}^v e_i(c_k) C_{qi} \right\}^2, \quad \min_{c_k} J \rightarrow 0, \quad (1)$$

где $q=1, 2, \dots, m$ — число искоемых параметров c_k закона управления; $a_i(c_k)$, $b_i(c_k)$, $e_i(c_k)$ — вещественные постоянные коэффициенты полиномов оператора обобщенного дифференцирования D уравнения движения нелинейной САУ степеней n , u , v соответственно; A_{qi} , B_{qi} , C_{qi} — интегралы Галеркина:

$$\begin{aligned} A_{qi} &= \int_0^{\infty} D^i \{x^\circ(t)\} e^{-\rho_q t} dt = A_q \rho_q^{i-1}, \quad i=0, 1, \dots, n; \\ B_{qi} &= \int_0^{\infty} D^i \{F[x^\circ(t)]\} e^{-\rho_q t} dt = B_q \rho_q^{i-1}, \quad i=0, 1, \dots, u; \\ C_{qi} &= \int_0^{\infty} D^i \{f(t)\} e^{-\rho_q t} dt = C_q \rho_q^{i-1}, \quad i=0, 1, \dots, v, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $x^\circ(t)$ — желаемое программное движение [1, 2]; $F[x^\circ(t)]$ — нелинейная характеристика; $f(t)$ — внешнее входное воздействие; $e^{-\rho_q t}$ — система из m непрерывно дифференцируемых линейно-независимых координатных функций, представляющих собой полную систему функций; $\rho_q = \rho_1 r^{q-1} = \rho_1 2^{q-1}$, $q=1, 2, \dots, m$, — коэффициенты затухания системы координатных функций, распределенные по геометрической прогрессии (со знаменателем прогрессии $r=2$), $\rho_1 = \alpha$, где $\alpha = \frac{3 \div 4}{T}$ — показатель затухания желаемого процесса (здесь T — время переходного процесса).

В работах [1—7] получены рекуррентные аналитические соотношения вида „вход—выход“, определяющие интегралы (2) для различных внешних входных воздействий и желаемых программных движений, а также нелинейных характеристик, аппроксимированных кусочно-линейно и алгебраически.

Оптимум целевой функции (1) определяется путем использования известных методов поиска экстремума функционала [8, 9] при ограничениях на техническую реализуемость параметров, грубость и абсолютную устойчивость САУ.

Следует отметить, что алгоритм программного комплекса, реализующего обобщенный метод Галеркина [10, 11], имеет в своем составе модуль, определяющий точки переключения на входе нелинейной характеристики для процесса заданного вида (при кусочно-линейной аппроксимации). При работе этого модуля формируется массив данных о значениях моментов переключения (переход с одного линейного участка на другой) для любой типовой кусочно-линейной характеристики, который используется при вычислении значений интеграла B_{qi} .

Значения моментов переключения можно определить с точностью до половины величины приращения координаты времени, т.е. максимальное значение погрешности будет составлять $\delta = \Delta t/2$. Погрешность в определении моментов переключения нелинейных характеристик [2, 3], особенно если число переключений велико, приводит к снижению точности вычисления интеграла B_{qi} , а следовательно, и результатов, получаемых при синтезе параметров регулятора САУ.

Аппроксимацию нелинейных характеристик аналитическими и иррациональными функциями целесообразно использовать для статических характеристик различных электро-механических и электроэнергетических устройств, например асинхронных и синхронных электрических машин (при асинхронном пуске), учета магнитных характеристик и т.д. Несомненное достоинство применения данного вида аппроксимации состоит в следующем: при решении задачи синтеза параметров закона управления с помощью программного комплекса [10, 11] в случае САУ с подобными нелинейными характеристиками при монотонных процессах точки переключения будут отсутствовать. Это не только повысит точность определения значений варьируемых параметров, но и ускорит работу программного комплекса.

Таким образом, для повышения точности определения параметров закона управления представляется целесообразным распространить обобщенный метод Галеркина на решение задачи синтеза нелинейных САУ при аппроксимации нелинейных характеристик аналитическими и иррациональными функциями [12, 13].

