УДК 621.396:681.323
DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-10-828-834

СИНТЕЗ РЕКУРСИВНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

С. И. Зиатдинов, Л. А. Осипов

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 190000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kaf53@guap.ru

Рассматриваются особенности создания рекурсивных дискретных систем на базе отсчетов импульсной характеристики. На примере фильтра нижних частот показано, что использование существующей методики расчетов коэффициентов разностного уравнения рекурсивных дискретных систем приводит к отклонению переходных характеристик дискретной системы и непрерывной системы-аналога. Проанализирована методика расчетов коэффициентов разностного уравнения рекурсивных дискретных систем с использованием переходной характеристики. Показано, что такой подход обеспечивает динамические свойства дискретных систем, совпадающие с динамическими свойствами непрерывных систем на всем протяжении переходной характеристики. Предложенная методика может быть использована для синтеза рекурсивных дискретных систем как нижних, так и верхних частот практически любого порядка.

Ключевые слова: *частотная передаточная функция, импульсная характеристика, переходная характеристика, линейная рекурсивная дискретная система, разностные уравнения, коэффициент*

При обработке сигналов широко используются разнообразные линейные системы, с помощью которых решаются задачи фильтрации, дифференцирования, интегрирования, экстраполяции и т.д. В каждом конкретном случае линейная система должна обладать определенными частотными свойствами.

В современных условиях все чаще используются цифровые методы обработки на базе персональных компьютеров или специализированных вычислителей. При этом стоит задача преобразования непрерывных линейных систем в дискретные. Методика синтеза линейных дискретных систем по их непрерывным аналогам достаточно хорошо отработана.

Можно выделить два основных метода синтеза линейных дискретных систем: в частотной и во временной области. В первом случае [1] амплитудно-частотные (АЧХ) и фазочастотные характеристики (ФЧХ) непрерывных линейных систем должны воспроизводиться с минимальной погрешностью. Преобразование частотной передаточной функции непрерывной линейной системы в частотную передаточную функцию дискретной линейной системы осуществляется на базе билинейного преобразования, которое в основном используется для создания фильтров верхних частот и режекторных фильтров.

В случае синтеза линейных дискретных систем во временной области применяется метод инвариантной импульсной характеристики, согласно которому отсчеты импульсной характеристики непрерывных линейных систем используются для вычисления коэффициентов линейного разностного уравнения линейных дискретных систем.

В общем виде частотная передаточная функция линейной дискретной системы в z-плоскости записывается в виде [2]:

$$W(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_nz^{-n}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_nz^{-n}}=\sum_{i=0}^{n}a_iz^{-i}\Bigg/\left(1+\sum_{i=1}^{n}b_iz^{-i}\right),$$

где a_i, b_i — постоянные коэффициенты; n — порядок передаточной функции.

Этому соотношению соответствует разностное уравнение, определяющее алгоритм работы линейной дискретной системы

$$y[k]=a_0x[k]+a_1x[k-1]+\ldots+a_nx[k-n]-b_1y[k-1]-b_2y[k-2]-\ldots-b_ny[k-n]=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_ix[k-i]-\sum_{i=1}^{n}b_iy[k-i], \qquad (1)$$

где $y[k]$, $x[k]$ — отсчеты выходного и входного сигналов дискретной системы.

Синтез дискретной системы при заданном порядке n заключается в выборе коэффициентов a_i и b_i таким образом, чтобы динамические свойства дискретной и непрерывной систем максимально совпадали.

В случае синтеза дискретных систем во временной области импульсная характеристика представляется последовательностью масштабированных отсчетов непрерывной импульсной характеристики $h_i=Th(t_i)$, где $t_i=iT$, T — период следования отсчетов входных и выходных сигналов системы.

