ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

УДК 62-50
DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-2-107-112

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ СО СТАТИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ

А. И. Коршунов

Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ „Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова“, 198514, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Описание линейной непрерывной части дискретной системы в фазовом пространстве, одной из координат которого является ее выходной сигнал, получено линейным невырожденным преобразованием с матрицей наблюдаемости. Исходным служит описание непрерывной части в естественном фазовом пространстве, полученное разбиением передаточной функции непрерывной части на две, у первой из которых единице равен числитель, а у второй — знаменатель. При выполнении преобразования использовано тождество, представляющее матрицу наблюдаемости в виде полинома по степеням матрицы системы (матрицы Фробениуса) с коэффициентами числителя передаточной функции непрерывной части. Приведен пример, подтверждающий корректность предложенного способа.

Ключевые слова: *непрерывная часть, векторно-матричное дифференциальное уравнение, статический преобразователь*

Введение. Большинство устройств современной силовой полупроводниковой техники (статические полупроводниковые преобразователи) с точки зрения теории автоматического управления являются нелинейными дискретными элементами. К ним относятся импульсные преобразователи постоянного и переменного тока, управляемые выпрямители, автономные инверторы с широтно-импульсной модуляцией и другие устройства [1—3]. Применение таких устройств на практике основано на использовании „полезной“ составляющей выходных импульсов, изменяющейся в зависимости, например, от длительности импульсов в широтно-импульсных преобразователях или от фазы в управляемых выпрямителях. Помимо полезной составляющей в выходном напряжении этих устройств содержатся вредные, но неизбежные высокочастотные пульсации. При достаточно высокой частоте коммутации в этих устройствах пульсации фазовых координат систем автоматического управления (например, электроприводов, импульсных стабилизаторов напряжения и др.) оказываются пренебрежимо малыми. Это дает основание рассматривать рассчитываемые реальные дискретные системы как непрерывные, используя, например, их предельную непрерывную модель [4], построенную в предположении бесконечной частоты коммутации и отсутствия пульсаций фазовых координат.

Однако при реальной конечной частоте коммутации возможны нежелательные проявления импульсного характера управления, например субгармонические автоколебания [5—8], чаще всего проявляющиеся при малоинерционных нагрузках преобразователей, например, в контурах регулирования тока. Обычно субгармонические автоколебания являются следствием нарушения условий устойчивости реальной нелинейной дискретной системы.

Анализ устойчивости систем с импульсными преобразователями обычно проводят по канонической схеме дискретной системы (рис. 1, где ДЭ — дискретная модель силового полупроводникового устройства, $W_{НЧ}(p)$ — передаточная функция линейной непрерывной части, НЧ). Анализ устойчивости системы, представленной на рис. 1, проводят, используя описание непрерывной части в фазовом пространстве. При этом не всегда правильно учитывается числитель $W_{НЧ}(p)$ [9]. Методика правильного его учета обычно основывается на достаточно трудно воспринимаемых рассуждениях [10, 11]. Цель настоящей статьи — построить корректную модель НЧ в фазовом пространстве более простым способом, опирающимся на привычные инженерам представления.

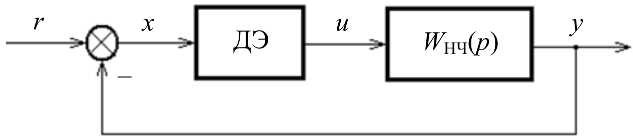

Рис. 1

Дифференциальное уравнение непрерывной части. Положим НЧ наблюдаемой и управляемой, что означает несократимость нулей и полюсов ее передаточной функции

$$W_{НЧ}(p)=\frac{b_l p^l+...+b_1 p+b_0}{p^m+a_{m-1}p^{m-1}+...+a_1 p+a_0},\ a_i,\ \ b_i=\mathrm{const},\ m>l. \qquad (1)$$

Считаем, что полюса $W_{НЧ}(p)$ лежат в области устойчивости, за исключением, возможно, одного нулевого полюса. Поскольку функции, описывающие импульсы ДЭ, имеют разрывы, необходимо правильно выбрать базис фазового пространства НЧ при описании ее движения. В противном случае [9] разностное уравнение системы оказывается некорректным.

