УДК 621.391
DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-1-32-37

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО КВАНТОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ГАРАНТИРОВАННЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ ЗОН ВЛИЯНИЯ ОБЪЕМНЫХ КВАНТОВ

В. А. Смагин, И. Ю. Парамонов

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, 197198, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ivan_paramonov@mail.ru

Предложена модель оптимального трехмерного вероятностного квантования детерминированного или случайного объемного пространства совокупностью равных квантов, при котором вероятность представления квантуемого пространства достигает максимального значения. Величина оптимального кванта определяется распределением его зоны влияния, значениями граничной гарантированной вероятности и степенью влияния. Приведена модель оценивания количества информации в пространстве квантования.

Ключевые слова: *объемное пространство, оптимальное квантование, зона влияния кванта, распределение, вероятностей, гарантированная вероятность, степень влияния, оценивание количества информации.*

Введение. Первые основополагающие результаты решения класса задач оптимального квантования случайной величины были получены в работах [1, 2]. Задача учета ценности информации решена в работе [1], где оптимизируемая функция представлена в виде математического ожидания величины потерь:

$$\Psi(x)=\int\limits_0^\infty [x(E(z/x)+1)-z]dF(z)+cJ+C,\;\; J=\int\limits_0^\infty E(z/x)dF(z),$$

здесь x, c — величина кванта и величина интервала между квантами; $E(\alpha)$ — целая часть числа α; $F(z)$ — функция распределения квантуемой случайной величины z, имеющей конечное математическое ожидание; C = const; первое слагаемое — средние потери, вызванные искажением значения z в результате квантования, второе слагаемое — потери при использовании неполного количества информации J.

В работе [2] минимизируемая функция квантуемой величины (с учетом результатов работы [1]) представлена в виде

$$\Psi(x)=(x+c)\int\limits_0^\infty (E(z/x)+1)dF(z)\,.$$

Преимущества рассмотренного в работе [2] подхода, по сравнению с [1], заключаются в предложенной авторами простой его физической иллюстрации и разработке строгого алгоритма целочисленного решения задачи. Эта концепция использована в работе [3] для оценивания вероятности успешной передачи квантованной информации в условиях противодействия второй стороны. Простые задачи квантования синтаксической и семантической информации рассмотрены также в работе [4].

В настоящей статье решается задача квантования информации в трехмерном пространстве. Для покрытия квантуемого пространства введена вероятностная целевая функция и определено ее максимальное значение. Это позволяет достичь максимального эффекта при сборе необходимой информации в квантуемой области пространства.

Более детально, в трехмерном информационном пространстве предполагается размещение центров сбора информации с одинаковыми зонами обслуживания (зонами влияния). В середине зоны вероятность сбора информации имеет максимальное значение, а по мере удаления от центра вероятность монотонно убывает, при этом закономерность убывания одинакова по трем осям. Плотность вероятности, кроме постоянного максимального значения, также характеризуется среднеквадратическим отклонением (СКО). Все центры сбора информации располагаются в пространстве строго горизонтально и вертикально на параллельных линиях, примыкая друг к другу. Зоны влияния пересекаются таким образом, чтобы между шестью соседними зонами, расположенными вокруг отдельной зоны, не было не охваченной их влиянием части пространства. Размах зон влияния определяется некоторой граничной вероятностью гарантированного сбора информации. Задавая значение граничной вероятности и изменяя степень влияния центра (СКО), можно найти такую плотность вероятности влияния центра, при которой вероятность сбора информации в ограниченном пространстве достигнет максимального значения.

Определение плотности вероятности влияния центра, количества зон влияния и значений их параметров, при которых достигается максимальная вероятность сбора информации в заданном объемном пространстве, и является предметом исследования в настоящей статье.

