

БИБЛИОТЕКА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРИЛОЖЕНИИ К ТОНКОСТЕННЫМ ОБОЛОЧКАМ ВРАЩЕНИЯ

А. С. КОЗЛОВ, Р. Я. ЛАБКОВСКАЯ, В. Л. ТКАЛИЧ

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: labkovskaya@mail.ifmo.ru*

Рассматривается вопрос формирования библиотеки конечных элементов в приложении к тонкостенным оболочкам вращения в целях обеспечения высокой точности расчетов геометрии оболочки. Приведены обязательные требования к конечным элементам при формировании библиотеки. Доказывается корректность описания и определения всех внутренних силовых факторов вплоть до перерезывающих усилий.

Ключевые слова: *конечный элемент, оболочки вращения, библиотека конечных элементов*

Осуществляя выбор функций перемещений, которые обеспечивают учет смещений с целью формирования библиотеки конечных элементов, необходимо принимать некоторые условия. От выполнения этих условий в значительной степени зависит эффективность создаваемых алгоритмов расчета сложных конструкций.

Каждый тип конечных элементов, используемых в библиотеке, должен удовлетворять ряду требований [1—3]:

— узловые перемещения элемента, которые соответствуют его перемещению как твердого тела, не должны сопровождаться возникновением ненулевых деформаций;

— необходимо обеспечить непрерывность поля перемещений и их производных до $(m-1)$ -го порядка включительно (m — порядок старшей производной в функционале энергии) как во внутренней области элемента, так и на межэлементных границах с помощью выражений, которые выбраны для аппроксимации перемещений;

— необходимо обеспечить точную формулировку системы краевых условий на границах структуры при помощи выбранных систем обобщенных перемещений в узлах и функций формы.

Осуществляя выбор конечных элементов для структур, имеющих форму тонкостенных оболочек вращения, к которым можно отнести и сильфоны, помимо приведенных выше требований, необходимо принимать во внимание корректность выполнения условий сопряжения по координатным линиям α_1, α_2 .

Для формирования условий сопряжения предположим, что происходит плавное изменение геометрических параметров оболочек вращения в случае перехода через координатные линии. Зададим вектор перемещений $\{ \tilde{u} \}$ в локальной $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ системе координат и вектор перемещений $\{ u \}$ — в глобальной r, φ, z . Приведем формулы, описывающие компоненты вектора линейных деформаций для срединной поверхности оболочек вращения [1, 2]:

$$\left. \begin{aligned}
 q_{11} &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} \cos \theta - \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \sin \theta \right); \\
 q_{22} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + u_1 \right); \\
 q_{12} &= \frac{r}{R_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_2}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \cos \theta - \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \sin \theta \right); \\
 k_{11} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial \theta}; \\
 k_{22} &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} \sin \theta + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varphi^2} \cos \theta - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \sin \theta \right) + \frac{\cos \theta}{r} \mathfrak{G}_1; \\
 k_{12} &= -\frac{\sin \theta}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} \left(\frac{u_1}{r} \right) + \frac{\sin \theta}{R_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_2}{r} \right) - \frac{\sin \theta}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left(\frac{u_3}{r} \right); \\
 \mathfrak{G}_1 &= -\frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \cos \theta \right).
 \end{aligned} \right\}$$

Рассмотрим различные варианты выбора вектор-столбца обобщенных узлов перемещений для конечных элементов тонкостенной оболочки вращения. Воспользуемся полуаналитическим вариантом реализации метода конечных элементов, что позволит построить решение данной задачи в форме разложения в ряд Фурье:

$$\{u\} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^2 [f^k]_j^k \{u\}_j^k.$$

Из множества вариантов конечных элементов тонкостенных оболочек вращения наиболее широкое применение находит конечный элемент простейшего типа, который имеет следующий вектор-столбец обобщенных узловых перемещений:

$$\{U\}^T = [\tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \tilde{u}_3 \tilde{\mathfrak{G}}_1].$$

Кинематические условия сопряжения оболочек будут выполнены только в случае перехода через узловую окружность. Подробный анализ свойств данного элемента рассмотрен в работе [4]. Приведенные результаты свидетельствуют о том, что даже при представлении оболочки простейшей формы, а именно цилиндрической, конечными элементами малых размеров на узловых окружностях будут иметь место разрывы значений моментов и усилий, а статические условия сопряжения будут приближенно удовлетворяться в среднем [5, 6]. При этом во внутренних областях элемента возникают осцилляции решений вокруг точного значения. Необходимо отметить, что для этого элемента тангенциальные перемещения аппроксимируются линейными зависимостями, тогда как нормальные — кубическими.

Зададим элемент с вектор-столбцом обобщенных узловых перемещений, представляемый в виде

$$\{U\}^T = [\tilde{u}_1 \tilde{u}'_1 \tilde{u}_2 \tilde{u}'_2 \tilde{u}_3 \tilde{u}'_3],$$

где „штрих“ означает дифференцирование по меридиональной координате.

