

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ТОЧНОСТИ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

М. В. АБРАМЧУК

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: amv76@list.ru*

Рассматривается вероятностный метод расчета параметров точности эвольвентной цилиндрической зубчатой передачи, а именно — монтажного радиального биения зубчатой передачи и кинематической погрешности зубчатой передачи. В качестве вероятностного метода расчета применяется метод Монте-Карло.

**Ключевые слова:** *зубчатые колеса, зубчатые передачи, точность, многозвенный механизм, метод Монте-Карло, кинематическая погрешность*

**Введение.** Точность — один из основных показателей качества для зубчатых передач. Система нормирования параметров точности зубчатых колес и передач, существующая в России, давно нуждается в пересмотре. Прогресс в области производства передач, редукторов и мультипликаторов, отмечаемый в течение последних десятилетий, не отражен в отечественных нормативных документах, которые зачастую резко расходятся с рекомендациями ISO [1—3]. Следствием этого является неконкурентоспособность производимых зубчатых передач и многозвенных зубчатых механизмов.

На точность зубчатой передачи влияют не только погрешности зубчатых колес, но и погрешности других элементов передачи, а именно: валов, подшипников, корпуса и т.д. Вследствие влияния погрешностей монтажа степень точности зубчатого колеса отличается от значения, указанного в стандарте. Функциональные показатели передач не контролируются на предприятиях (контроль предусмотрен лишь для отсчетных передач), что обуславливает снижение качества зубчатых передач.

Следовательно, главным недостатком системы нормирования параметров точности передачи является отсутствие методик, учитывающих погрешности всех элементов зубчатой передачи. Поэтому для внесения предложений по пересмотру стандартов, в частности ГОСТ 1643-81 и ГОСТ 21098-82, необходимо разработать методы перехода от геометрических показателей точности отдельных деталей передачи к функциональным показателям зубчатых передач и многозвенных зубчатых механизмов.

Для расчета зубчатой передачи на точность в настоящей статье предлагается следующий метод: определение точностных параметров передачи по точности зубчатых колес и других элементов передачи, а также точности монтажа.

**Расчет монтажного радиального биения зубчатой передачи.** При расчетах на максимум-минимум учитываются только предельные отклонения параметров. В результате этого расчета определяется максимальный допуск на монтажное радиальное биение.

В качестве вероятностного метода предлагается применить метод Монте-Карло [4, 5]. Алгоритм расчета заключается в следующем: для каждого параметра случайным образом

выбирается его значение (будем считать все составляющие монтажного радиального биения распределенными, например, равномерно), затем по выведенной формуле для монтажного радиального биения вычисляется его значение. Опыт повторяется  $N$  раз, после чего определяются математическое ожидание и дисперсия или среднеквадратическое отклонение. Далее строятся гистограммы и используются общепринятые критерии для оценки соответствия результата некоторому закону распределения.

Максимальная кинематическая погрешность для цилиндрических зубчатых передач по ГОСТ 21098-82 определяется в соответствии со следующим выражением:

$$F'_{i0\max} = K \left[ \sqrt{(F'_{i1})^2 + E_{\Sigma M_1}^2} + \sqrt{(F'_{i2})^2 + E_{\Sigma M_2}^2} \right], \quad (1)$$

где  $K$  — коэффициент фазовой компенсации;  $F'_{i1}$ ,  $F'_{i2}$  — допуски на кинематические погрешности соответственно шестерни и колеса (определяются по ГОСТ 1643-81 или ГОСТ 9178-81);  $E_{\Sigma M_1}$ ,  $E_{\Sigma M_2}$  — суммарная приведенная погрешность монтажа (по ГОСТ 21098-82).\*

Допуск на кинематическую погрешность зубчатого колеса

$$F'_i = F_p + f_f,$$

где  $F_p$  — допуск на накопленную погрешность шага зубчатого колеса,  $f_f$  — допуск на погрешность профиля зуба.

Суммарная приведенная погрешность монтажа рассчитывается по формуле

$$E_{\Sigma M} = \frac{e_r \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} + e_a \operatorname{tg} \beta,$$

где  $e_r$  и  $e_a$  — монтажные радиальное и осевое биения зубчатого колеса соответственно (показатели точности монтажа зубчатых колес);  $\alpha$  — угол исходного профиля;  $\beta$  — делительный угол наклона линии зуба.

В общем случае возможно следующее расположение зубчатого колеса на валу [6, 7] относительно опор: межопорное (рис. 1, а) и консольное (рис. 1, б).