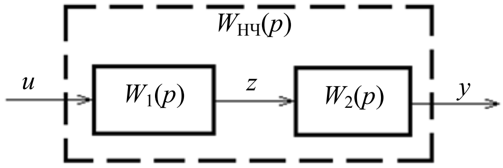

Рис. 2

Представив НЧ в виде последовательного соединения двух звеньев (рис. 2),

$$W_1(p)=\frac{1}{p^m+a_{m-1}p^{m-1}+...+a_1 p+a_0},\ W_2(p)=b_l p^l+...+b_1 p+b_0\,,$$

опишем ее движение в естественном m-мерном фазовом пространстве

$$E=\{\mathbf{Z}\},\quad \mathbf{Z}^T=\left[z_1,z_2,...,z_m\right],\quad z_1=z,\quad z_i=\frac{d^{i-1}z}{dt^{i-1}},\quad i=2,\ 3,\ ...,\ m \qquad (2)$$

векторным дифференциальным уравнением:

$$\dot{\mathbf{Z}}=\mathbf{AZ}+\mathbf{g}u, \qquad (3)$$

где $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_1 & -a_1 & \dots & a_{m-1} \end{bmatrix}$ — сопровождающая матрица НЧ,

$\mathbf{g}=\left[0,\ 0,\ ...,\ 0,\ 1\right]^T$ — вектор-столбец.

Уравнение выхода при этом имеет вид:

$$y = \mathbf{b}^T \mathbf{Z}, \tag{4}$$

где $\mathbf{b}^T = [b_0,\ b_1,\ ...,\ b_{m-1}]$ — вектор-строка, $b_{l+1} = b_{l+2} = ... = b_{m-1} = 0$.

Решение (3) при начальных условиях $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0$ и уравнение выхода имеют вид

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{Z}_0 + \int_0^t \mathbf{H}(t-\eta)\mathbf{g}u(\eta)d\eta, \tag{5}$$

$$y(t) = \mathbf{b}^T \mathbf{H}(t)\mathbf{Z}_0 + \int_0^t \mathbf{b}^T \mathbf{H}(t-\eta)\mathbf{g}u(\eta)d\eta, \tag{6}$$

где $\mathbf{H}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ — матричный экспоненциал, переходная матрица.

При анализе устойчивости системы удобно, чтобы первая координата фазового пространства НЧ была равна выходному сигналу НЧ, т.е. $y(t)$. Достичь этого можно линейным невырожденным преобразованием фазового пространства НЧ:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{NZ}, \tag{7}$$

где $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^T \\ \mathbf{b}^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{m-1} \end{bmatrix}$ — матрица наблюдаемости, невырожденная по принятому условию.

Учитывая доказанное в Приложении тождество

$$\mathbf{N} = b_0\mathbf{E} + b_1\mathbf{A} + b_2\mathbf{A}^2 + ... + b_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}, \tag{8}$$

из которого следует перестановочность матриц: **A**, **H**, **N**, и умножив векторно-матричное дифференциальное уравнение (3) на **N**, получим

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{AY} + \mathbf{h}u, \tag{9}$$

где

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{Y}, \tag{10}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{Ng}, \tag{11}$$

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{b}^T \mathbf{N}^{-1} = [1,\ 0, ...,\ 0]. \tag{12}$$

Нетрудно проверить справедливость формулы (12), подставив выражение (8) в тождественное выражение $\mathbf{c}^T\mathbf{N} = \mathbf{b}^T$.

Из выражения (11) получаем:

$$h_1 = \mathbf{b}^T\mathbf{g},\quad h_2 = \mathbf{b}^T\mathbf{Ag},\quad h_3 = \mathbf{b}^T\mathbf{A}^2\mathbf{g}, ...,\ h_m = \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{m-1}\mathbf{g}. \tag{13}$$

Полученные иным способом выражения для элементов вектора (13) приведены в работах [10, 11]:

$$h_{m-k} = b_k - \sum_{j=1}^{m-k-1} a_{j+k}h_j,\quad h_1 = b_{m-1},\quad k = m-2,\ m-3,\ ...,\ 1,\ 0. \tag{14}$$

Решения уравнения (9) и уравнение выхода аналогичны (5) и (6):

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{Y}_0 + \int_0^t \mathbf{H}(t-\eta)\mathbf{h}u(\eta)d\eta, \tag{15}$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{H}(t)\mathbf{Y}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T\mathbf{H}(t-\eta)\mathbf{h}u(\eta)d\eta. \tag{16}$$

Пример. Положим $W_{\text{НЧ}}(p)=(b_1p+b_0)/(p^2+a_1p+a_0)$ и определим параметры математической модели НЧ в естественном (3), (4) и в преобразованном (9), (10) фазовом пространстве.