При таком задании элемента в соответствии с вышеприведенной системой уравнений разрывы по усилиям в случае перехода через узловые окружности исчезнут, но по-прежнему сохранятся разрывы в значениях моментов. При аппроксимации конструкции идентичным ансамблем конечных элементов удастся существенно снизить погрешность вычислений.

Осуществляя выбор вектор-столбца обобщенных узловых перемещений, получаем аппроксимацию компонентов вектора перемещений кубическими полиномами.

Таким образом, основной элемент обеспечивает высокую точность расчета [7—9] в зоне монотонного изменения геометрии элементов тонкостенной оболочки вращения при их небольшом числе, тогда как комбинированный элемент малого размера целесообразно использовать при формулировке условий сопряжения и кинематических граничных условий [9]. В целом рассмотренная модель библиотеки конечных элементов обеспечивает корректное описание и определение всех внутренних силовых факторов вплоть до перерезывающих усилий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лабковская Р. Я., Ткалич В. Л. Библиотека конечных элементов в приложении к упругим чувствительным элементам пластин и мембран датчиков систем управления // Науч.-аналит. журнал „Научная перспектива“. 2010. № 3—4. С. 86—89.
2. Лабковская Р. Я., Ткалич В. Л. Библиотека конечных элементов в приложении к элементной базе микроэлектроники // Сб. тр. „Информационная безопасность, проектирование и технология элементов и узлов компьютерных систем“. СПб: НИУ ИТМО, 2013. Вып. 1. С. 164—171.
3. Лабковская Р. Я., Ткалич В. Л., Пирожникова О. И. Разработка библиотеки конечных элементов для САПР упругих конструкций герконов // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56. № 3. С. 21—24.
4. Лабковская Р. Я. Исследование статики и динамики оболочечных упругих элементов систем управления // 16-я Санкт-Петербургская Ассамблея молодых ученых и специалистов. СПб, 2011. С. 114.
5. Ткалич В. Л. Упругие чувствительные элементы систем управления: Принципы построения, анализ и математическое моделирование: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. СПб, 2001.
6. Арьков Д. П., Гуреева Н. А. Расчет оболочек вращения на основе МКЭ в смешанной формулировке с учетом физической нелинейности // Изв. ВолГТУ. 2010. № 4. С. 128—132.
7. Козлов А. С., Лабковская Р. Я., Пирожникова О. И., Ткалич В. Л. Анализ внутреннего трения материалов сильфонных чувствительных элементов систем управления // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 2. С. 164—168.
8. Лабковская Р. Я., Пирожникова О. И., Ткалич В. Л. Метод повышения надежности упругих чувствительных элементов систем управления и автоматики // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2011. № 1(71). С. 136—138.
9. Лабковская Р. Я., Пирожникова О. И., Ткалич В. Л. Условие и критерий устойчивости упругих чувствительных элементов герконов // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 10. С. 34—37.

Сведения об авторах

- Алексей Сергеевич Козлов** — аспирант; Университет ИТМО, кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем; E-mail: zz.kozlov@gmail.com
- Римма Яновна Лабковская** — канд. техн. наук; Университет ИТМО, кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем; E-mail: labkovskaya@mail.ifmo.ru
- Вера Леонидовна Ткалич** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем; E-mail: vera_leonidovna_tkalich@mail.ru

Рекомендована кафедрой
проектирования и безопасности
компьютерных систем

Поступила в редакцию
05.04.16 г.

Ссылка для цитирования: Козлов А. С., Лабковская Р. Я., Ткалич В. Л. Библиотека конечных элементов в приложении к тонкостенным оболочкам вращения // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 8. С. 708—711.

FINITE ELEMENTS LIBRARY IN THE APPLICATION TO THIN-WALLED SHELLS OF ROTATION

A. S. Kozlov, R. Ya. Labkovskaya, V. L. Tkalich

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: labkovskaya@mail.ifmo.ru

The problem of formation of a finite element library to ensure high accuracy of shell geometry calculations when applied to thin-walled shells of revolution is considered. The mandatory requirements to the final elements in the library to be compiled are formulated. Correctness of the description and definitions of all internal forces up to the shear efforts is proven.

Keywords: finite element, shell of rotation, finite element library

Data on authors

- Alexey S. Kozlov** — Post-Graduate Student; ITMO University, Department of Computer System Design and Security; E-mail: zz.kozlov@gmail.com
- Rimma Ya. Labkovskaya** — PhD; ITMO University, Department of Computer System Design and Security; E-mail: labkovskaya@mail.ifmo.ru
- Vera L. Tkalich** — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Computer System Design and Security; E-mail: vera_leonidovna_tkalich@mail.ru

For citation: Kozlov A. S., Labkovskaya R. Ya., Tkalich V. L. Finite elements library in the application to thin-walled shells of rotation // *Izv. vuzov. Priborostroenie*. 2016. Vol. 59, N 8. P. 708—711 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-8-708-711