

УЧЕТ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС ЖИДКОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СИЛЬФОННЫХ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

А. С. КОЗЛОВ, Р. Я. ЛАБКОВСКАЯ, О. И. ПИРОЖНИКОВА, В. Л. ТКАЛИЧ

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: labkovskaya@mail.ifmo.ru*

Выполнен анализ присоединенных масс жидкости и частот колебаний сильфонных чувствительных элементов с учетом специфики их конфигурации и числа гофров. Построены математические модели динамики сильфонных чувствительных элементов устройств компенсаторного типа, применяемых в системах управления. Работы в вязких средах требуют введения присоединенных масс в уравнения динамики этих элементов. Анализ динамики сильфонных чувствительных элементов базируется на методе плоских сечений, введении поправки на пространственное обтекание гофра сильфона и переходе к системе с сосредоточенными параметрами. Корректность разработанных математических моделей подтверждена путем сравнения расчетных значений с данными экспериментальных исследований. Установлено, что полученные математические модели расчета присоединенных масс при внешнем обтекании требуют ввода поправочного коэффициента, величина которого зависит от конкретной конфигурации гофра (тороидальной или тарельчатой).

Ключевые слова: *сильфонный чувствительный элемент, присоединенная масса, цилиндрическая оболочка, гофр, математическая модель.*

Сильфонные чувствительные элементы (СЧЭ) работают как в жидких, так и в газовых средах. В этой связи разработка математического аппарата описания характера взаимодействия параметров вязкой среды с динамическими характеристиками СЧЭ является крайне актуальной задачей. В уравнениях, описывающих динамику движения СЧЭ в вязкой среде и инерциальные свойства жидкости, используются коэффициенты присоединенных масс [1—8]. Анализ патентной и научно-технической литературы показал, что к настоящему времени не разработана корректная модель расчета присоединенных масс [9, 10].

Так как уравнения динамики СЧЭ включают матрицы масс, составляемые с учетом присоединенных масс жидкости или газа, необходимо рассчитать коэффициенты присоединенных масс для случаев односторонней и двусторонней заделки СЧЭ.

Анализ динамики продольных колебаний в случае двусторонней заделки СЧЭ с учетом внутреннего обтекания целесообразно осуществлять с помощью модели с сосредоточенными параметрами, представленной на рис. 1 ($m_1—m_8$, $C_1—C_{10}$, $k_1—k_{10}$ — эквивалентные параметры массы, жесткости и коэффициенты затухания). Динамическая модель одногофрового СЧЭ (рис. 2, здесь η — вязкость среды) с учетом внутреннего трения представляется уравнением [3, 11, 12]:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = F_0 \sin(\omega t + \theta), \quad (1)$$

где m — масса СЧЭ, $C=2C'$, C' — жесткость полугофра, θ — фазовый угол вихря относительно смещения гофра, ω — угловая скорость вращения СЧЭ, F_0 — возбуждающая сила, описываемая выражением:

$$F_0 = \frac{1}{2} k S_r \rho_{ж} V_{ж}^2,$$

в котором $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости, k — коэффициент пропорциональности, $S_{\text{г}} = \pi b_{\text{г}}$ — площадь внутреннего сечения гофра, $V_{\text{ж}}$ — средняя скорость жидкости, D — диаметр СЧЭ, $b_{\text{г}}$ — ширина гофра.

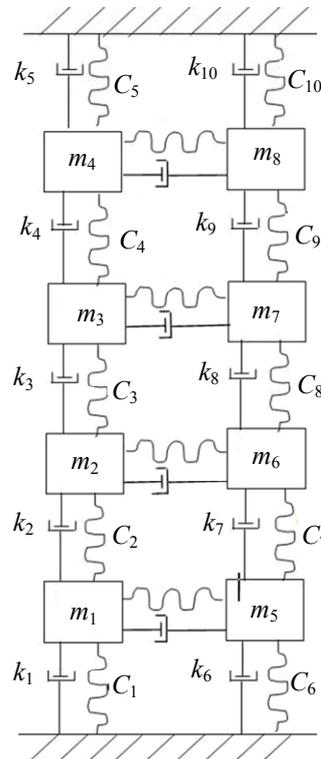


Рис. 1

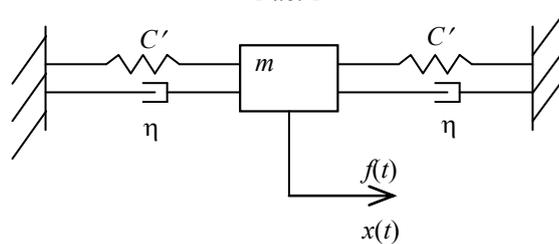


Рис. 2

Преобразовав уравнение (1), получим следующую систему:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) x_0 = \frac{F_0}{k} \cos \theta, \\ b\omega x_0 = F_0 \sin \theta, \end{cases}$$

где $\omega_1 = \left(\frac{C}{m}\right)^{1/2}$, x_0 — амплитуда колебаний оболочки, ω — собственная частота СЧЭ.