При этом коэффициенты разностного уравнения (1) определяются следующим образом [1, 3]:

$$a_0=h_0;\ a_k=h_k+\sum_{i=1}^{k}b_ih_{k-i}; \qquad (2)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}b_ih_{n+k-i}=h_{n+k},\ k=1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Из системы n линейных уравнений (3) находятся коэффициенты b_i, значения a_i рассчитываются последовательно по формуле (2).

Покажем, что в общем случае существующая методика не позволяет с высокой точностью вычислить коэффициенты разностного уравнения, также с ее помощью нельзя отразить истинные физические процессы, протекающие в дискретных фильтрах.

В качестве примера рассмотрим линейную систему в виде фильтра нижних частот (ФНЧ) Баттерворта первого порядка, для которого частотная передаточная функция, импульсная и переходная характеристики определяются соответственно выражениями [1]:

$$W(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega/\omega_{\text{ср}}};\ h(t)=\omega_{\text{ср}}e^{-\omega_{\text{ср}}t};\ g(t)=1-e^{-\omega_{\text{ср}}t}, \qquad (4)$$

где $\omega_{\text{ср}}$ — частота среза.

При этом в соответствии с (2) и (3) коэффициенты разностного уравнения будут иметь вид

$$a_0=h_0;\ a_1=h_1-\frac{h_2}{h_1}h_0;\ b_1=-\frac{h_2}{h_1}$$

или с учетом (4)

$$a_0=\omega_{\text{ср}}T;\ a_1=0;\ b_1=-e^{-\omega_{\text{ср}}T}.$$

В соответствии с (1) разностное уравнение рассматриваемого дискретного фильтра можно записать следующим образом:

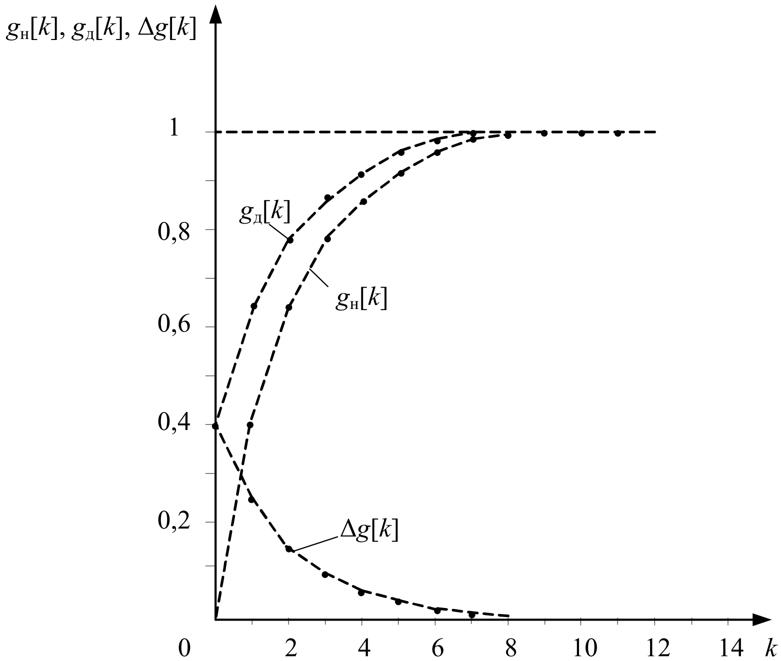
$$y[k]=a_0x[k]-b_1y[k-1]. \qquad (5)$$

Параметры синтезированного рекурсивного дискретного фильтра должны соответствовать параметрам непрерывного фильтра, т.е. переходная характеристика дискретного фильтра должна с максимальной точностью равняться переходной характеристике непрерывного фильтра в дискретные моменты времени $t_i=iT$. Запишем согласно (5) переходную характеристику синтезируемого дискретного фильтра как его реакцию на решетчатое единичное входное воздействие:

$$g_д[k] = a_0 - b_1 g_д[k-1].$$

На рисунке показаны приведенные к уровню единицы переходные характеристики рассматриваемого непрерывного ФНЧ $g_н[k]$ и дискретного ФНЧ $g_д[k]$ для случая $T\omega_{ср} = 0,4$. Здесь же представлено отклонение переходных характеристик непрерывного и дискретного фильтров