Задача синтеза параметров закона управления для САУ, имеющих гладкие нелинейные характеристики, рассматривается в следующей постановке: параметры регулятора при известной структуре определяются из условия приближенного обеспечения заданных показателей качества работы САУ при ее переходе из одного установившегося состояния в другое и при обеспечении абсолютной устойчивости и грубости системы по варьируемым параметрам.

Как следует из соотношений (1) и (2), для распространения обобщенного метода Галеркина на САУ с аппроксимацией нелинейных характеристик аналитическими или иррациональными функциями необходимо определить интегралы B_{qi} [13—15].

Данные соотношения были определены для программного движения вида

$$x^\circ(t) = (x_y + H^* e^{-\alpha t}) 1(t),$$

где x_y — значение желаемого процесса $x^\circ(t)$ при $t = \infty$; $H^* = x_0 - x_y$; x_0 — начальное значение желаемого процесса в момент времени $t = +0$.

Рекуррентные аналитические соотношения для частных случаев — процессов вида $x^\circ(t) = x_0 e^{-\alpha t} 1(t)$ и $x^\circ(t) = x_y (1 - e^{-\alpha t}) 1(t)$ — приведены в табл. 1, 2 соответственно.

Таблица 1

Вид аппроксимирующей функции	q	Интеграл B_q
$F[x^\circ(t)] = z_0 + \sum_{g=1}^l z_g (x^\circ(t))^g, g = 0, 1, \dots, l$	$1, \dots, m$	$z_0 + \sum_{g=1}^l \frac{z_g x_0^g \cdot \rho_q}{g\alpha + \rho_q}, g = 1, 2, \dots, l$
$F[x^\circ(t)] = \frac{Ax^\circ(t)}{B + (x^\circ(t))^2} + C(x^\circ(t))^{0,3}$	1	$\frac{A}{2x_0} \ln \left(\frac{B + x_0^2}{B} \right) + \frac{Cx_0^{0,3}}{(1+0,3)}$
	2	$\frac{2A}{x_0} - \frac{2AB}{x_0^2 \sqrt{B}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x_0}{\sqrt{B}} \right) + \frac{2Cx_0^{0,3}}{(2+0,3)}$
	$3, \dots, m$	$N \left[A \left(\frac{1}{(N-1)x_0} + \sum_{k=1}^m \frac{(-B)^k}{(N-(2k+1))x_0^{2k+1}} + \frac{B^{m+1}}{x_0^N \sqrt{B}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x_0}{\sqrt{B}} \right) \right) + \frac{Cx_0^{0,3}}{N+0,3} \right], N = 2^{q-1}$

Таблица 2

Вид аппроксимирующей функции	q	Интеграл B_q
$F[x^\circ(t)] = z_0 + \sum_{g=1}^l z_g (x^\circ(t))^g, g=0, 1, \dots, l$	$1, \dots, m$	$z_0 + \sum_{g=1}^l \frac{z_g (x_y \alpha)^g g!}{\prod_{k=1}^g (g\alpha + \rho_k)}$, $g=1, 2, \dots, l, k=1, 2, \dots, g$
$F[x^\circ(t)] = \frac{Ax^\circ(t)}{B+(x^\circ(t))^2} + C(x^\circ(t))^{0,3}$	1	$-\frac{A}{2x_y} \ln\left(\frac{B+x_y^2}{B}\right) + \frac{Cx_y^{0,3}}{(1+0,3)}$
	2	$\frac{2A}{x_y} - \frac{A}{x_y} \ln\left(\frac{B+x_y^2}{B}\right) - \frac{2AB}{x_y^2 \sqrt{B}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x_y}{\sqrt{B}}\right) + \frac{2Cx_y^{0,3}}{(1+0,3)(2+0,3)}$
	$3, \dots, m$	$N \left[A \left(M_1 - M_2 - M_3 \ln\left(\frac{B+x_y^2}{B}\right) - M_4 \operatorname{arctg}\left(\frac{x_y}{\sqrt{B}}\right) \right) + \frac{(N-1)!}{\prod_{i=1}^N (i+0,3)} Cx_y^{0,3} \right], N=2^{q-1}$

