

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАМИАННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ РАНЖИРОВАНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

С. А. АЛЕКСАНДРОВА, О. В. СЛИТА, А. В. УШАКОВ

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: o-slita@yandex.ru*

Рассматривается объект управления, описываемый матрицей состояния, содержащей неопределенные параметры. Актуальной задачей управления в условиях системных неопределенностей задания модели объекта является обеспечение инвариантности выхода системы к неопределенности параметров модели. Необходимое условие решения задачи — правильное распределение ресурсов управления подобными объектами. Для этого требуется при анализе исходного объекта управления произвести ранжирование неопределенных параметров по степени их влияния на выходную переменную системы. Ранжирование позволяет выявить параметры, к изменениям которых выходная переменная наиболее чувствительна. Предложены подходы к ранжированию, основанные на использовании грамианов управляемости каналов „сигнальное воздействие — выход объекта“ и „параметрическое воздействие — выход объекта“. Представлены два способа решения задачи ранжирования неопределенных параметров: с помощью вычисления сингулярных чисел грамианов управляемости и с помощью решения обобщенного характеристического уравнения. Предложен алгоритм ранжирования параметрических неопределенностей, основанный на рассматриваемых способах. Положения статьи иллюстрируются примером, в котором показаны идентичные результаты при использовании предлагаемых методов ранжирования.

Ключевые слова: параметрическая неопределенность, грамиан, ранжирование, обобщенное характеристическое уравнение, сингулярное число.

Введение. Задача обеспечения инвариантности выхода проектируемой системы к неопределенности параметров модели исходного объекта является в настоящее время одной из самых актуальных [1—8]. При наличии нескольких неопределенных параметров объекта возникает задача определения параметров, к изменениям которых наиболее чувствительна выходная переменная системы. Решением данной задачи является ранжирование неопределенных параметров.

Для количественной оценки структурных свойств систем управления целесообразно использование грамианов. Среди областей применения грамианов можно назвать уменьшение порядка матриц описания объекта [9], оценивание степени взаимосвязи входа и выхода объекта [10], оценивание затрат на управление при обеспечении желаемой структуры собственных значений [11]. В настоящей статье предлагается использовать грамианы управляемости для ранжирования неопределенных параметров объекта управления.

Постановка задачи. Рассмотрим непрерывный объект управления (далее — объект) с неопределенными параметрами. Предположим, что неопределенность физических параметров объекта может быть представлена неопределенностью параметров его матрицы состояния [12]:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + B(t), \quad x(t)|_{t=0} = x(0), \quad y(t) = Cx(t), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y \in R^m$ — векторы состояния, управления и выхода; $B \in R^{n \times r}$, $C \in R^{m \times n}$ — фиксированные матрицы управления и выхода; $A \in R^{n \times n}$ — матрица состояния; $\Delta A \in R^{n \times n}$ — неопределенность задания матрицы состояния.

Представим компонент $\Delta Ax(t)$ в декомпозированной форме:

$$\Delta Ax(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\Delta A_{11} \quad \Delta A_{12} \quad \dots \quad \Delta A_{1n}] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\Delta A_{21} \quad \Delta A_{22} \quad \dots \quad \Delta A_{2n}] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\Delta A_{n1} \quad \Delta A_{n2} \quad \dots \quad \Delta A_{nn}] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = D\eta(t). \quad (2)$$

Сформируем вектор параметрического воздействия:

$$\eta(t) = \text{col} \left\{ \eta_j = [\Delta A_{j1} \quad \Delta A_{j2} \quad \dots \quad \Delta A_{jn}] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = (\Delta A)^j x(t) \right\}, \quad (3)$$

где $(\Delta A)^j$ — j -я строка матрицы ΔA .

Используя левые сомножители слагаемых выражения (2), сформируем матрицу параметрического воздействия $D = \text{row} \left\{ D_j = [0_{(j-1) \times 1}; \quad 1; \quad 0_{(n-j) \times 1}]^T; \quad j = \overline{1, n} \right\}$. В зависимости от базиса представления матрицы состояния число матриц-столбцов D будет изменяться в пределах от 1 до n . Так, при задании объекта управления в каноническом управляемом базисе все параметрические воздействия будут описаны матрицей-столбцом $D = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T$.