$$\Delta g[k] = g_д[k] - g_н[k].$$



Проанализировав представленные результаты расчетов, можно отметить, что для ФНЧ первого порядка в течение переходного процесса $t_{пер} \approx 8T$ отклонение переходных характеристик дискретного и непрерывного фильтров изменяется от 40 % практически до нуля по отношению к установившемуся значению $g_н[\infty] = 1$. Расчеты, проведенные для ФНЧ Баттерворта второго порядка, показали, что отклонение переходных характеристик дискретного и непрерывного фильтров составляет 10 %.

Таким образом, существующая методика определения коэффициентов разностного уравнения рекурсивных линейных систем на базе отсчетов импульсной характеристики не обеспечивает требуемого качества работы дискретных систем в пределах переходного процесса, ею можно пользоваться лишь за пределами переходного процесса.

В полном объеме физические процессы, протекающие как в непрерывных, так и в дискретных линейных системах, описываются их переходными характеристиками. В связи с этим рассмотрим синтез рекурсивных дискретных линейных систем на базе их переходных характеристик.

В соответствии с [1] импульсная характеристика линейной системы является производной от ее переходной характеристики $g(t)$:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}. \qquad (5)$$

При относительно медленных изменениях переходной характеристики для производной можно воспользоваться приближенным соотношением

$$\frac{dg(t)}{dt} \approx \frac{g(t)-g(t-T)}{T} = \frac{1}{T}\Delta g(t), \tag{6}$$

где $\Delta g(t) = g(t) - g(t-T)$.

В результате с учетом соотношений (5) и (6) для выходного сигнала линейной системы можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&y[0] = x[0]\Delta g[0];\\
&y[1] = x[1]\Delta g[0] + x[0]\Delta g[1];\\
&y[2] = x[2]\Delta g[0] + x[1]\Delta g[1] + x[0]\Delta g[2];\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y[k] = x[k]\Delta g[0] + x[k-1]\Delta g[1] + x[0]\Delta g[k],
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\Delta g[0] = g[0]$; $\Delta g[1] = g[1] - g[0]$; $\Delta g[2] = g[2] - g[1]$; ...; $\Delta g[k] = g[k] - g[k-1]$.

В качестве примера рассмотрим линейную дискретную систему второго порядка, для которой разностное уравнение (1) имеет вид

$$y[k] = a_0x[k] + a_1x[k-1] + a_2x[k-2] - b_1y[k-1] - b_2y[k-2]. \tag{8}$$

Для n=0, 1, 2, …, используя (8), можно записать

$$\begin{aligned}
&y[0] = a_0x[0];\\
&y[1] = a_0x[1] + a_1x[0] - b_1y[0];\\
&y[2] = a_0x[2] + a_1x[1] + a_2x[0] - b_1y[1] - b_2y[0];\\
&y[3] = a_0x[3] + a_1x[2] + a_2x[1] - b_1y[2] - b_2y[1];\\
&y[4] = a_0x[4] + a_1x[3] + a_2x[2] - b_1y[3] - b_2y[2];\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{9}$$

Последовательное сравнение сумм (7) и (9) дает следующие результаты

$y[0]$: $a_0 = \Delta g[0] = g[0]$;

$y[1] = [a_1 - b_1\Delta g(0)]x[0] + a_0x[1] = \Delta g[1]x[0] + a_0x[1]$;

$y[1]$: $\Delta g[1] = a_1 - b_1\Delta g(0)$;

$y[2] = [a_2 - b_1\Delta g(1) - b_2\Delta g(0)]x[0] + [a_1 - b_1\Delta g(0)]x[1] + a_0x[2] = \Delta g[2]x[0] + \Delta g[1]x[1] + \Delta g[0]x[2]$;