Обоснование существования максимума вероятности. Предположим, что параметр, характеризующий степень влияния центра, — СКО трехмерной плотности вероятности — достаточно мал. При этом условии необходимо разместить в пространстве большое количество центров сбора. Это приведет к тому, что суммарные потери для всех центров сбора вследствие неиспользуемых объемов зон влияния из-за введения границ будут достаточно велики. С другой стороны, при введении дополнительных центров сбора информации на периферии пространства потери, вызванные выходом зоны влияния за его пределы, будут сравнительно небольшими.

Предположим далее, что значение СКО достаточно велико. Рассуждая аналогично вышеизложенному, приходим к выводу, что величина суммарных потерь будет определяться в основном потерями, вызванными неиспользуемыми объемами зон влияния дополнительно введенных центров.

Эта противоречивая ситуация при определении суммарных объемных потерь при сборе информации и является основанием для существования оптимального решения. При этом можно найти такое число центров сбора, при котором вероятность охвата определенного по величине пространства будет достигать максимального значения.

Математическая формализация задачи квантования. Пусть известна совокупность плотностей вероятностей сбора данных в пределах зон влияния: $f(x, y, z, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — СКО. В дальнейшем (с целью упрощения изложения) будем полагать, что трехмерная плотность вероятности может быть представлена в виде произведения трех одинаковых одномерных плотностей с математическими ожиданиями M и СКО σ. Это означает, что одномерные случайные величины независимы и имеют одинаковые параметры. Тогда формализация сведется к рассмотрению только одной плотности вероятности $f(x, \sigma)$. Предусмотрим общую граничную вероятность q, определяющую размер зоны влияния — квант. Чем меньше величина q, тем больше размер зоны влияния, но, с другой стороны, тем меньше степень влияния центра сбора на границе кванта. Квант представляется кубом с ребром $2(m-r)$, где m — математическое ожидание начального размера зоны влияния, r — интервал от начала координат до границы зоны влияния, иными словами, интервал, односторонне ограничивающий размер кванта по любой из трех координат. Значение r определяется при заданной вероятности q исходя из уравнения

$$q=\left(\int_0^r C_\sigma f(z,\sigma)dz\right)^3, \tag{1}$$

где C_σ — константа нормирования плотности вероятности при заданном значении СКО.

Тогда вероятность попадания случайной величины в поле кванта определяется как

$$p(r,\sigma)=\left(\int_r^{2m-r} C_\sigma f(z,\sigma)dz\right)^3. \tag{2}$$

Выражение (2) справедливо только при условии, что распределение в поле кванта является шаровым. При необходимости может быть записано выражение и для эллипсоидного распределения.

Далее представим размеры пространства, на котором должен производиться сбор необходимой информации. Предположим, что это пространство имеет вид прямоугольника со сторонами X,Y,Z, представленными детерминированными величинами. Тогда необходимое число квантов, расположенных вдоль сторон X,Y,Z, будет соответственно равно

$$E\left[\frac{X}{2(m-r)}\right]+1,\ \ E\left[\frac{Y}{2(m-r)}\right]+1,\ \ E\left[\frac{Z}{2(m-r)}\right]+1. \tag{3}$$

Вероятность покрытия объема пространства квантами центров сбора информации может быть определена следующим выражением:

$$P_{XYZ}(q,\sigma)=\left[\int_r^{2m-r} C_\sigma f(z,\sigma)dz\right]^{3\left\{\left\{E\left[\frac{X}{2(m-r)}\right]+1\right\}\left\{E\left[\frac{Y}{2(m-r)}\right]+1\right\}\left\{E\left[\frac{Z}{2(m-r)}\right]+1\right\}\right\}}. \tag{4}$$

Если величины X,Y,Z являются случайными, вероятность (4) представляется в виде

$$P_{XYZ}(q,\sigma)=$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_r^{2m-r} C_\sigma f(u,\sigma)du\right]^{3\left\{\left\{E\left[\frac{X}{2(m-r)}\right]+1\right\}\left\{E\left[\frac{Y}{2(m-r)}\right]+1\right\}\left\{E\left[\frac{Z}{2(m-r)}\right]+1\right\}\right\}} dF_X(x)dF_Y(y)dF_Z(z), \tag{5}$$

где $F_X(x), F_Y(y), F_Z(z)$ — функции распределений размеров сторон прямоугольника.

