

МОДЕЛИРОВАНИЕ АРМИРУЮЩЕГО СЛОЯ КОМПОЗИЦИОННОГО ИЗДЕЛИЯ С ЗАДАНЫМ НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ

А. Ю. КУТЬИН¹, Г. А. СОЛОВЬЕВА²

¹Производственная компания „Индустрия цвета“, 196084, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kutin_alex@mail.ru

²Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия

Рассматривается задача идентификации параметров напряженно-деформированного состояния армирующей намотки для малогабаритных изделий из композиционных материалов. Выведена аналитическая зависимость давления слоя намотки от натяжения нитей и параметра, характеризующего скорость изменения толщины намотки.

Ключевые слова: композиционные материалы, окружная намотка, спираль Архимеда, натяжение нити

Одним из важных требований к серийному изготовлению изделий из композиционных материалов методом окружной намотки является формирование из армирующих нитей намотки с одинаковыми параметрами напряженно-деформированного состояния [1, 2].

Для выполнения этого требования при создании малогабаритных изделий, когда ширина ленты намотки не превышает длины изделия, может быть использован способ формирования прецизионной намотки [3], преобразующий процесс наматывания из случайного в детерминированный. Способ реализован на базе математической модели процесса наматывания [3]. Особенность данной модели заключается в том, что такие параметры намотки, как радиус ρ и длина L , определяются путем последовательного интегрирования заданной функции $f(\theta)$, характеризующей скорость изменения толщины намотки в зависимости от угла поворота θ оправки (рис. 1):

$$a = \frac{d\rho}{d\theta} = f(\theta); \tag{1}$$

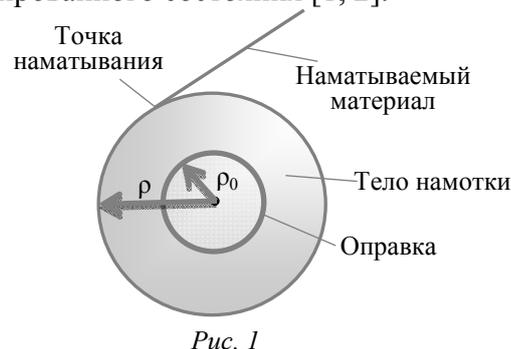
$$\rho - \rho_0 = \int_0^\theta a d\theta; \tag{2}$$

$$L = \int_0^\theta \rho(\theta) d\theta; \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{MTL}{\pi H(\rho^2 - \rho_0^2)}, \tag{4}$$

где ρ_0 — радиус оправки, M — число нитей в ленте, T — линейная плотность нитей, H — ширина ленты, γ — плотность намотки.

Из представленной математической модели следует, что получение идентичных паковок обеспечивается при строгом выполнении функции (1). Только в этом случае при одном



и том же значении угла поворота θ оправки будет получаться намотка с одинаковыми параметрами (ρ , L , γ). Уравнения (1) и (2) описывают спираль, характеризующую изменение намотки в соответствии с действующими в процессе наматывания силами.

Скорость изменения толщины намотки зависит от действующего в момент наматывания натяжения нитей. Это натяжение образует центральную силу давления, во многом определяющую вид функции $f(\theta)$. Указанная сила зависит от двух составляющих: 1) нормального давления витка, определяемого трением о направляющие детали, натяжными приборами и действием на намотку уплотняющего устройства; 2) центростремительной силы, возникающей при высокой скорости наматывания материала.

Следует оценить связь между натяжением нити и параметром a . При наматывании M нитей согласно третьему закону Ньютона на элемент витка со стороны намотки действует центробежная сила df_6 (рис. 2) [4, 5]:

$$df_6 = MTdL \frac{v_{\text{л}}^2}{\rho} = MT\rho d\theta \frac{v_{\text{л}}^2}{\rho} = MTv_{\text{л}}^2 d\theta, \quad (5)$$

где $v_{\text{л}}$ — линейная скорость наматывания материала.

