

СИНТЕЗ КОМПЛЕКСНОГО ФИЛЬТРА С ЗАДАННОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ

С. И. ЗИАТДИНОВ, А. В. АГРАНОВСКИЙ, Л. А. ОСИПОВ

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
190000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kaf53@guar.ru*

Предложена методика синтеза комплексного фильтра с желаемыми частотными характеристиками. Синтезируемый фильтр состоит из нескольких параллельно включенных элементарных узкополосных фильтров, обладающих своими амплитудно- и фазочастотными характеристиками. Согласно полученному выражению, импульсная характеристика синтезированного фильтра может быть представлена суммой импульсных характеристик элементарных фильтров. Рассмотрен конкретный пример.

Ключевые слова: *комплексный фильтр, частотная передаточная функция, импульсная характеристика*

При обработке информации наиболее часто используется процедура фильтрации сигнала с помощью фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных фильтров. В ряде случаев применяются адаптивные комплексные фильтры, параметры которых могут изменяться в зависимости от спектральных характеристик обрабатываемых сигналов [1, 2].

В комплексных фильтрах управлять частотной передаточной функцией фильтра значительно проще, чем в действительных фильтрах. Вместе с тем далеко не всегда удается согласовать параметры фильтра с характеристиками сигналов на его входе. При этом существует достаточно жесткая связь между амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной характеристиками (ФЧХ) фильтра.

Вопросы синтеза фильтров с заданными частотными свойствами достаточно подробно рассмотрены в [3]. Существующие методы сводятся к решению задачи аппроксимации — отысканию передаточной функции реализуемого фильтра, которая являлась бы аппроксимацией некоторой выбранной идеальной характеристики. При этом используются методы классического численного анализа, ряда Фурье, наименьших квадратов и др. Однако такие методы очень громоздки, сложны в практическом использовании и не всегда дают желаемый результат.

В настоящей статье рассматривается простой метод синтеза комплексного фильтра с заранее заданными АЧХ и ФЧХ.

Желаемые АЧХ и ФЧХ комплексного фильтра представлены на рис. 1 жирными линиями. Для синтеза комплексного фильтра с заданными произвольными и независимыми АЧХ и ФЧХ проведем дискретизацию этих характеристик по частоте с шагом $\Delta\omega$, в пределах которого не происходит существенных изменений $W(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. В результате эти характеристики комплексного фильтра можно представить в виде последовательности прямоугольников высотой $W(\omega_i)$ и $\varphi(\omega_i)$ с основанием $\Delta\omega$ (рис. 1, тонкие линии).

Очевидно, что чем меньше шаг дискретизации по частоте $\Delta\omega$, тем менее дискретизированные АЧХ и ФЧХ будут отличаться от исходных АЧХ и ФЧХ комплексного фильтра. В результате синтезированный комплексный фильтр можно представить в виде параллельно соединенных элементарных фильтров с АЧХ $W_i(\omega) = W(\omega_i)$ и ФЧХ $\varphi_i(\omega) = \varphi(\omega_i)$, где i — номер элементарного фильтра. АЧХ и ФЧХ элементарного фильтра приведены на рис. 2.

В целом синтезированный комплексный фильтр имеет следующую частотную передаточную функцию

$$W_{\Sigma}(j\omega) = \sum_{i=1}^N W_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}, \quad (1)$$

где N — число элементарных фильтров. Из этого соотношения видно, что путем независимого выбора необходимых значений $W_i(\omega)$ и $\varphi_i(\omega)$ можно получить практически любую частотную передаточную функцию $W_{\Sigma}(j\omega)$.