Пример 1. В качестве объектной реализации рассматриваемой задачи можно представить водоем ограниченного размера, в котором находится опасный предмет. Требуется определить, сколько центров обнаружения этого предмета нужно предусмотреть и как их расположить, чтобы с максимальной вероятностью получить сведения о месте его нахождения. Технические характеристики центра известны и могут изменяться в некоторых пределах. Все три одномерные координаты зоны влияния описываются плотностью вероятности с нормальным распределением:

$$f(x,\sigma)=(C_\sigma/\sqrt{2\pi}\cdot\sigma)\exp(-(x-M)^2/2\sigma^2),$$

где M=30, а параметр σ может изменяться в некоторых пределах.

Примем величину граничной гарантированной вероятности $q=0{,}00000001$, а пространство сбора информации представим кубом со стороной $X=100$. Требуется найти значения всех параметров квантования при условии, что вероятность сбора информации в указанном пространстве достигает максимального значения.

Решение. Зададим некоторое значение σ из области допустимых. Из уравнения (1) находим значение для наименьшей границы r кванта. Определим величину ребра кванта по формуле $2(m-r)$ при условии симметричности кривой плотности вероятности относительно математического ожидания. Находим вероятность p по формуле (2) и подставляем в выражение (4), в результате вычисляем значение вероятности $P_{XYZ}(q,\sigma)$.

Поступая подобным образом для других значений σ из диапазона возможных, находим значения всего множества вероятностей $P_{XYZ}(q,\sigma)$ и выбираем из этого множества значение, которое является максимальным. Затем определяем значения всех необходимых параметров, сопутствующих решению задачи оптимизации.

При заданных условиях примера для $q = 0,00000001$ получаем (индекс „0“ у символов параметров означает их принадлежность оптимальному решению): $n_0 = 8$, $p_0 = 0,986$, длина ребра кванта $l = 50,04$, $\max P_{XYZ}(q,\sigma) = P_0 = 0,893$, $\sigma_0 = 8,92\ldots 8,98$, $r_0 = 4,98$, $C_0 = 1$.

Проверка правильности решения примера осуществлялась путем сравнения суммарного объема, охватываемого n_0 квантами, с заданным объемом.

Итак, результатом решения задачи является следующее: необходимо иметь восемь квантов, образующих кубическую структуру с двумя квантами в любом ее ребре, полностью охватывающую заданный объем пространства и обеспечивающую выполнение цели с вероятностью P_0.

Пример 2. В условиях оптимального квантования, рассмотренных в примере 1, предположим, что в пространстве размером $X \times Y \times Z$ с длиной ребер $X = Y = Z = 100$ распределен в виде пространственной взвеси некоторый продукт. Количество продукта (в соответствии с координатной сеткой пространства) определяется выражением

$$W(x,y,z) = xyz + \left[\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{3} + \frac{(z-4)^2}{4}\right].$$

Используя результаты, полученные в примере 1, определим среднее количество продукта, попадающего в поле каждого из восьми квантов, а также среднее суммарное количество продукта в области квантования.

Обозначим среднее количество продукта для i,j,k-го кванта символом D_{ijk}. Индексы i,j,k могут принимать значения только „0“ или „1“. Например, величину D_{101} следует определить как

$$D_{101} = \int\limits_{2m-r_0}^{4m-3r_0} f_Z(z) \int\limits_{r_0}^{2m-r_0} f_Y(y) \int\limits_{2m-r_0}^{4m-3r_0} W(x,y,z) f_X(x)\,dxdydz\,.$$

В данном выражении все плотности вероятности одинаковы и равны

$$f(x) = \frac{C_0}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_0}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_0^2}\right].$$

Вычислив все D_{ijk}, получим следующие численные значения среднего количества продукта:

$$D_{000} = 2,746\cdot 10^4;\ D_{001} = 136,764;\ D_{010} = 3,395\cdot 10^{-3};\ D_{011} = 0,681;\ D_{100} = 136,764;\ D_{101} = 0,684;$$
$$D_{110} = 0,681;\ D_{111} = 3,395\cdot 10^{-3}.$$