$y[2]$: $\Delta g[2] = a_2 - b_1\Delta g(1) - b_2\Delta g(0)$;

$y[3] = [-b_1\Delta g(2) - b_2\Delta g(1)]x[0] + \Delta g(2)x[1] + \Delta g(1)x[2] + a_0x[3] = -b_1\Delta g[2] - b_2\Delta g[1]$;

$y[3]$: $\Delta g[3] = -b_1\Delta g[2] - b_2\Delta g[1]$;

$y[4]$: $\Delta g[4] = -b_1\Delta g[3] - b_2\Delta g[2]$.

Для $k \ge 2$ справедливо следующее соотношение:

$$\Delta g[k+1] = -b_1\Delta g[k] - b_2\Delta g[k-1]. \tag{10}$$

Обобщая полученные результаты, можно записать выражения для вычисления коэффициентов разностного уравнения рекурсивной линейной системы

$$a_0 = g[0];$$

$$a_k = \Delta g[k] + \sum_{i=1}^{k} b_i\Delta g[k-i], \; i\text{=1, 2, …, } n; \tag{11}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} b_i\Delta g[n+k-i] = \Delta g[n+k], \; i\text{=1, 2, …} \tag{12}$$

Из системы n линейных уравнений (12) находят коэффициенты b_i, коэффициенты a_k рассчитываются последовательно по формуле (11).

Для подтверждения правильности полученных результатов рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. ФНЧ Баттерворта первого порядка

Рассчитаем коэффициенты разностного уравнения. Частотная передаточная функция, импульсная и переходная характеристики рассматриваемого фильтра определяются выражениями (4).

Используя соотношения (10) и (11), находим:

$$a_0 = g[0] = 0;\ a_1 = \Delta g[1] - \frac{\Delta g[2]}{\Delta g[1]} g[0];\ b_1 = -\frac{\Delta g[2]}{\Delta g[1]}. \tag{13}$$

В результате для рекурсивного дискретного ФНЧ первого порядка при $T\omega_{\text{ср}} = 0,4$ коэффициенты разностного уравнения равны: $a_0 = 0$; $a_1 = 0,393\,469\,34$; $b_1 = -0,606\,530\,66$.

Проведенные расчеты показывают, что в данном случае отклонение переходных характеристик дискретного и непрерывного ФНЧ не превышает 10^{-13}.

Пример 2. Фильтр верхних частот (ФВЧ) первого порядка

В непрерывном варианте этот фильтр обладает следующими частотной передаточной функцией и переходной характеристикой:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_{\text{ср}}}{1 + j\omega/\omega_{\text{ср}}};\ g(t) = e^{-\omega_{\text{ср}} t}.$$

На основании (11) можно записать:

$$a_0 = g[0] = 1;\ a_1 = \Delta g[1] - \frac{\Delta g[2]}{\Delta g[1]} g[0] = -1; \quad b_1 = -\frac{\Delta g[2]}{\Delta g[1]} = -0,606\,530\,66.$$

Как и в случае с ФНЧ первого порядка, отклонение переходных характеристик дискретного и непрерывного ФВЧ первого порядка не превышает 10^{-13}.

Пример 3. ФНЧ Баттерворта второго порядка

Для непрерывного и дискретного времени переходная характеристика ФНЧ Баттерворта второго порядка может быть записана в виде

$$g_{\text{н}}(t) = 1 - e^{\frac{-\omega_{\text{ср}} t}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{-\omega_{\text{ср}} t}{\sqrt{2}} + \cos\frac{-\omega_{\text{ср}} t}{\sqrt{2}}\right);$$

$$g_{\text{н}}[i]) = 1 - e^{\frac{-\omega_{\text{ср}} iT}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{-\omega_{\text{ср}} iT}{\sqrt{2}} + \cos\frac{-\omega_{\text{ср}} iT}{\sqrt{2}}\right).$$