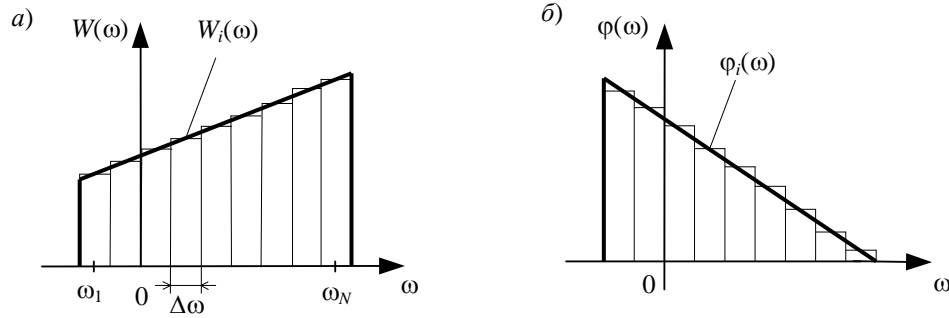


Рис. 1

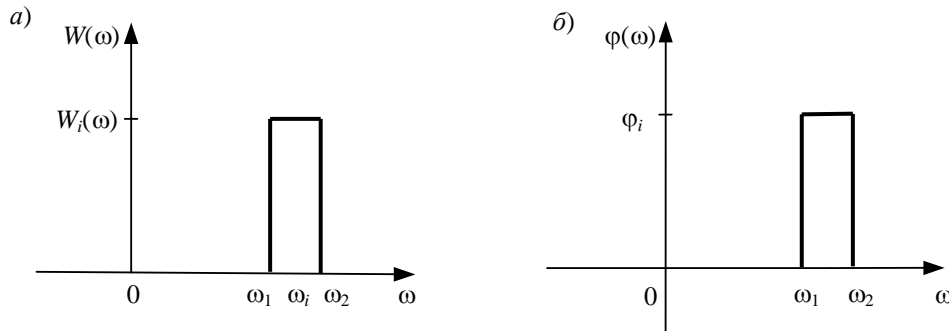


Рис. 2

Импульсная характеристика такого фильтра принимает вид [4]:

$$h_{\Sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\Sigma}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N W_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Поменяв интеграл и сумму в (2) местами, получим

$$h_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_i(\omega) e^{j[\omega t + \varphi_i(\omega)]} d\omega = \sum_{i=1}^N h_i(t), \quad (3)$$

где $h_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_i(\omega) e^{j[\omega t + \varphi_i(\omega)]} d\omega$ — импульсная характеристика элементарного фильтра.

Найдем импульсную характеристику элементарного фильтра, считая, что в пределах его полосы пропускания $\Delta\omega$ значения $W_i(\omega)$ и $\varphi_i(\omega)$ остаются постоянными

$$h_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} W_i e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} W_i e^{j(\omega t + \varphi_i)} d\omega. \quad (4)$$

Используя в (4) преобразование Лапласа $e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi$, после несложных тригонометрических преобразований получим

$$h_i(t) = \frac{W_i}{\pi t} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \left[\cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_i \right) - j \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_i \right) \right]. \quad (5)$$

Выражение (5) преобразуем к виду

$$h_i(t) = \frac{W_i}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega}{2} t [\cos(\omega_i t + \varphi_i) - j \sin(\omega_i t + \varphi_i)], \quad (6)$$

где $\omega_i = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ — средняя частота элементарного фильтра с полосой прозрачности $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ (см. рис. 2, а).

В частном случае можно записать:

$$1) \varphi_i = \mp \pi / 2; h_i(t) = \pm \frac{W_i}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega}{2} t (\sin \omega_i t + j \cos \omega_i t);$$

$$2) \varphi_i = \mp \pi / 4; h_i(t) = \frac{\sqrt{2}W_i}{2\pi t} \sin \frac{\Delta\omega}{2} t [(\cos \omega_i t \pm \sin \omega_i t) - j(\cos \omega_i t \mp \sin \omega_i t)];$$

$$3) \varphi_i = \mp \pi / 6; h_i(t) = \frac{W_i}{2\pi t} \sin \frac{\Delta\omega}{2} t [(\sqrt{3} \cos \omega_i t \pm \sin \omega_i t) - j(\sqrt{3} \cos \omega_i t \mp \sin \omega_i t)];$$

$$4) \varphi_i = 0; h_i(t) = \frac{W_i}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega}{2} t (\cos \omega_i t - j \sin \omega_i t).$$

Следует отметить, что взятые за основу элементарные фильтры с прямоугольной АЧХ имеют импульсную характеристику типа $\sin x/x$, бесконечную как при положительных, так и при отрицательных значениях аргумента. Это известные в литературе так называемые идеальные фильтры, не реализуемые на практике.

Задача перехода от идеального фильтра к реальному и ее решение обсуждаются в работе [5]. Предлагается в импульсную характеристику $h_i(t)$ идеального элементарного фильтра ввести задержку на время t_0 . При этом величина импульсной характеристики $h_i(t - t_0)$ для $t=0$ должна быть меньше заданной: например, $h_i(t - t_0) / h_i(0) < 0,01$. Возникающие при этом амплитудные и фазовые искажения являются незначительными.