В табл. 2 приняты следующие обозначения:

$$M_1 = \sum_{j=1}^{N/2} \frac{\sum_{k=1}^j \frac{(N-1)!}{(2j-2k)!(N-1-2j+2k)!} x_y^{2j-2k} (-B)^{k-1}}{(N-2j+1)x_y^{2j-1}};$$

$$M_2 = \sum_{j=1}^{(N/2)-1} \frac{\sum_{k=1}^j \frac{(N-1)!}{(1+2j-2k)!(N-2-2j+2k)!} x_y^{2j-2k} (-B)^{k-1}}{(N-2j)x_y^{2j-1}};$$

$$M_3 = \sum_{i_1}^{N/2} \frac{(N-1)!}{(2i_1-2)!(N-2i_1+1)!} \frac{x_y^{N-2i_1} (-B)^{i_1-1}}{2x_y^{N-1}},$$

$$M_4 = \sum_{i_2=1}^{N/2} \frac{(N-1)!}{(2i_2-1)!(N-2i_2)!} \frac{x_y^{N-2i_2} (-1)^{i_2-1} (B)^{i_2}}{x_y^N \sqrt{B}}.$$

Таким образом, полученные рекуррентные соотношения позволяют полностью алгебраизировать решение задачи синтеза параметров законов управления для нелинейных непрерывных САУ, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями произвольно высокого порядка, и содержащих нелинейные элементы, характеристики которых целесообразно аппроксимировать аналитическими и иррациональными функциями.

В ходе решения поставленной задачи обобщенный метод Галеркина был распространен на решение задачи синтеза непрерывных систем автоматического управления при аппроксимации нелинейных характеристик аналитическими и иррациональными функциями. Показа-

ны преимущества данных видов аппроксимации по сравнению с кусочно-линейной, при использовании обобщенного метода Галеркина в качестве математического аппарата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шишляков В. Ф. Синтез нелинейных САУ с различными видами модуляции: Монография. СПб: СПбГУАП, 1999.
2. Никитин А. В., Шишляков В. Ф. Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления: монография / Под. ред. В. Ф. Шишлякова. СПб: СПбГУАП, 2003.
3. Шишляков В. Ф., Шишляков Д. В. Параметрический синтез многосвязных систем автоматического управления обобщенным методом Галеркина // Информационно-управляющие системы. 2006. № 3. С. 51—62.
4. Цветков С. А., Шишляков В. Ф., Шишляков Д. В. Синтез многосвязных систем автоматического управления во временной области // Изв. вузов. Приборостроение. 2007. Т. 50, № 12. С. 13—17.
5. Шишляков В. Ф., Цветков С. А., Шишляков Д. В. Синтез параметров непрерывных и импульсных многосвязных систем автоматического управления: Монография / Под. ред. В. Ф. Шишлякова. СПб: СПбГУАП, 2009.
6. Шишляков Д. В., Шишляков А. В. Синтез многосвязных электромеханических систем автоматического управления при аналитической аппроксимации характеристик нелинейных элементов // Автоматизированный электропривод и промышленная электроника: Тр. 6-й Всерос. науч.-практ. конф. / Под общ. ред. В. Ю. Островляничка. Новокузнецк: Изд-во СибГИУ, 2014. 340 с.
7. Шишляков В. Ф., Анисимова Е. В. Аппроксимация характеристик нелинейных звеньев систем автоматического управления торможением колес транспортных средств // Автоматизированный электропривод и промышленная электроника: Тр. 6-й Всерос. науч.-практ. конф. / Под общ. ред. В. Ю. Островляничка. Новокузнецк: Изд-во СибГИУ, 2014. 340 с.
8. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / Под ред. А. А. Воронова и И. А. Огурка. М.: Наука, 1984. 340 с.
9. Алгоритмы динамического синтеза нелинейных автоматических систем / Под ред. А. А. Воронова и И. А. Огурка. СПб: Энергоатомиздат, 1992. 334 с.
10. Шишляков В. Ф., Цветков С. А., Шишляков Д. В. Синтез параметров регуляторов систем автоматического управления: Свид. об отраслевой регистрации разработки № 11912, 08 дек. 2008 г. Отраслевой фонд алгоритмов и программ Министерства образования и науки РФ [Электронный ресурс]: <http://ofernio.ru/portal/search_rto5.php>.
11. Шишляков А. В., Шишляков Д. В. Алгоритм программного комплекса, реализующего обобщенный метод Галеркина для САУ различных классов // Завалишинские чтения'14: Сб. докл. СПб: ГУАП, 2014. 146 с.
12. Шишляков В. Ф., Анисимова Е. В. Аппроксимация характеристик нелинейных звеньев систем автоматического управления иррациональными функциями // Завалишинские чтения'14: Сб. докл. СПб: ГУАП, 2014. 146 с.
13. Чубраева Л. И., Шишляков А. В. Синтез электромеханических систем автоматического управления при аналитической аппроксимации характеристик нелинейных элементов // Информационно-управляющие системы. 2014. № 1. С. 2—8.
14. Шишляков В. Ф., Анисимова Е. В. Синтез параметров САУ при аппроксимации нелинейных характеристик иррациональной функцией обобщенным методом Галеркина // Завалишинские чтения'14: Сб. докл. СПб: ГУАП, 2014. 146 с.
15. Шишляков А. В. Синтез систем автоматического управления с аналитической аппроксимацией нелинейных характеристик // Завалишинские чтения'14: Сб. докл. СПб: ГУАП, 2014. 146 с.