Согласно выражениям (3), (4) и (9), (10) получаем соответственно:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{AZ} + \mathbf{g}u, \quad y = \mathbf{b}^T\mathbf{Z},$$

где $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}$,

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{AY} + \mathbf{h}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{Y},$$

где

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \; y_1 = y; \; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}; \; \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}; \; \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h_1 = \mathbf{b}^T\mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_1, \; h_2 = \mathbf{b}^T\mathbf{Ag} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_0 - a_1b_1.$$

Следуя выражениям (14), получаем:

$$h_1 = b_{m-1}\big|_{m=2} = b_1, \quad h_2 = h_{m-k} = b_k - \sum_{j=1}^{m-k-1} a_{j+k}h_j\Bigg|_{m=2,k=0} = b_0 - \sum_{j=1}^{1} a_jh_j = b_0 - a_1b_1,$$

что совпадает с полученным выше результатом.

Приложение. Докажем тождество

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^T \\ \mathbf{b}^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{m-1} \end{bmatrix} = b_0\mathbf{E} + b_1\mathbf{A} + b_2\mathbf{A}^2 + ... + b_{m-1}\mathbf{A}^{m-1},$$

где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_m^T \\ \mathbf{a}^T \end{bmatrix}$ — сопровождающая матрица НЧ (матрица Фробениуса) $\mathbf{e}_i^T$ — i-я строка единичной $(m\times m)$-матрицы $\mathbf{E}$, $\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} -a_0, & -a_1, & -a_2, & ..., & -a_{m-1} \end{bmatrix}$ — вектор-строка.

Последовательно умножив $\mathbf{E}$ на матрицу $\mathbf{A}$ справа, с учетом справедливых для матрицы Фробениуса тождеств

$$\mathbf{e}_i^T\mathbf{A} = \mathbf{e}_{i+1}^T, \; i = 1, \; 2, \; ..., \; m-1, \quad \mathbf{e}_m^T\mathbf{A} = \mathbf{a}^T \tag{П.1}$$

получаем

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{m-1}^T \\ \mathbf{e}_m^T \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_m^T \\ \mathbf{a}^T \end{bmatrix}, \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_3^T \\ \mathbf{e}_4^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}^T \\ \mathbf{a}^T\mathbf{A} \end{bmatrix}, ..., \mathbf{A}^{m-2} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{m-1}^T \\ \mathbf{e}_m^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}^T\mathbf{A}^{m-4} \\ \mathbf{a}^T\mathbf{A}^{m-3} \end{bmatrix}, \mathbf{A}^{m-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{m-1}^T \\ \mathbf{a}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}^T\mathbf{A}^{m-3} \\ \mathbf{a}^T\mathbf{A}^{m-2} \end{bmatrix}. \tag{П.2}$$

Учитывая выражения (П.2), доказываемое матричное тождество можно заменить эквивалентными ему m векторными тождествами:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{b}^T = b_0\mathbf{e}_1^T + b_1\mathbf{e}_2^T + b_2\mathbf{e}_3^T + \ldots + b_{m-2}\mathbf{e}_m^T + b_{m-1}\mathbf{e}_m^T,\\
&\mathbf{b}^T\mathbf{A} = b_0\mathbf{e}_2^T + b_1\mathbf{e}_3^T + b_2\mathbf{e}_4^T + \ldots + b_{m-2}\mathbf{e}_m^T + b_{m-1}\mathbf{a}^T,\\
&\mathbf{b}^T\mathbf{A}^2 = b_0\mathbf{e}_3^T + b_1\mathbf{e}_4^T + b_2\mathbf{e}_5^T + \ldots + b_{m-2}a_m^T + b_{m-1}\mathbf{a}^T\mathbf{A},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{m-2} = b_0\mathbf{e}_{m-1}^T + b_1\mathbf{e}_m^T + b_2\mathbf{a}^T + \ldots + b_{m-2}\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{m-4} + b_{m-1}\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{m-3},\\
&\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{m-1} = b_0\mathbf{e}_m^T + b_1\mathbf{a}^T + b_2\mathbf{a}^T\mathbf{A} + \ldots + b_{m-2}\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{m-3} + b_{m-1}\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{m-2}.
\end{aligned}
\tag{П.3}
$$

Первое из тождеств (П.3) очевидно. Остальные тождества следуют из первого при последовательном умножении обеих его частей справа на матрицу **A** и учете тождеств (П.1).

