УДК 681.51
DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-5-398-403

# СИНТЕЗ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

С. В. Быстров[1], В. В. Григорьев[1], О. К. Мансурова[2], И. М. Першин[3]

[1]*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия*
*E-mail: grigvv@yandex.ru*

[2]*Национальный минерально-сырьевой университет „Горный“, 199106, Санкт-Петербург, Россия*

[3]*Филиал Северо-Кавказского федерального университета, 357501, Пятигорск, Россия*
*E-mail: ivmp@yandex.ru*

Для непрерывных линейных динамических объектов с одним входом и выходом разработана процедура синтеза полиномиальных, в частности линейно-квадратичных, законов управления. Применение таких законов управления позволяет повысить скорость сходимости процессов при больших отклонениях с сохранением качественных показателей процессов при малых отклонениях. Синтез законов управления производится на основе использования методов теории оптимального управления посредством решения модифицированного уравнения Риккати. Доказывается, что используемые законы управления не нарушают свойства асимптотической или экспоненциальной устойчивости в зависимости от выбранного при проектировании типа устойчивости.

***Ключевые слова:*** *линейно-квадратичные законы управления, критерии оптимальности, экспоненциальная устойчивость, матричные уравнения Риккати и Ляпунова*

**Введение.** Методы теории оптимального управления широко используются для синтеза линейных законов управления непрерывными стационарными объектами, обеспечивающих тот или иной вид устойчивости замкнутой системы, а следовательно, и требуемые показатели качества [1—9]. В настоящей статье предпринята попытка распространения этих методов для формирования полиномиальных законов управления непрерывными стационарными объектами с целью повышения скорости сходимости процессов при больших начальных отклонениях с последующим замедлением сходимости при малых отклонениях для обеспечения таких качественных показателей, как перерегулирование и колебательность процессов. Для решения задачи синтеза законов управления используется модифицированное уравнение Риккати, позволяющее искать управление как линейную функцию состояний объекта, которое и используется для формирования полиномиальных управляющих воздействий. Доказывается, что подобные законы управления сохраняют свойство асимптотической или экспоненциальной устойчивости в зависимости от того, какой вид устойчивости был заложен при поиске линейного закона управления при решении уравнения Риккати.

**Постановка задачи.** Рассмотрим линейный непрерывный стационарный объект управления (ОУ), уравнение движения которого имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $x$ — $n$-мерный вектор состояния ОУ, $u$ — скалярное управляющее воздействие, $A$ — $n{\times}n$-квадратная матрица с постоянными коэффициентами, $B$ — $n{\times}1$-матрица входов.

Сформируем закон управления в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^{l} u_0^{2i-1}(t) + \sum_{j=1}^{l} (\mathrm{sgn}(u_0(t)))u_0^{2j}(t), \tag{2}$$

где $l = k/2$, если $k$ — четное число, и $l = k+1/2$, если $k$ — нечетное число, при этом $k$ определяет число членов формирующего управления (2); $u_0$ — номинальное управляющее воздействие как линейная функция вектора состояния

$$u_0(t) = -Kx(t), \tag{3}$$

где $K$ — $1\times n$-матрица линейных стационарных обратных связей (ЛСОС), элементы которой определяют коэффициенты обратных связей по соответствующим переменным вектора состояний $x(t)$; при этом предполагается, что все переменные вектора состояния доступны для измерения.

Таким образом, формируемое управление (2) представляет собой полином степени $k$ от номинального управления (3) .

Ставится задача, с использованием методов теории оптимального управления, определения таких матриц ЛСОС, которые в замкнутой системе для объектов управления (1) с законами управления вида (2), (3) обеспечивают экспоненциальную устойчивость, тесно связанную с таким показателем качества процессов, как быстродействие (время переходного процесса).

**Основной результат.** Синтез линейного закона управления с использованием методов теории оптимального управления для стационарного непрерывного объекта управления (1) с квадратичным критерием качества на бесконечном интервале времени сводится к решению матричного квадратичного уравнения Риккати вида

$$A^T P + PA - \nu K^T RK = -Q \tag{4}$$

при

$$K = R^{-1} B^T P, \tag{5}$$

где $P$ — $n\times n$-симметрическая квадратная матрица, $Q$ — $n\times n$-симметрическая матрица штрафов на вектор состояния объекта, по крайней мере, положительно-полуопределенная; $R$ — ненулевой скаляр, определяющий штраф на управление; $v$ — параметр, принимающий значения от 0 до 2.