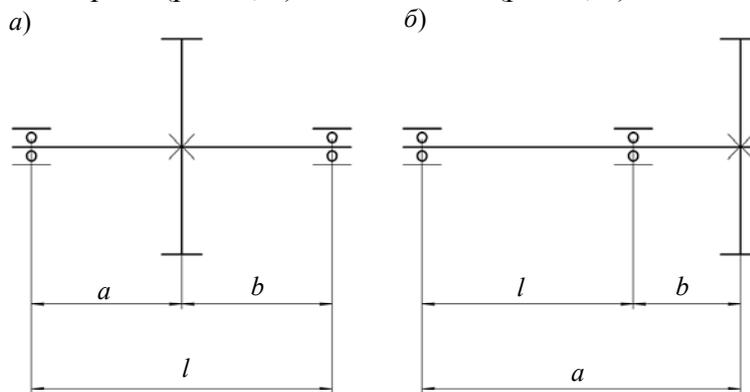


Рис. 1

Информация о размерах  $a$ ,  $b$ ,  $l$  необходима для приведения радиального биения колец подшипников к средней плоскости венца зубчатого колеса.

Для расчета монтажного радиального биения определим допуски на погрешности, создающие первичные радиальные биения:

—  $F_r$  — допуск на радиальное биение зубчатого венца колеса, определяется по ГОСТ 1643-81 и ГОСТ 9178-81;

—  $e_n$  — зазор в посадке колеса на вал, зависящий от конструкции соединения и используемой посадки;

\* Здесь и далее использованы обозначения, принятые в соответствующих стандартах.

—  $e_b$  — допуск на радиальное биение посадочной ступени вала под зубчатое колесо относительно цапфы вала, причем для гладких валов  $e_b = 0$ , определяется по ГОСТ 24643-81;

—  $R_i$  — радиальное биение внутреннего кольца собранного подшипника, определяется по ГОСТ 520-2011.

Необходимо отметить, что при наличии типовых схем зубчатых передач можно привести более полный перечень погрешностей, создающих первичные радиальные биения. В данной работе для расчета монтажного радиального биения ограничимся указанными выше погрешностями.

С учетом сказанного монтажное радиальное биение зубчатого колеса определяется следующим образом:

$$e_r = \left( F_r + e_{\Pi} + e_b + R_i \frac{a+b}{l} \right).$$

Для прямозубых зубчатых колес осевыми биениями можно пренебречь, т.е.  $e_a = 0$ , тогда

$$E_{\Sigma M} = e_r \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, алгоритм расчета монтажного радиального биения вероятностным методом будет следующим.

1. Выводится выражение для расчета и предполагается, что слагаемые в данном выражении являются случайными величинами.
2. Выбираются нижние и верхние предельные значения для каждого слагаемого:
  - по таблицам соответствующих стандартов (верхний предел — заданная степень точности, нижний предел — на одну-две степени выше);
  - на основе измерений параметров партии передач при производстве.
3. Задается распределение для каждого слагаемого.
4. При каждом конкретном вычислении получается случайная величина, а результатом расчета является гистограмма.
5. Осуществляется аппроксимация результата, используется критерий соответствия какому-либо закону распределения.
6. Определяются характеристики распределения (математическое ожидание, дисперсия и т.д.).

#### Расчет кинематической погрешности зубчатой передачи вероятностным методом.

Кинематическая погрешность — это функция, которую можно разложить на гармонические составляющие: оборотной частоты, частоты входа зубьев в зацепление и высокочастотные. Каждая гармоническая составляющая — это случайная функция с фиксированной частотой, случайной амплитудой и начальной фазой, поэтому результат измерения кинематической погрешности не будет представлять собой гармонику: рис. 2, где  $F'_{ior}$  — наибольшая кинематическая погрешность, измеряемая в течение периода  $\tau$ ;  $\varphi_2$  — угол поворота колеса в зубчатой передаче.

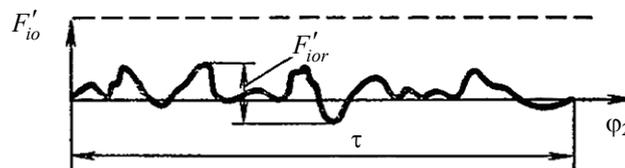


Рис. 2

Поскольку кинематическая погрешность — величина периодическая, ее период определяется по формуле

$$\tau = \frac{2\pi z_1}{x}, \quad (2)$$

где  $z_1$  — число зубьев шестерни в передаче;  $x$  — наибольший общий делитель для числа зубьев шестерни и колеса.

Если передаточное число является целым, то  $x = z_1$ , а  $\tau = 2\pi$ . Если передача не имеет общего делителя, то  $\tau = 2\pi z_1$ . Следовательно,  $2\pi \leq \tau \leq 2\pi z_1$ . Например, при  $z_1=36$  число зубьев колеса  $z_2=42$ , общий делитель  $x=6$ , период  $\tau = 12\pi$ , т.е. чтобы оценить кинематическую погрешность передачи, необходимо зубчатое колесо повернуть на 6 оборотов, а шестерня сделает при этом 7.