Рассмотрим случай внешнего обтекания СЧЭ при условии двусторонней заделки его торцов, при этом элемент описывается цилиндрической оболочкой конечной длины. Присоединенную массу цилиндрической оболочки можно определить энергетическим методом, путем введения коэффициента ν , который учитывает влияние присоединенной массы на собственную частоту [13—15]. Коэффициент ν задается уравнением вида:

$$\nu = \frac{\omega_{\text{об}}}{\omega_{\text{ож}}} = \sqrt{1 + \frac{m_{\text{ж}}}{m_0}} = \sqrt{1 + \frac{T_{\text{ж}}}{T_0}}, \quad (2)$$

где $\omega_{\text{об}}$ — собственная частота оболочки в воздушной среде, $\omega_{\text{ож}}$ — собственная частота оболочки в жидкой среде, $m_{\text{ж}}$ — удельная присоединенная масса жидкости, m_0 — масса

единичной площади оболочки, $T_{ж}$ — кинетическая энергия жидкости, T_0 — кинетическая энергия оболочки.

На основании выражения (2), а также уравнений для кинетической энергии жидкости и оболочки выведем следующую формулу [13, 15]:

$$v^2 = \frac{\omega_{об}^2}{\lambda^2} = \frac{r_0(\rho_0 b_0 + \mu r_0 \rho_{ж})}{\rho_0 b_0 r_0} = 1 + \mu \frac{r_0 \rho_{ж}}{\rho_0 b_0}, \quad (3)$$

где безразмерный коэффициент присоединенной массы оболочки

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{n_0^2 + \gamma^2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{2(n_0^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right)},$$

r_0 — радиус оболочки, $\gamma = \frac{n_{пп} \pi r_0}{l_0}$, $n_{пп}$ — число продольных полуволн, l_0 — длина оболочки,

n_0 — число волн вдоль окружности оболочки, b_0 — толщина оболочки, ρ_0 — плотность оболочки.

Присоединенную массу, приходящуюся на единицу площади оболочки, представим в виде:

$$m_{ж} = \mu r_0 \rho_{ж}. \quad (4)$$

Формула (2) выведена с учетом одностороннего обтекания СЧЭ. Когда жидкость находится с двух сторон оболочки, величину присоединенной массы необходимо удваивать.

При расчете присоединенной массы СЧЭ с гофрами за толщину оболочки необходимо принимать [1]:

$$b'_0 = b_0 + \frac{n_{г} S_{г}}{l_0},$$

где $n_{г}$ — число гофров; $S_{г}$ — площадь сечения гофра.

В случае рассмотрения осесимметричных форм колебания СЧЭ присоединенная масса может быть определена из выражения:

$$m_{ж} = \frac{2r_0 \rho_{ж}}{2\gamma + 1}.$$

Для анализа присоединенной массы при осесимметричных формах колебаний СЧЭ представляется целесообразным разбить сложнопрофильную оболочку СЧЭ на три части: цилиндрические большего I и меньшего диаметра II и „крепежную“ часть III (рис. 3), присоединенные массы которых рассчитываются по известным формулам [3, 15, 16].

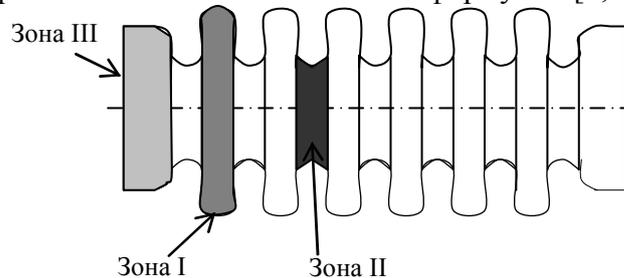


Рис. 3

Присоединенная масса $m_{пр}$ СЧЭ в случае осесимметричных форм колебаний представляется выражением [3, 15]:

$$m_{пр} = m_{прI} S_{вI} n_{г} + m_{прII} S_{вII} (n_{г} + 1) + m_{прIII} S_{кр} 2,$$

где $m_{\text{прI}}, m_{\text{прII}}, m_{\text{прIII}}$ — соответственно единичные присоединенные массы I, II, III частей, $S_{\text{в}}, S_{\text{вп}}, S_{\text{кр}}$ — соответственно площади вершин, впадин и крепежной части СЧЭ.