Сведения об авторах**Владислав Федорович Шишляков**

— д-р техн. наук, профессор; СПбГУАП, кафедра управления в технических системах; E-mail: svfmail@yandex.ru

Елена Викторовна Анисимова

— СПбГУАП, кафедра управления в технических системах; ассистент; E-mail: elena-e-v-anisimova@ya.ru

- Андрей Владиславович Шишляков** — Концерн «НПО „АВРОРА“»; инженер-программист;
E-mail: shyshlakov@yahoo.com
- Дмитрий Владиславович Шишляков** — канд. техн. наук, доцент; СПбГУАП, кафедра электромеханики,
робототехники и технической физики;
E-mail: shishlakoff@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
управления в технических системах
СПбГУАП

Поступила в редакцию
22.04.15 г.

Ссылка для цитирования: Шишляков В. Ф., Анисимова Е. В., Шишляков А. В., Шишляков Д. В. Синтез параметров закона управления для нелинейных САУ при различных видах аппроксимации характеристик // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 9. С. 701—706.

**SYNTHESIS OF CONTROL LAW PARAMETERS
FOR NONLINEAR AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS
AT VARIOUS TYPES OF CHARACTERISTIC APPROXIMATION**

V. F. Shishlakov¹, E. V. Anisimova¹, A. V. Shishlakov², D. V. Shishlakov¹

¹ Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
190000, Saint Petersburg, Russia
E-mail: svfmail@yandex.ru

² Scientific and Production Concern „Aurora“,
194021, Saint Petersburg, Russia

A solution to the problem of synthesis of control law parameters for automatic control system is considered when characteristics of nonlinear elements are approximated by analytic and irrational functions. Inversion of direct variational analysis method (the generalized Galerkin method) is applied. Advantages of the viewed methods of nonlinearities approximation for ACS with smooth nonlinearities are demonstrated.

Keywords: analytical approximation, approximation by irrational functions, nonlinear characteristics, generalized Galerkin method.

Data on authors

- Vladislav F. Shishlakov** — Dr. Sci., Professor; SUAI, Department of Control in Technical Systems;
E-mail: svfmail@yandex.ru
- Elena V. Anisimova** — SUAI, Department of Control in Technical Systems; Assistant;
E-mail: elena-e-v-anisimova@ya.ru
- Andrey V. Shishlakov** — Scientific and Production Concern „Aurora“, Engineer-Programmer;
E-mail: shyshlakov@yahoo.com
- Dmitry V. Shishlakov** — PhD, Associate Professor; SUAI, Department of Electromechanics, Robototronics, and Technical Physics; E-mail: shishlakoff@yandex.ru

For citation: Shishlakov V. F., Anisimova E. V., Shishlakov A. V., Shishlakov D. V. Synthesis of control law parameters for nonlinear automatic control systems at various types of characteristic approximation // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroyeniye. 2015. Vol. 58, N 9. P. 701—706 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-701-706