Перепишем уравнения (1) с использованием матрицы D и вектора $\eta(t)$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D\eta(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t). \quad (4)$$

Согласно уравнению (4) объект имеет два входа: вход, заданный матрицей B , осуществляющий желаемое (полезное) управление состоянием и выходом объекта, и параметрический вход, заданный матрицей D , осуществляющий нежелательное влияние на состояние и выход объекта. Предположим, что матрица состояния объекта (1) представлена в произвольном базисе, объект обладает n неопределенностями и в каждой строке и каждом столбце матрицы состояния имеется только одна неопределенность. Тогда матрица

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad D \in R^{n \times n}.$$

Если ранг матрицы B меньше ранга матрицы D ($\text{rank } B < \text{rank } D$), то ранжирование неопределенностей позволит при синтезе закона управления правильно распределить ресурсы управления. Используем для ранжирования грамианы управляемости [13] двух каналов:

1) „сигнальное воздействие $u(t)$ — выход объекта $y(t)$ “ с передаточной функцией (матрицей) $\Phi_{yu}(s) = C(sI - A)^{-1} B$;

2) „параметрическое воздействие $\eta(t)$ — выход объекта $y(t)$ “ с передаточной функцией (матрицей) $\Phi_{y\eta}(s) = C(sI - A)^{-1}D$.

Грамиан управляемости 1-го канала имеет вид [14]

$$W_x(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

и является решением матричного уравнения

$$A W_x + W_x A^T = -B B^T,$$

которое позволяет найти грамиан управляемости по выходу

$$W_y = C W_x C^T. \quad (5)$$

Грамиан управляемости 2-го канала имеет вид

$$W_\eta(t) = \int_0^t e^{A\tau} D D^T e^{A^T \tau} d\tau$$

и является решением матричного уравнения

$$W_\eta: A W_\eta + W_\eta A^T = -D D^T.$$

Грамиан параметрической управляемости по выходу

$$W_{\eta y} = C W_\eta C^T. \quad (6)$$

Основной результат. Предложим два способа ранжирования неопределенностей.

Способ 1. Ранжирование параметрических неопределенностей с помощью сингулярных чисел грамианов управляемости — метод предварительного (экспресс) ранжирования неопределенных параметров. Ранжирование неопределенностей по степени их влияния на выход системы осуществляется с помощью сингулярных чисел грамианов управляемости (6) отношения „параметрическое воздействие $\eta(t)$ — выход объекта $y(t)$ “: максимальное сингулярное число грамиана будет соответствовать неопределенности, наиболее сильно влияющей на выход системы.

Способ 2. Ранжирование параметрических неопределенностей с помощью решения обобщенного характеристического уравнения грамианов „сигнальное воздействие $u(t)$ — выход объекта $y(t)$ “ и „параметрическое воздействие $\eta(t)$ — выход объекта $y(t)$ “ (более детальное решение задачи ранжирования неопределенных параметров). Используем грамианы (5) и (6) при принадлежности воздействий $u(t)$ и $\eta(t)$ единичной сфере: для сравнения результатов, получаемых для каждого из видов воздействий, векторы воздействий задаются как

$$u(t) = \eta(t) = z(t),$$

где z — некоторый вектор, принадлежащий единичной сфере.

Образует на введенных выше грамианах квадратичные формы $z^T W_{\eta y} z$ и $z^T W_y z$ и построим на их основе обобщенное отношение Рэлея [15], для которого оказывается справедливым оценочное неравенство

$$\mu_{\min} \leq \frac{z^T W_{\eta y} z}{z^T W_y z} \leq \mu_{\max}. \quad (7)$$

В обобщенном отношении Рэлея (7) скалярные положительные вещественнозначные постоянные μ_{\min} , μ_{\max} являются экстремальными элементами спектра решений обобщенного характеристического уравнения

$$\det(W_{\eta y} - \mu W_y) = 0. \quad (8)$$

Решая уравнение (8) относительно μ для каждой из неопределенностей исходного объекта и выделяя максимальный элемент μ_{\max} , можем сравнить их по степени влияния на выход проектируемой системы. Запишем алгоритм ранжирования параметрических неопределенностей с помощью грамианов управляемости.