Анализ присоединенной массы СЧЭ для случая кососимметричных форм колебаний оболочки осуществляется по формуле (4) с учетом (3).

Для большого числа гофров модель свободных колебаний СЧЭ при двусторонней заделке торцов аналогична модели продольных колебаний гибкого стержня [3]:

$$\omega_{\text{п}} = n_{\text{г}} \pi \left(\frac{C}{m + m_{\text{ж}}} \right)^{1/2},$$

где C — жесткость СЧЭ.

При малом числе гофров аналогия гибкого стержня некорректна, так как частоты гофр распределяются неравномерно. В этом случае необходимо осуществлять переход к системе с сосредоточенными параметрами. Выражение для расчета присоединенной массы малозвенного СЧЭ при малых значениях высоты гофра $h_{\text{г}}$ имеет вид:

$$m_{\text{ж}} = \frac{\pi}{2} \rho_{\text{ж}} D h_{\text{г}} (2r_{\text{г}} - L N_{\text{п}}),$$

где $N_{\text{п}}$ — число слоев металла в сильфоне, $r_{\text{г}}$ — средний радиус внешнего или внутреннего закругления гофра, L — расстояние между центрами радиусов закруглений.

В случае больших значений $h_{\text{г}}$, при которых поведение жидкости сопровождается эффектами вдавливания жидкости в гофры СЧЭ и выдавливанием ее обратно:

$$m_{\text{ж}} = \frac{\pi D \rho_{\text{ж}} h_{\text{г}}^3}{3b_{\text{г}}},$$

Экспериментальные исследования динамики ряда СЧЭ в жидких средах подтвердили корректность полученных в работе математических моделей. В общем случае погрешность расчета не превышала 5—7 % [17], при малом значении $m_{\text{ж}}$ погрешность не превышала 1—1,5%. Погрешность возрастает при $m_{\text{ж}} \sim m$, а также при нестандартных формах гофра.

Таким образом, проведенный авторами статьи анализ динамики СЧЭ в вязких средах показал необходимость ввода поправочного коэффициента на пространственное обтекание, величина которого $\nu = 0,1—0,3$ зависит от конфигурации гофра. Нижняя граница диапазона величин поправочных коэффициентов соответствует тороидальной форме гофра СЧЭ, а верхняя — тарельчатой форме сварных СЧЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лабковская Р. Я., Лысов А. Л., Коробейников А. Г. Разработка математической модели расчета тонкостенных упругих чувствительных элементов систем управления // Сб. матер. Всерос. науч.-практ. конф. с международным участием „Информационные технологии в профессиональной деятельности и научной работе“. Йошкар-Ола: ПГТУ, 2013. Т. 1. С. 176—183.
2. Лабковская Р. Я., Нечаева Н. В., Пирожникова О. И. Анализ жесткости УЧЭ датчиков и микроакселерометров систем управления // Матер. VII Всерос. межвузовской конф. молодых ученых. 2010. С. 195.
3. Лабковская Р. Я., Пирожникова О. И., Ткалич В. Л. Анализ присоединенных масс упругих чувствительных элементов ртутных герконов // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55, № 7. С. 32—35.
4. Лабковская Р. Я., Пирожникова О. И., Ткалич В. Л. Метод повышения надежности упругих чувствительных элементов систем управления и автоматики // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2011. № 1(71). С. 136—138.
5. Лабковская Р. Я. Метрология и электрорадиоизмерения. СПб: НИУ ИТМО, 2013. 140 с.