Вывод. Предложен простой способ корректного учета числителя передаточной функции (т.е. нулей передаточной функции) линейной непрерывной части дискретной системы при описании ее движения в фазовом пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мелешин В. Н.* Транзисторная преобразовательная техника. М.: Техносфера, 2005. 628 с.
2. *Зиновьев Г. С.* Основы силовой электроники. Новосибирск: НГТУ, 2004. 607 с.
3. *Дмитриев Б. Ф., Рябенький В. М., Черевко А. И.* Судовые полупроводниковые преобразователи. СПб: СПбГМТУ, 2011. 526 с.
4. *Коршунов А. И.* Предельная непрерывная модель системы с высокочастотным периодическим изменением структуры // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 9. С. 42—48.
5. *Коршунов А. И.* К устойчивости замкнутых систем с управляемыми выпрямителями // Автоматика и телемеханика. 1974. № 5. С. 175—176.
6. *Коршунов А. И.* Определение параметров автоколебаний в системах с широтно-импульсными преобразователями // Изв. вузов. Приборостроение. 1978. Т. 21, № 10. С. 25—30.
7. *Коршунов А. И.* Особенности контура регулирования тока при широтно-импульсном управлении // Силовая электроника. 2006. № 3. С. 90—95.
8. *Коршунов А. И.* Анализ устойчивости и точности широтно-импульсного регулятора тока трехфазного автономного инвертора // Электротехника. 2012. № 6. С. 18—27.
9. *Коршунов А. И.* Замечания к статье В. М. Кунцевича „Асимптотическая устойчивость в целом двух классов систем управления с широтно-импульсной и частотно-импульсной модуляцией“ // Автоматика и телемеханика. 1973. № 8. С. 175—176.
10. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
11. *Сю Д., Мейер А.* Современная теория автоматического управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972. 552 с.

Сведения об авторе

Анатолий Иванович Коршунов — д-р техн. наук, профессор; Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ „Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова“, кафедра радиоэлектроники; E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Рекомендована кафедрой радиоэлектроники

Поступила в редакцию 23.08.15 г.

Ссылка для цитирования: *Коршунов А. И.* Определение коэффициентов векторно-матричного дифференциального уравнения линейной непрерывной части системы со статическим преобразователем // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 2. С. 107—112.

DETERMINATION OF COEFFICIENTS OF VECTOR-MATRIX DIFFERENTIAL EQUATION OF LINEAR CONTINUOUS PART OF THE SYSTEM WITH STATIC CONVERTER

A. I. Korshunov

N. G. Kuznetsov Navy Academy, Navy Polytechnic Institute,
198514, St. Petersburg, Russia
E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Description of linear continuous part of discrete system in phase space with the system output signal being one of the space coordinates is obtained by a linear nondegenerate transformation with observability matrix. The initial description of continuous part in natural phase space is obtained by decomposition of transfer function of continuous part into two functions, in one of which the numerator equals to unity, and in the other – the denominator. Implementation of the transformation makes use of an identity representing the observability matrix in the form of a polynomial in powers of the system matrix (Frobenius matrix) with coefficients of numerator of transfer function of the continuous part. An example demonstrating the proposed method applicability is presented.

Keywords: continuous part, vector-matrix differential equation, static converter

Data on author

Anatoly I. Korshunov — Dr. Sci., Professor; N. G. Kuznetsov Navy Academy, Navy Polytechnic Institute, Department of Radio-Electronics;
E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

For citation: *Korshunov A. I.* Determination of coefficients of vector-matrix differential equation of linear continuous part of the system with static converter // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie. 2016. Vol. 59, N 2. P. 107—112 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-2-107-112