Уравнение (4) при подстановке в него выражения (5) является квадратичным уравнением Риккати, имеющим два решения относительно матрицы $P$, из которых выбирается положительно-определенное решение, т.е. такое, при котором матрица $P$ является положительно-определенной.

Заметим, что при значении параметра $v = 0$ уравнение (4) преобразуется в линейное уравнение Ляпунова и его решение относительно матрицы $P$ будет положительно-определенным тогда и только тогда, когда матрица $A$ является устойчивой, т.е. объект управления устойчив. Этот случай соответствует критерию обобщенной работы для нахождения оптимального управления, введенный в работах Красовского [1].

При $v = 1$ получаем уравнение Риккати, соответствующее классическому решению задачи оптимального управления, для которого доказано, что одно из решений уравнения Риккати положительно определено (матрица $P$ — положительно-определенная, и замкнутая система с матрицей ЛСОС (4) будет устойчивой) [3] .

Если $v = 2$ , то уравнение Риккати позволяет решить задачу нахождения оптимального управления, соответствующего принципу оптимальности по принуждению [4]. Отметим, что при данном значении $v$ уравнение Риккати совпадает с уравнением Ляпунова для замкнутой системы с найденным управлением, позволяющим сделать заключение, что если решение уравнения Риккати положительно определено, то система будет асимптотически устойчивой.

Для того чтобы линейный закон управления обеспечивал экспоненциальную устойчивость со степенью сходимости α, модифицируем уравнение (4) следующим образом:

$$A^T P + PA - \nu K^T RK + 2\alpha P = -Q \tag{6}$$

при

$$K = R^{-1}B^{T}P\,. \tag{7}$$

Заметим, что при значении $v$ = 0 требуется, чтобы исходный объект был экспоненциально устойчивым со значением степени сходимости, равным $\alpha$. В дальнейшем основное внимание уделим случаю, когда параметр $v$ = 2, т.е. когда уравнение (6) является модифицированным уравнением Ляпунова, для установления факта, что система с искомым управлением является экспоненциально устойчивой.

Докажем, что если найден закон управления (7) на основании решения уравнения Риккати (6) с заданным значением степени сходимости $\alpha$, то полиномиальный закон управления вида (2), (3) обеспечивает в замкнутой системе экспоненциальную устойчивость со степенью сходимости, равной α.

Положим, что матрица $K$ найдена по выражению (7) в результате решения уравнения Риккати (6) при заданном значении степени сходимости $\alpha$. Вычислим производную по времени от квадратичной функции Ляпунова на всех траекториях движения системы (объект управления (1) с законом управления (2)) и проверим, будет ли выполняться условие экспоненциальной устойчивости [4]:

$$\frac{dV\left(x(t)\right)}{dt} \le -2\alpha V\left(x(t)\right), \tag{8}$$

где $V(x)$ — квадратичная функция Ляпунова вида

$$V\left(x(t)\right) = x^{T}(t)Px(t),$$

а $P$ — положительно-определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения Риккати (6).

Производная от функции Ляпунова для замкнутой системы (объект управления (1) с законом управления (2)) имеет вид

$$\frac{dV(x)}{dt} = x^{T}\left(A^{T}P + PA - K^{T}B^{T}P - PBK\right)x - \sum_{i=1}^{l} u_0^{2i-1}(t)B^{T}Px - \sum_{i=1}^{l} x^{T}PBu_0^{2i-1}(t) -$$

$$-\sum_{j=1}^{l} (\mathrm{sgn}(u_0(t)))u_0^{2j}(t)B^{T}Px - \sum_{j=1}^{l} (\mathrm{sgn}(u_0(t)))x^{T}PBu_0^{2j}.$$