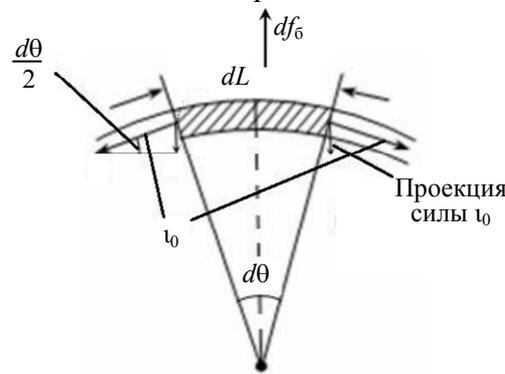


Рис. 2

Вследствие появления центробежной силы (df_6/M) исходное натяжение нити i_0 увеличивается на некоторую дополнительную величину Δi [5]:

$$dN_p^{\Delta} = i_0 d\theta + T\rho d\theta \frac{v_{\text{л}}^2}{\rho} = (i_0 + T v_{\text{л}}^2) d\theta, \quad T v_{\text{л}}^2 = \Delta i, \quad (6)$$

где dN_p^{Δ} — сила реакции бесконечно малого участка витка нити, $i_0 d\theta$ — проекция силы натяжения на радиальное направление.

Следует учесть, что образуемый виток намотки является частью спирали, а не замкнутого кольца. Последующие витки нити, заполняя межвитковые промежутки, за счет возникающего давления и межслойного трения консервируют дополнительное натяжение нити Δi , вызванное центробежной силой. При остановке оправки приращение натяжения Δi не исчезает, и в этом случае центростремительную силу можно рассматривать как независимую в пределах формирования поверхностного слоя намотки, равного по толщине диаметру d_n наматываемой нити ($d_n \gg 2\pi a$). Каждый бесконечно малый участок подаваемой нити, при движении по окружности, сообщает ей, согласно (6), приращение натяжения на величину $T v_{\text{л}}^2$. Величина этого приращения неизменна при любом значении угла φ , где $0 \leq \varphi \leq \Delta\theta$ — угол поворота, на который поворачивается оправка при формировании поверхностного слоя намотки толщиной d_n . Следовательно, в соответствии с теоремой о среднем [6] справедливо

$$i = i_0 + \int_0^{\varphi} T v_{\text{л}}^2 d\varphi; \quad (7)$$

$$dN_p^* = (\iota - T v_{л}^2) d\theta, \tag{8}$$

где ι — натяжение участка слоя намотки, образуемого одной нитью; dN_p^* — сила реакции тела намотки на воздействие участка слоя намотки.

Если задан закон изменения параметра a , в соответствии с которым происходит формирование намотки, то наматывание поверхностного слоя толщиной d_n можно описать спиралью Архимеда [7]. Это обусловлено тем, что при заполнении нитями межвитковых промежутков частота вращения оправки и скорость изменения толщины намотки являются, по сути, постоянными величинами, и определяемая по модели (1), (2) толщина ($2\pi a$) слоя, образуемого за один оборот, намного меньше диаметра нити d_n . Однако на самом деле при каждом обороте оправки в межвитковые промежутки укладываются реальные нити диаметром d_n .

С учетом данного допущения угол поворота $\Delta\theta$ можно определить с помощью следующих соотношений:

$$dk = \frac{d\rho}{d_n}; \quad dk = \frac{ad\theta}{d_n}; \quad \int_0^1 dk = \int_{\theta}^{\theta+\Delta\theta} \frac{a}{d_n} d\theta; \quad \Delta\theta = \frac{d_n}{a}, \tag{9}$$

где k — количество слоев намотки с толщиной, равной диаметру нитей d_n .

При завершении формирования поверхностного слоя натяжение одной составляющей его нити

$$\iota = \iota_0 + T v_{л}^2 \Delta\theta = \iota_0 + T v_{л}^2 \frac{d_n}{a}. \tag{10}$$