Кинематическая погрешность зубчатой передачи является результатом влияния гармонических составляющих с различной частотой повторений  $k$  за период  $\tau$  ( $k \geq 1$  — целое число) [8].

Удвоенная амплитуда гармонической составляющей кинематической погрешности называется циклической погрешностью и обозначается  $f_{zkor}$ , а ее допуск —  $f_{zko}$  (рис. 3). Удвоенная амплитуда гармонической составляющей с частотой повторений  $k_z$ , равной частоте входа зубьев в зацепление, называется циклической погрешностью зубцовой частоты и обозначается  $f_{zzor}$ , а ее допуск —  $f_{zzo}$ .

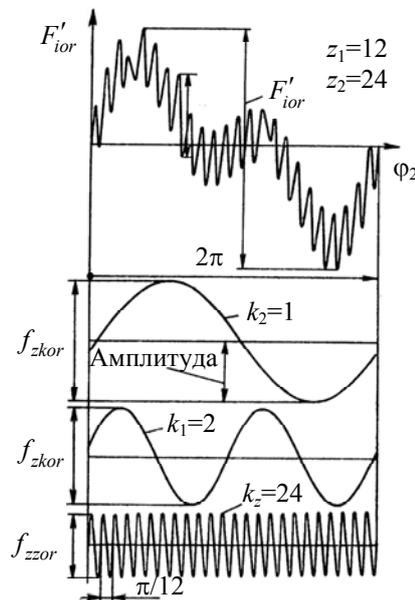


Рис. 3

Частота повторений  $k_1$  соответствует числу оборотов шестерни,  $k_2$  — числу оборотов колеса,  $k_z$  — числу входов зубьев в зацепление. Значения данных параметров для различных пар зубчатых колес приведены в таблице.

$z_1$	$z_2$	$x$	$\tau$	$k_1$	$k_2$	$k_z$
48	96	48	$2\pi$	2	1	96
60	80	20	$6\pi$	4	3	240
25	30	5	$10\pi$	6	5	150

Частоты повторений определяются как

$$k_1 = \frac{z_2}{x}, \quad k_2 = \frac{z_1}{x}, \quad k_z = k_1 z_1 = k_2 z_2. \quad (3)$$

Тогда, с учетом изложенного, выражение (1) для определения кинематической погрешности примет следующий вид:

$$F'_{i0} = \left[ F_{P1} \sin(k_1 \varphi_1 + \varphi_{P1H}) + f_{f1} + E_{\Sigma M_1} \right] + \left[ F_{P2} \sin(k_2 \varphi_1 + \varphi_{P2H}) + f_{f2} + E_{\Sigma M_2} \right] + f_{zko} \sin(k_z \varphi_1 + \varphi_{zkoH}), \quad (4)$$

где  $\varphi_{P1H}$ ,  $\varphi_{P2H}$ ,  $\varphi_{zkoH}$  — начальные фазы;  $\varphi_1$  — угол поворота ведущего колеса (шестерни).

Высокая частота повторений для погрешности профиля зуба  $f_{jr}$  [9, 10] обуславливает ее суммирование с другими слагаемыми в формуле (4) без учета гармоник и фаз [11].

Значение кинематической погрешности, в угловых минутах, согласно ГОСТ 21098-82,

$$\delta\varphi = \frac{360 \cdot 60 \cdot F'_{i0}}{\pi \cdot 1000 m z} = 6,88 \frac{F'_{i0}}{d}, \quad (5)$$

где  $d$  — диаметр делительной окружности ведомого колеса, мм;  $m$  — модуль зацепления, мм.

Алгоритм расчета наибольшей кинематической погрешности вероятностным методом будет следующим.

1. Выводится выражение для расчета — выражение (4).
2. Принимается, что все составляющие кинематической погрешности распределены равномерно.
3. По формулам (3) рассчитываются частоты повторений  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_z$ .
4. По формуле (2) рассчитывается период  $\tau$ .
5. Определяются случайные величины в выражении (4): амплитуды  $F_{P1}$ ,  $F_{P2}$  и  $f_{z\omega}$ , допуски  $f_{f1}$ ,  $f_{f2}$  и начальные фазы.
6. Выбираются нижние и верхние предельные значения для каждого слагаемого (для начальных фаз  $0 \dots 2\pi$ ):
  - по таблицам соответствующих стандартов (верхний предел — заданная степень точности, нижний предел — на одну-две степени выше);
  - на основе измерений параметров партии передач при производстве.
7. Задается распределение для каждого слагаемого.
8. Значения угла  $\varphi_1$  подставляются в формулу (4) с выбранным шагом, например  $15^\circ$ , начиная от 0 до конца периода  $\tau$ .
9. Определяется значение наибольшей кинематической погрешности как разность между максимальным  $F'_{ior}$  и минимальным  $F'_{i0}$  значениями, определенными по выражению (4).
10. Определяется значение  $F'_{ior}$  в угловых единицах по выражению (5).