Шаг 1. Сформировать описание объекта управления в форме (1).

Шаг 2. Сформировать матрицу D и вектор η .

Шаг 3. Сравнить ранг матрицы управления и количество неопределенностей и принять решение о необходимости ранжирования.

Шаг 4. Сформировать грамианы „сигнальное воздействие $u(t)$ — выход объекта $y(t)$ “ и „параметрическое воздействие $\eta(t)$ — выход объекта $y(t)$ “.

Шаг 5. В случае необходимости осуществить ранжирование неопределенностей с помощью способа 1 или способа 2.

Шаг 6. Определить, какие неопределенности наиболее сильно влияют на выход проектируемой системы.

Пример. Рассмотрим объект управления с параметрическими неопределенностями

$$A + \Delta A = A(q) = \begin{bmatrix} -0,7(1+q_1) & 0 \\ 1 & -0,2(1+q_1) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 1].$$

Вектор неопределенных параметров $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$: $|q_1|, |q_2| \leq 1$, номинальные значения

$q_{10} = q_{20} = 0$. Матрица параметрического воздействия $D = [D_1 \quad D_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, вектор пара-

метрического воздействия $\eta(t) = \begin{bmatrix} (\Delta A)^{(1)} \\ (\Delta A)^{(2)} \end{bmatrix} x(t)$. Ранг матрицы управления B равен 1, а ранг

матрицы параметрического воздействия D равен 2, следовательно, необходимо произвести ранжирование неопределенностей.

Грамиан „сигнальное воздействие $u(t)$ — выход объекта $y(t)$ “ для неопределенности ΔA_{11} равен $W_y(\Delta A_{11}) = 0,7738$, а для неопределенности ΔA_{22} — $W_y(\Delta A_{22}) = 0,7738$. Грамиан „параметрическое воздействие $\eta(t)$ — выход объекта $y(t)$ “ для неопределенности ΔA_{11} равен $W_{\eta y}(\Delta A_{11}) = 3,0952$, а для неопределенности ΔA_{22} — $W_{\eta y}(\Delta A_{22}) = 1$.

В соответствии со способом 1 необходимо произвести расчет сингулярных чисел грамианов: $S(W_{\eta y}(\Delta A_{11})) = 3,0592$, $S(W_{\eta y}(\Delta A_{22})) = 1$. Как видно из расчетов, неопределенность ΔA_{11} оказывает наибольшее влияние на выход объекта по сравнению с неопределенностью ΔA_{22} .

Воспользуемся способом 2. Для ΔA_{11} выражение (8) принимает вид $\det(W_{\eta y}(\Delta A_{11}) - \mu_1 W_y(\Delta A_{11})) = 0$. Решением данного уравнения является $\mu_1 = 4$. Для ΔA_{22} выражение (8) принимает вид $\det(W_{\eta y}(\Delta A_{22}) - \mu_2 W_y(\Delta A_{22})) = 0$. Решением данного уравнения является $\mu_2 = 1,3$. Способ 2 подтверждает результаты, полученные способом 1: неопределенность ΔA_{11} влияет на выход объекта сильнее, чем неопределенность ΔA_{22} .

Заключение. Предложены два метода ранжирования неопределенных параметров, основанные на анализе грамианов управляемости каналов „сигнальное воздействие — выход объекта“ и „параметрическое воздействие — выход объекта“.