При высокоскоростном наматывании, когда исходное натяжение нити ι_0 , необходимое для устранения провисов, намного меньше натяжения при намотке ($\iota_0 \ll \iota$), величиной ι_0 можно пренебречь:

$$\iota \approx T v_{л}^2 \frac{d_n}{a}. \tag{11}$$

Согласно выражению (10) натяжение слоя из M наматываемых нитей

$$\tau = M \left(\iota_0 + T v_{л}^2 \frac{d_n}{a} \right). \tag{12}$$

Натяжением этого слоя определяется давление, которое оказывает слой, равный по толщине диаметру нити d_n , на нижележащую поверхность [8]. Для поверхностного слоя с толщиной d_n можно однозначно определить площадь поверхности, на которую он воздействует. Очевидно, эта площадь равна $2\pi rH$. Центральную силу, т.е. проекцию силы натяжения слоя на радиус-вектор, направленный к центру вращения оправки, для поверхностного слоя намотки можно оценить следующим образом [9]:

$$\Omega = \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \tau d\theta = 2\pi\tau. \tag{13}$$

Составляющая давления на поверхность намотки будет равна

$$p = \frac{2\pi\tau}{2\pi rH} = \frac{\tau}{rH} = \frac{M\iota}{rH}. \tag{14}$$

Тогда с учетом соотношений (9) можно определить удельное нормальное давление на поверхность намотки, ограниченную углом θ_1 ;

$$P = \frac{M}{Hd_n} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\tau a}{\rho} d\theta = \frac{M}{Hd_n} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\tau d\rho}{\rho}, \quad (15)$$

где $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_k$ и $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2$, θ_k — угол поворота оправки, фиксируемый в момент завершения процесса формирования намотки; $\rho_0 \leq \rho_1 \leq \rho_2$ и $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_k$, ρ_k — конечный радиус намотки.

В общем случае для расчета давления согласно выражению (15) необходимо определить средние значения параметров a и τ ($a_{\text{ср}}$ и $\tau_{\text{ср}}$). Среднее значение параметра a вычисляется по формуле [3]

$$a_{\text{ср}} = \frac{b}{2\gamma}, \quad (16)$$

где $b = (MT)/(\pi H)$. Тогда

$$P = \frac{M\tau_{\text{ср}}}{Hd_n} \ln \left(\frac{a_{\text{ср}}\theta_2 + \rho_0}{a_{\text{ср}}\theta_1 + \rho_0} \right), \quad (17)$$

где $a_{\text{ср}}\theta_2 + \rho_0 = \rho_2$, $a_{\text{ср}}\theta_1 + \rho_0 = \rho_1$, а $\tau_{\text{ср}}$ определяется экспериментально.

График зависимости (17), в предположении, что $\rho_1 = \rho_0$, представлен на рис. 3 при следующих исходных данных: $M = 41$; $T = 187$ Текс = $1,87 \cdot 10^{-4}$ кг/м (капроновая нить); $H = 0,3$ м; $\rho_0 = 0,05$ м; $\tau_{\text{ср}} = 2,5$ Н; $d_n = 0,457$ мм; $\gamma = 500$ кг/м³.

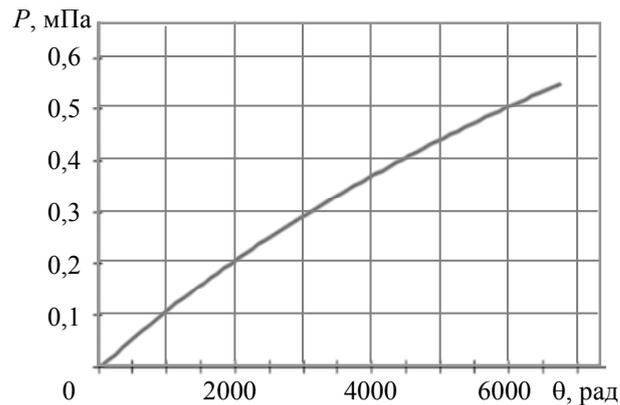


Рис. 3

В частном случае, когда $a = \text{const}$, $\tau = \text{const}$ и намотка сомкнута ($d_n = 2\pi a$), формула (15) сводится к известной формуле проф. В. А. Гордеева для расчета нормального давления слоя намотки на нижележащую поверхность [9]. Действительно, в этом случае получим

$$P_{\Gamma} = \frac{M\tau}{2\pi H a} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \frac{M\tau}{2\pi H \frac{b}{2\gamma}} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \frac{M\tau}{\pi H \frac{MT}{\pi H \gamma}} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \frac{\tau \gamma}{T} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right).$$