Вводимая задержка выходного сигнала является абсолютно нормальным явлением для любого реального фильтра с ограниченной верхней частотой АЧХ. В качестве примера рассмотрим синтез комплексного фильтра нижних частот первого порядка с частотной передаточной функцией вида

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega - \omega_0)\tau},$$

где τ , ω_0 — постоянная времени и средняя частота фильтра.

Этой частотной передаточной функции соответствуют следующие АЧХ и ФЧХ

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}}; \varphi(\omega) = -\arctg(\omega - \omega_0)\tau. \quad (7)$$

Импульсная характеристика фильтра определяется выражением

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} (\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t).$$

В соответствии с выражениями (3), (6) и (7) импульсная характеристика синтезируемого комплексного фильтра нижних частот принимает вид

$$h_\Sigma(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\pi t \sqrt{1 + (\omega_i - \omega_0)^2 \tau^2}} \times \\ \times \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \{ \cos[\omega_i t - \arctg(\omega_i - \omega_0)\tau] - j \sin[\omega_i t - \arctg(\omega_i - \omega_0)\tau] \}.$$

При расчетах полагалось $\tau = 0,01$ с, $f_N = \omega_N / 2\pi = 10$ кГц; $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 100$ Гц.

Качество синтезированного комплексного фильтра оценивалось по относительной среднеквадратической ошибке вычисления импульсной характеристики фильтра

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \{h(t) - h_{\Sigma}(t)/h(t)\}^2},$$

где M — число учитываемых отсчетов импульсной характеристики (было принято $M = 100$). Отсчеты брались с периодом $T=0,001$ с.

В работе получены следующие результаты. При ширине полосы прозрачности элементарного фильтра $\Delta f = \Delta\omega/2\pi = 10$ Гц нормированная среднеквадратическая ошибка составляла 2,32 %; при $\Delta f = 5$ Гц — 0,91 % и при $\Delta f = 1$ Гц — 0,8 %.

Таким образом, с уменьшением полосы прозрачности элементарного фильтра частотная передаточная функция синтезированного комплексного фильтра стремится к желаемой.

Рассмотренная методика синтеза позволяет получить комплексный фильтр практически с любой частотной передаточной функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры. М.: Недра, 1987. 221 с.
2. Микропроцессорные системы автоматического управления / Под общ. ред. В. А. Бесекерского. Л.: Машиностроение, 1988. 364 с.
3. Воробьев С. Н. Цифровая обработка сигналов. М.: Академия, 2013. 317 с.
4. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
5. Сиберт У. М. Цепи, сигналы, системы. М.: Мир, 1988. 243 с.

Сведения об авторах

- Сергей Ильич Зиятдинов** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения;
E-mail: kaf53@guap.ru
- Андрей Владимирович Аграновский** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
- Леонид Андронникович Осипов** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения;
E-mail: kaf53@guap.ru

Рекомендована кафедрой
метрологического обеспечения

Поступила в редакцию
03.03.16 г.

Ссылка для цитирования: Зиятдинов С. И., Аграновский А. В., Осипов Л. А. Синтез комплексного фильтра с заданной передаточной функцией // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 7. С. 542—546.

SYNTHESIS OF COMPLEX FILTER WITH SPECIFIED TRANSFER FUNCTION

S. I. Ziatdinov, A. V. Agranovsky, L. A. Osipov

St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
190000, St. Petersburg, Russia
E-mail: kaf53@guap.ru

A method for synthesis of a complex filter with desired frequency characteristic is proposed. The filter under development consists of several elementary narrow-band filters connected in parallel, each of the filters possesses separate amplitude- and phase-frequency characteristics. A formula is derived presenting pulse response of the synthesized filter as the sum of pulse response functions of the elementary filters. The results are illustrated with a specific example.

Keywords: complex filter, frequenc transfer function, pulse response

Data on authors

- Sergey I. Ziatdinov** — Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation; E-mail: kaf53@guap.ru
- Andrey A. Agranovsky** — PhD, Associate Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
- Leonid A. Osipov** — Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation; E-mail: kaf53@guap.ru

For citation: Ziatdinov S. I., Agranovsky A. V., Osipov L. A. Synthesis of complex filter with specified transfer function // Izv. vuzov. Priborostroenie. 2016. Vol. 59, N 7. P. 542—546 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-7-542-546