6. Лабковская Р. Я. Моделирование статики и динамики элементной базы // Альманах науч. работ молодых ученых НИУ ИТМО. 2012. С. 331—334.
7. Янютин Е. Г., Кучерова Н. И. Определение влияния сосредоточенного нестационарного воздействия на мембрану-полосу // Вестник ХНАДУ. 2006. Вып. 32. С. 80—83.
8. Янютин Е. Г., Егоров П. Е. Нестационарные колебания мембраны с присоединенными массами // Вестник ХНАДУ. 2012. Вып. 56. С. 75—79.
9. Лабковская Р. Я., Ткалич В. Л., Пирожникова О. И. Разработка библиотеки конечных элементов для САПР упругих конструкций герконов // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56, № 3. С. 21—24.
10. Лабковская Р. Я. Разработка математических моделей упругих чувствительных элементов систем управления // Аннотированный сборник научно-исследовательских выпускных квалификационных работ магистров НИУ ИТМО. 2011. С. 97—98.
11. Лабковская Р. Я. Исследование статики и динамики мембранных и пластинчатых электромеханических элементов систем управления // Сб. докл. конгр. молодых ученых. СПб: НИУ ИТМО, 2014. Вып. 1. С. 202—203.
12. Лабковская Р. Я. Исследование статики и динамики оболочечных упругих элементов систем управления // 16-я Санкт-Петербургская Ассамблея молодых ученых и специалистов. СПб, 2011. С. 114.
13. Лабковская Р. Я., Ткалич В. Л. Библиотека конечных элементов в приложении к упругим чувствительным элементам пластин и мембран датчиков систем управления // Научная перспектива. 2010. № 3—4. С. 86—89.
14. Лабковская Р. Я. Исследование напряженно-деформированного состояния сильфонных упругих элементов систем управления // Альманах научных работ молодых ученых НИУ ИТМО. 2012. С. 142—144.
15. Лабковская Р. Я., Пирожникова О. И. Сильфонные упругие элементы систем управления // Сб. докл. конгр. молодых ученых. 2012. Вып. 1. С. 163—165.
16. Лабковская Р. Я., Нечаева Н. В., Пирожникова О. И. Математические модели чувствительных элементов линейного акселерометра в динамическом режиме // Сб. докл. VIII Всерос. межвуз. конф. молодых ученых. 2011. Вып. 1. С. 138—139.
17. Лабковская Р. Я., Ткалич В. Л. Обработка результатов технических измерений. СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. 72 с.

Сведения об авторах

- | | |
|-----------------------------------|---|
| Алексей Сергеевич Козлов | — аспирант; Университет ИТМО; кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем; E-mail: studsovet_itmo@mail.ru |
| Римма Яновна Лабковская | — канд. техн. наук; ИТМО; кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем; E-mail: labkovskaya@mail.ifmo.ru |
| Ольга Игоревна Пирожникова | — канд. техн. наук; Университет ИТМО; кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем; E-mail: studsovet_itmo@mail.ru |
| Вера Леонидовна Ткалич | — д-р техн. наук, профессор; ИТМО; кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем; E-mail: studsovet_itmo@mail.ru |

Рекомендована кафедрой
проектирования и безопасности
компьютерных систем

Поступила в редакцию
06.07.15 г.

Ссылка для цитирования: Козлов А. С., Лабковская Р. Я., Пирожникова О. И., Ткалич В. Л. Учет присоединенных масс жидкости в математических моделях сильфонных чувствительных элементов систем управления // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 12. С. 1016—1021.

TAKING ACCOUNT FOR ASSOCIATED MASSES OF FLUID IN MATHEMATICAL MODELS OF BELLOWS SENSING ELEMENTS OF CONTROL SYSTEMS

A. S. Kozlov, R. Ya. Labkovskaya, O. I. Pirozhnikova, V. L. Tklich

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia

E-mail: labkovskaya@mail.ifmo.ru

Analysis of associated masses of fluid and oscillation frequencies of bellows sensing elements with the account for their specific configuration and number of corrugations is carried out. Mathematical models of bellows sensing elements dynamics in compensatory devices of the type used in control systems applied in viscous environment requiring introduction of associated masses in corresponding dynamic equations are developed. The consideration of the bellows sensing element dynamics is based on the flat sections method; amendment to the spatial flow of the corrugation of the bellows is introduced, and transition to a system with lumped parameters is performed. Correctness and adequacy of the developed mathematical models are confirmed by comparison of calculated values with the data of experiments performed with specially designed test bench to study the associated masses of fluid with various viscosity for a number of bellows sensing elements. It is shown that the developed mathematical models and methods of calculation of associated masses under external flow calls for introduction of a correcting factor depending on the specific configuration of the corrugation of the bellows (toroidal or disc-like).

Keywords: bellows sensing element, associated mass, cylindrical shell, convolute, mathematical model.

Data on authors

- | | | |
|------------------------------|---|---|
| Aleksei S. Kozlov | — | Post-Graduate Student; ITMO University, Department of Computer System Design and Security; E-mail: studsovet_itmo@mail.ru |
| Rimma Ya. Labkovskaya | — | PhD; ITMO University, Department of Computer System Design and Security; E-mail: labkovskaya@mail.ifmo.ru |
| Olga I. Pirozhnikova | — | PhD; ITMO University, Department of Computer System Design and Security; E-mail: studsovet_itmo@mail.ru |
| Vera L. Tklich | — | Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Computer System Design and Security; E-mail: studsovet_itmo@mail.ru |

For citation: Kozlov A. S., Labkovskaya R. Ya., Pirozhnikova O. I., Tklich V. L. Taking account for associated masses of fluid in mathematical models of bellows sensing elements of control systems // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie. 2015. Vol. 58, N 12. P. 1016—1021 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-12-1016-1021