Математическая модель, представленная выражениями (1)—(4), (12), (15), отражает взаимосвязь между основными технологическими параметрами намотки и такими параметрами ее напряженного состояния, как плотность (γ), натяжение слоя (τ) и послойное давление (P). Параметр a модели, характеризующий скорость изменения толщины намотки, по сути, является уникальным индикатором, реагирующим на возмущения, вызванные как изменением технологических условий и характеристик, так и изменением напряженного состояния наматываемого материала или тела намотки. Например, при увеличении линейной плотности наматываемых нитей или снижении их натяжения радиус намотки начинает возрастать быстрее, т.е. параметр a увеличивается, в противном случае, когда уменьшается линейная плотность

нитей или возрастает их натяжение, a уменьшается. Поэтому данную модель целесообразно использовать для формирования окружной намотки с заданным напряженным состоянием.

Система управления, предназначенная для формирования намотки, должна поддерживать ее фактический радиус равным теоретическому в соответствии с зависимостью (2). В этом случае система управления обеспечит идентичность намотки и модели (1)—(4), (12), (15) по всем параметрам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фахрутдинов И. Х. Ракетные двигатели твердого топлива. М.: Машиностроение, 1981. 223 с.
2. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
3. Кутьин А. Ю. Проектирование текстильных паковок рулонного типа и методы их воспроизводства. Иваново: ИГТА, 2006. 224 с.
4. Кутьин А. Ю., Кутьин Ю. К., Соколов Н. А. Формирование поверхностного слоя тела намотки из несомкнутых нитей // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. 2013. № 1(32). С. 76—80.
5. Задачи по физике / Сост. А. И. Черноуцан. М.: Рос. гос. ун-т нефти и газа им. И. М. Губкина, 2012. 139 с.
6. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа. М.: Физматгиз, 1963. 664 с.
7. Кутьин А. Ю., Кутьин Ю. К. О моделировании процесса формирования цилиндрических паковок рулонного типа // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2001. № 2. С. 113—117.
8. Кутьин А. Ю., Кутьин Ю. К., Шишков К. А. Об особенностях проектирования систем управления для современного сновального и шлихтовального оборудования // В мире оборудования. 2010. № 2. С. 10—12.
9. Гордеев В. А. К расчету давлений намотки текстильных материалов // Тр. Ленинград. текстильного ин-та им. С. М. Кирова. 1957. Вып. 9. С. 181—190.

Сведения об авторах

Алексей Юрьевич Кутьин

— канд. техн. наук, доцент; Производственная компания „Индустрия цвета“; программист; E-mail: kutin_alex@mail.ru

Галина Александровна Соловьева

— аспирант; Университет ИТМО; кафедра мехатроники; E-mail: ymatem@rambler.ru

Рекомендована кафедрой
мехатроники Университета ИТМО

Поступила в редакцию
05.04.16 г.

Ссылка для цитирования: Кутьин А. Ю., Соловьева Г. А. Моделирование армирующего слоя композиционного изделия с заданным напряженным состоянием // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 8. С. 651—656.

MODELING OF REINFORCING LAYER OF COMPOSITE PRODUCT WITH PREDETERMINED STRESS STATE

A. Yu. Kutin¹, G. A. Solovieva²

¹Printing House "Industry of Color", 196084, St. Petersburg, Russia
E-mail: kutin_alex@mail.ru

²ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia

The problem of identification of stress-strain state of the reinforcing winding for small products from composite materials is considered. An analytical dependence is revealed between the winding layer pressure, from one side, and the yarn tension and a parameter characterizing the rate of winding thickness change, from the other.

Keywords: composite material, circumferential winding, the spiral of Archimedes, yarn tension

Data on authors

- Alexey Yu. Kutin** — PhD, Associate Professor; Printing House “Industry of Color”; Programmer;
E-mail: kutin_alex@mail.ru
- Galina A. Solovieva** — Post-Graduate Student; ITMO University; Department of Mechatronics;
E-mail: ymatem@rambler.ru

For citation: *Kutin A. Yu., Solovieva G. A. Modeling of reinforcing layer of composite product with predetermined stress state // Izv. vuzov. Priborostroenie. 2016. Vol. 59, N 8. P. 651—656 (in Russian).*

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-8-651-656