Статья подготовлена по результатам работы, выполненной при поддержке Правительства Российской Федерации (грант 074-U01) и Министерства образования и науки РФ (проект 14. Z50.31.0031).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ackermann J.* Robust Control: The Parameter Space Approach. London: Springer-Verlag, 2002. 483 p.
2. *Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими объектами. СПб: Наука, 2000. 549 с.
3. *Tu Y., Ho M.* Robust second-order controller synthesis for model matching of interval plants and its application to servo motor control // IEEE Trans. Control Systems Technology. 2012. Vol. 20, N 2. P. 530—537.
4. *Moore R. E., Kearfott R. B., Cloud M. J.* Introduction to interval analysis // SIAM. 2009. 235 p.
5. *Datta A., Bhattacharyya S. P.* On a quantitative theory of robust adaptive control: an interval plant approach // IEEE Trans. on Automatic Control. 1996. Vol. 41, N 4. P. 570—574.
6. *Sezer M. E., Siljak D. D.* On stability of interval matrices // IEEE Trans. on Automatic Control. 1994. Vol. 39, N 2. P. 368—371.
7. *Chilali M., Gahinet P., Apkarian P.* Robust pole placement in LMI regions // IEEE Trans. on Automatic Control. 1999. Vol. 44, N 12. P. 2257—2270.
8. *Slita O. V., Ushakov A. V.* Median modal control of interval continuous-time plants // Proc. of the 6th Intern. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2014. P. 429—433.
9. *Li L., Petersen I. R.* A gramian-based approach to model reduction for uncertain systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2010. Vol. 55, N 2. P. 508—514.
10. *Aranz M. C., Birk W., Halvvarsson B.* Empirical approach to robust gramian-based analysis of process interactions in control structure selection // IEEE Conf. on Decision and Control, Piscataway, NJ, USA. 2011. P. 6210—6215.
11. *Бирюков Д. С., Слита О. В., Ушаков А. В.* Оценка затрат на управление в задаче обеспечения желаемой структуры мод и их робастности // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 11. С. 38—43.
12. *Слита О. В., Ушаков А. В.* Достаточные алгебраические условия параметрической инвариантности выхода линейной стационарной системы в первом приближении // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 6. С. 16—22.
13. *Wicks M. A., DeCarlo R. A.* An energy approach to controllability // IEEE Conf. on Decision and Control. 1988. Vol. 3. P. 2072—2077.
14. *Fairman F. W.* Linear Control Theory: The State Space Approach. John Wiley & Sons, 1998. 330 p.
15. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1973. 575 с.

Сведения об авторах

- Софья Александровна Александрова** — аспирант; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики; E-mail: alexandrova_sophie@mail.ru
- Ольга Валерьевна Слита** — канд. техн. наук, доцент; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики; E-mail: o-slita@yandex.ru
- Анатолий Владимирович Ушаков** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики; E-mail: ushakov-AVG@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
22.04.15 г.

Ссылка для цитирования: Александрова С. А., Слита О. В., Ушаков А. В. Использование грамианных технологий при ранжировании параметрических неопределенностей // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 9. С. 759—764.

APPLICATION OF GRAM METHOD FOR RANGING OF PARAMETRIC UNCERTAINTIES**S. A. Alexandrova, O. V. Slita, A V. Ushakov***ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia**E-mail: o-slita@yandex.ru*

The problem of output invariance of a closed-loop system with respect to uncertain parameters of the initial plant state matrix is considered. Two methods of uncertainties ranging by levels of influence on the closed-loop system output are proposed. The both methods use Gramians of the channels “control signal — plant output” and “parametric influence — plant output” controllability. An algorithm for parametric uncertainties ranging based on the methods is developed. An example demonstrating application of the methods is presented.

Keywords: parametric uncertainty, Gramian, ranging, singular values, generalized characteristic equation.

Data on authors

- | | | |
|------------------------------|---|--|
| Sophia A. Alexandrova | — | Post-Graduate Student; ITMO University; Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: alexandrova_sophie@mail.ru |
| Olga V. Slita | — | PhD, Associate Professor; ITMO University; Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: o-slita@yandex.ru |
| Anatoly V. Ushakov | — | Dr. Sci., Professor; ITMO University; Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: ushakov-AVG@yandex.ru |

For citation: *Alexandrova S. A., Slita O. V., Ushakov A V.* Application of Gram method for ranging of parametric uncertainties // *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie.* 2015. Vol. 58, N 9. P. 759—764 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-759-764