Воспользуемся тем, что матрица $K$ закона управления вычисляется по соотношению (6), тогда выражение для производной от функции Ляпунова примет следующий вид:

$$\frac{dV(x)}{dt} = x^{T}\left(A^{T}P + PA - K^{T}B^{T}P - PBK\right)x - 2\sum_{i=1}^{l} u_0^{2i}R^{-1} - 2\sum_{j=1}^{l} (\mathrm{sgn}\,u_0)u_0 u_0^{2j}R^{-1}$$

или

$$\frac{dV(x)}{dt} = x^{T}\left(A^{T}P + PA - 2K^{T}R^{-1}K\right)x - 2\sum_{i=1}^{l} u_0^{2i}R^{-1} - 2\sum_{j=1}^{l} (\mathrm{sgn}\,u_0)u_0^{2j+1}. \tag{9}$$

Если матрица $P$, определяющая квадратичную функцию Ляпунова (8), найдена как положительно-определенное решение уравнения Риккати (6) при $v$ = 2 и заданной степени сходимости α, то выполняется равенство

$$x^{T}\left(A^{T}P + PA - 2K^{T}RK - 2\alpha P\right)x = -x^{T}Qx,$$

а так как выражение $x^{T}Qx \ge 0$, по крайней мере, положительно полуопределено, справедливо неравенство

$$x^{T}\left(A^{T}P + PA - 2K^{T}RK\right)x \le -2\alpha x^{T}Px\,.$$

При этом в силу того, что квадратичные члены

$$u_0^{2i} R^{-1} \geq 0 \text{ и } (\operatorname{sgn} u_0) u_0^{2j+1} \geq 0,$$

по крайней мере, положительно полуопределены, их добавление в выражение (9) может только усилить его, откуда следует выполнение неравенства

$$\frac{dV(x)}{dt} = x^T \left( A^T P + PA - 2K^T R^{-1} K \right) x - 2\sum_{i=1}^{l} u_0^{2i} R^{-1} - 2\sum_{j=1}^{l} (\operatorname{sgn} u_0) u_0^{2j+1} \leq -2\alpha x^T Px,$$

что подтверждает выполнение условия экспоненциальной устойчивости со степенью сходимости, равной α.

Итак, последовательность процедуры синтеза полиномиальных законов управления (2), обеспечивающих экспоненциальную устойчивость, заключается в следующем. По заданному требованию к быстродействию замкнутой системы, например по времени переходного процесса $t_n$, выбирается заданная степень сходимости процесса по соотношению

$$\alpha = 3/t_n .$$

Далее решается матричное уравнение Риккати (6) относительно матрицы $P$ с последующим вычислением матрицы $K$ по выражению (7) , в результате формируется закон управления вида (2).

**Заключение.** Предложена процедура вычисления полиномиальных законов управления на основе использования методов теории оптимального управления, которые обеспечивают экспоненциальную устойчивость с заданной степенью сходимости процессов, назначаемую согласно требуемому быстродействию системы. Для оценки качества процессов и построения областей, в которых реализуются эти показатели, можно использовать результаты работ [9, 10].

Перспективным представляется использование подобных законов управлений в системах с распределенными параметрами [11], а также в системах пространственного слежения [12], в которых при наличии на входе объекта нелинейности, имеющей при больших отклонениях ниспадающий участок пеленгационной характеристики, квадратичная составляющая закона управления позволяет ускорить сходимость процессов.

Статья подготовлена по результатам работы, выполненной при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01) и Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0031).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами / *А. А. Красовский, В. Н. Буков, В. С. Шендрик*; под ред. *А. А. Красовского*. М.: Наука, 1977, 271 с.

2. *Nair G. N., Evans R. I.* Exponential stabilisability of finite-dimensional linear systems with limited data rates // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 585—593.

3. *Брайсон А., Хо Ю-Ши*. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

4. *Фурасов В. Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 247 с.

5. *Воронов А. А.* Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. М.: Энергия, 1981. 303 с.

6. Qualitative exponential stability and instability of dynamical systems / *V. V. Grigoriev, O. K. Mansurova.* St. Petersburg, 2001. Preprints of 5th IFAK Symp. on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'01).