При расчете коэффициентов в этом случае необходимо в формулах (11) и (12) положить n=2, k=1,2. Коэффициенты b_1 и b_2 вычисляются при решении системы уравнений согласно (10):

$$-b_1 \Delta g[2] - b_2 \Delta g[1] = \Delta g[3];$$

$$-b_1 \Delta g[3] - b_2 \Delta g[2] = \Delta g[4].$$

Нетрудно показать, что для рассматриваемого ФНЧ коэффициенты разностного уравнения при $T\omega_{\text{ср}} = 0,5$ принимают значения: $a_0 = 0$; $a_1 = 0,091\,263\,95$; $a_2 = 0,091\,263\,95$; $b_1 = -1,302\,243\,74$; $b_2 = 0,484\,771\,64$.

Расчеты показывают, что в этом случае отклонение переходных характеристик дискретного и непрерывного ФНЧ второго порядка не превышает 0,05 %.

Следует отметить, что с уменьшением значения $T\omega_{ср}$ отклонение переходных характеристик дискретных и непрерывных фильтров как нижних, так и верхних частот резко уменьшается.

Таким образом, в работе показано, что традиционная методика расчетов коэффициентов разностного уравнения линейных рекурсивных дискретных систем на базе отсчетов импульсной характеристики не обеспечивает правильной реализации переходных процессов. Вместе с тем методика расчетов коэффициентов с использованием приращений отсчетов переходной характеристики позволяет получить динамические свойства линейных дискретных систем, совпадающие с динамическими свойствами непрерывных систем как в переходном, так и в установившемся режимах.

Предложенная методика является общей и может быть распространена на рекурсивные дискретные системы как нижних, так и верхних частот практически любого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воробьев С. Н.* Цифровая обработка сигналов. М.: Академия, 2013. 318 с.

2. *Оппенгейм А., Шафер Р.* Мир цифровой обработки сигналов. М.: Техносфера, 2006. 820 с.

3. *Куприянов М. С., Матюшкин Б. Д.* Цифровая обработка сигналов. СПб: Политехника, 2000. 592 с.

Сведения об авторах

Сергей Ильич Зиатдинов — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения;
E-mail: kaf53@guap.ru

Леонид Андронникович Осипов — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения;
E-mail: kaf53@guap.ru

Рекомендована кафедрой
информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию
21.06.16 г.

Ссылка для цитирования: *Зиатдинов С. И., Осипов Л. А.* Синтез рекурсивных дискретных систем во временной области // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 10. С. 828—834.

SYNTHESIS OF RECURSIVE DISCRETE SYSTEMS IN TIME DOMAIN

S. I. Ziatdinov, L. A. Osipov

St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
190000, St. Petersburg, Russia
E-mail: kaf53@guap.ru

Specific problems in development of recursive discrete systems on the base of impulse characteristic readings are considered. By example of the low-frequency filter it is demonstrated that the use of existing methods for real-time calculation of coefficients of difference equation for recursive discrete system gives rise to deviation of the transient characteristics of the discrete system from analogous characteristics of analogous continuous system. The method of calculation of coefficients of difference equation for recursive discrete system with the use of the system transient characteristic is analyzed. The approach is shown to afford dynamic properties of discrete systems coinciding with the dynamic properties of a continuous system throughout the transient response. It is reported that the proposed method may be used for synthesis of recursive discrete systems of both the lower and upper frequencies of almost any order.

Keywords: frequency transmission function, impulse characteristic, transient characteristic, linear recursive discrete system, difference equation, coefficient

Data on authors

Sergei I. Ziatdinov — Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation; E-mail: kaf53@guap.ru

Leonid A. Osipov — Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation; E-mail: kaf53@guap.ru

For citation: *Ziatdinov S. I., Osipov L. A.* Synthesis of recursive discrete systems in time domain // Izv. vuzov. Priborostroenie. 2016. Vol. 59, N 10. P. 828—834 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-10-828-834