**Заключение.** Использование рассмотренного вероятностного метода расчета параметров точности зубчатой передачи позволяет получить меньшие значения допусков, что более полно отражает специфику реального производства цилиндрической зубчатой передачи.

При расчете параметров точности зубчатой передачи вероятностным методом необходимо знать границы зоны рассеяния погрешностей и законы их распределения внутри зоны. Установление границ и законов распределения (либо числовых характеристик, когда законы не определены) необходимо осуществлять в налаженном производстве при стабильных числовых характеристиках распределения и достаточно большом количестве измеряемых деталей в выборке.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ISO 1328-1:1995. Cylindrical Gears — ISO System of Accuracy, Part 1: Definitions and Allowable Values of Deviations Relevant to Corresponding Flanks of Gear Teeth.
2. ISO 1328-2:1997. Cylindrical Gears — ISO System of Accuracy, Part 2: Definitions and Allowable Values of Deviations Relevant to Radial Composite Deviations and Runout Information.
3. ISO 1328-1:2013. Cylindrical Gears — ISO System of Flank Tolerance Classification, Part 1: Definitions and Allowable Values of Deviations Relevant to Flanks of Gear Teeth.
4. Соболев И. М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978. 64 с.
5. Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах М.: Наука, 1965. 228 с.

6. Тимофеев Б. П., Абрамчук М. В. Расчет погрешностей для нового базового стандарта, нормирующего точность цилиндрических зубчатых колес и передач // Сб. тез. докл. конгресса молодых ученых: Вып. 2. Проблемы механики и точности в приборостроении. СПб: НИУ ИТМО, 2013. С. 275—276.
7. Тимофеев Б. П., Абрамчук М. В., Смирнов Д. С. Расчет радиального биения колес в зубчатой передаче // Сб. докл. 11-й сессии Междунар. науч. школы, посвященной памяти В. П. Булатова: „Фундаментальные и прикладные проблемы надежности и диагностики машин и механизмов“. СПб: Art-Xpress, 2013. С. 331—340.
8. Куцоконь В. А. Точность кинематических цепей приборов Л.: Машиностроение, 1980. 221 с.
9. Тимофеев Б. П., Новиков Д. В. Новые стандарты по точности зубчатых колес и передач — необходимое условие повышения конкурентоспособности отечественного редукторостроения // Вестн. машиностроения. 2013. № 5. С. 85—87.
10. Тимофеев Б. П., Новиков Д. В. Комбинирование норм точности стандартных зубчатых передач // Стандарты и качество. 2013. № 5. С. 48—52.
11. Абрамчук М. В. Совершенствование расчетов параметров точности зубчатых колес, зубчатых передач и многозвенных зубчатых механизмов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб, 2014.

**Сведения об авторе**

**Михаил Владимирович Абрамчук** — канд. техн. наук; Университет ИТМО; кафедра мехатроники;  
E-mail: amv76@list.ru

Рекомендована кафедрой  
мехатроники Университета ИТМО

Поступила в редакцию  
05.04.16 г.

**Ссылка для цитирования:** Абрамчук М. В. Вероятностный метод расчета параметров точности эвольвентных цилиндрических зубчатых передач // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 8. С. 619—624.

**PROBABILISTIC METHOD FOR CALCULATION OF PRECISION PARAMETERS  
OF INVOLUTE CYLINDRICAL GEAR**

**M. V. Abramchuk**

*ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia*  
*E-mail: amv76@list.ru*

Application of a probabilistic method for calculating the precision parameters of involute cylindrical gear is considered. The parameters in question are mounting radial runout and kinematic error of the gear, Monte Carlo method is taken for the probabilistic calculation method.

**Keywords:** gear wheel, gear, precision, multi-link mechanism, Monte Carlo method, kinematic error

**Data on author**

**Mikhail V. Abramchuk** — PhD; ITMO University, Department of Mechatronics; senior lecturer;  
E-mail: amv76@list.ru

**For citation:** Abramchuk M. V. Probabilistic method for calculation of precision parameters of involute cylindrical gear // Izv. vuzov. Priborostroyeniye. 2016. Vol. 59, N 8. P. 619—624 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-8-619-624