Суммарное значение среднего количества продукта определяется как $D = \sum\limits_{ijk=0}^{1,1,1} D_{ijk}$ и равно $2,787\cdot 10^4$. Для его проверки вычислим D по формуле

$$D = \int\limits_{r_0}^{4m-3r_0} f_Z(z) \int\limits_{r_0}^{4m-3r_0} f_Y(y) \int\limits_{r_0}^{4m-3r_0} W(x,y,z) f_X(x) dxdydz = 2,774 \cdot 10^4 ,$$

откуда следует, что погрешность вычисления относительно предшествующего значения D составляет примерно $0,5\,\%$.

Заключение. Важными факторами, определяющими возможность оптимального вероятностного квантования в трехмерном пространстве, являются введение граничной гарантированной вероятности и учет степени влияния, что подтверждается примером решения задачи квантования.

Получено выражение для показателя целевой функции квантования — вероятности покрытия квантуемого объема в пространстве. Приведена модель оценивания среднего количества информации при квантовании и пространства заданного размера.

Рассмотренные вопросы квантования в трехмерном пространстве могут найти различные практические приложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гришанин Б. А.* Учет ценности информации в теории ценности информации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1967. № 2.

2. *Андронов А. М., Бокоев Т. Н.* Оптимальное в смысле заполнения квантование информации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 3. С. 154—158.

3. *Смагин В. А.* Оптимальное квантование информации // Изв. вузов. Приборостроение. 2002. Т. 45, № 5. С. 10—14.

4. *Смагин В. А., Лавров Р. О.* Модели оптимального в смысле заполнения квантования синтаксической и семантической информации // Тр. ВКА им. А. Ф. Можайского. 2012. № 636. С. 63—70.

Сведения об авторах

Владимир Александрович Смагин — д-р техн. наук, профессор; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра метрологического обеспечения; E-mail: va_smagin@mail.ru

Иван Юрьевич Парамонов — канд. техн. наук, докторант; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра метрологического обеспечения; E-mail: ivan_paramonov@mail.ru

Рекомендована кафедрой метрологического обеспечения

Поступила в редакцию 02.02.15 г.

Ссылка для цитирования: *Смагин В. А., Парамонов И. Ю.* Модель оптимального вероятностного квантования информации в пространстве с гарантированным ограничением зон влияния объемных квантов // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 1. С. 32—37.

MODEL OF OPTIMAL PROBABILISTIC QUANTIZATION OF INFORMATION IN THE SPACE WITH GUARANTEED RESTRICTION OF VOLUME QUANTUM INFLUENCE ZONE

V. A. Smagin, I. Yu. Paramonov

A. F. Mozhaysky Military Space Academy, 197198, St. Petersburg, Russia
E-mail: ivan_paramonov@mail.ru

A model is proposed of optimal three-dimensional likelihood quantization of determined or random volume space by a set of equal quanta for which the probability of the quantized space representation reaches its maximum. The size of optimum quantum is determined by distribution of its zone of influence, boundary values of guaranteed probability, and an influence range parameter. A model for estimation of information quantity in the quantization space is presented.

Keywords: volume space, optimum quantization, zone of influence of quantum, distribution of probabilities, guaranteed probability, influence parameter, estimation of quantity of the information.

Data on authors

Vladimir A. Smagin — Dr. Sci., Professor; A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Metrological Support; E-mail: va_smagin@mail.ru

Ivan Yu. Paramonov — PhD, Doctoral Cand.; A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Metrological Support; E-mail: ivan_paramonov@mail.ru

For citation: *Smagin V. A., Paramonov I. Yu.* Model of optimal probabilistic quantization of information in the space with guaranteed restriction of volume quantum influence zone // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie. 2016. Vol. 59, N 1. P. 32—37 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-1-32-37