7. *Bystrov S. V., Grigoriev V. V.* Qualitative exponential stability and instability of dynamical systems and range estimation of parameter acceptable changes // Universal Journal of Control and Automation. 2013. Vol. 1, N 1. P. 15—18. DOI 10.13189.

8. *Быстров С. В., Григорьв В. В., Рабыш Е. Ю., Мансурова О. К.* Анализ качества переходных процессов в непрерывных и дискретных системах на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 9. С. 32—36.

9. *Григорьев В. В., Быстров С. В., Наумова А. К., Рабыш Е. Ю., Черевко Н. А.* Использование условий качественной экспоненциальной устойчивости для оценки динамических процессов // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 6. С. 24—30.

10. *Бобцов А. А., Быстров С. В., Григорьев В. В., Дудров П. В., Козис Д. В., Костина О. В., Мансурова О. К.* Построение областей допустимых изменений параметров гарантированного качества процессов динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 10. С. 2—5.

11. *Быстров С. В., Григорьев В. В., Мансурова О. К., Першин И. М.* Анализ устойчивости линейных систем с распределенными параметрами. Мехатроника, автоматизация, управление // Новые технологии. 2013. № 9. С. 2—5.

12. *Григорьев В. В., Мотылькова М. М., Мансурова О. К.* Построение регуляторов для систем пространственного слежения // Изв. вузов. Приборостроение. 2007. Т. 50, № 11. С. 24—29.

***Сведения об авторах***

***Сергей Владимирович Быстров*** — канд. техн. наук, доцент; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: sbystrov@mail.ru

***Валерий Владимирович Григорьев*** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: grigvv@yandex.ru

***Ольга Карибековна Мансурова*** — канд. техн. наук, доцент; Университет „Горный“, кафедра автоматизации технологических процессов и производств; E-mail: erke7@mail.ru

***Иван Митрофанович Першин*** — д-р техн. наук, профессор; Филиал СКФУ, кафедра управления в технических и биотехнических системах; Пятигорск; E-mail: ivmp@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики
НИУ ИТМО

Поступила в редакцию
23.12.16 г.

**Ссылка для цитирования:** *Быстров С. В., Григорьев В. В., Мансурова О. К., Першин И. М.* Синтез полиномиальных законов управления для непрерывных динамических объектов // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 5. С. 398—403.

## SYNTHESIS OF POLYNOMIAL CONTROL LAWS FOR CONTINUOUS DYNAMIC OBJECTS

**S. V. Bystrov[1], V. V. Grigoriev[1], O. K. Mansurova[2], I. M. Pershin[3]**

[1] *ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia*
*E-mail: grigvv@yandex.ru*

[2] *National Mineral Resources University, 199106, St. Petersburg, Russia*

[3] *Branch of the North-Caucasian Federal University, 357501, Pyatigorsk, Russia*
*E-mail: ivmp@yandex.ru*

For continuous linear dynamic objects with a single inlet and outlet, a procedure of synthesis of polynomial (linear-quadratic) control laws is developed. The use of these control laws can improve the speed of convergence processes for large deviations while maintaining quality indicators processes for small deviations. Synthesis of control laws is based on the use of methods of optimal control theory by solving the Riccati type equation. The control laws are proved not to violate the asymptotic or exponential stability property depending on the type of stability adopted in design.

**Keywords:** linear quadratic control laws, optimality criteria, exponential stability, Riccati and Lyapunov matrix equations

***Data on authors***

***Sergey V. Bystrov*** — PhD, Associate Professor; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: sbystrov@mail.ru

***Valery V. Grigoriev*** — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: grigvv@yandex.ru

***Olga K. Mansurova*** — PhD, Associate Professor; University of Mines, Department of Technological Process Automation and Production; E-mail: erke7@mail.ru

***Ivan M. Pershin*** — Dr. Sci., Professor; North-Caucasian Federal University, Branch in Pyatigorsk, Department of Control in Technical and Biotechnical Systems; E-mail: ivmp@yandex.ru

**For citation**: *Bystrov S. V., Grigoriev V. V., Mansurova O. K., Pershin I. M.* Synthesis of polynomial control laws for continuous dynamic objects // Journal of Instrument Engineering. 2017. Vol. 60, N 5. P. 398—403 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-5-398-403