УДК 536.6
DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-7-664-671

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПУТЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Н. В. Пилипенко

Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: pilipenko38@mail.ru

Предложен метод оценивания неопределенности восстановления нестационарного теплового потока путем параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей теплопереноса в системе тел. Сформулированы требования к конструкциям преобразователей нестационарного теплового потока, математическим моделям теплопереноса в системе тел, характеру изменения теплового потока и методам его восстановления. Использован фильтр Калмана по искомым параметрам для минимизации невязки между измеренными и модельными значениями параметров. Получены выражения для функций чувствительности, которые отражают все значимые факторы нестационарной теплометрии: вид и параметры теплопереноса в преобразователях теплового потока, количество и местоположение точек измерения температуры или ее перепадов, качество каналов регистрации измеряемых величин, особенности входных воздействий. Получены зависимости для определения матрицы Грама (информационной матрицы Фишера) для системы векторов функций чувствительности, которые позволяют рассчитать доверительные области измерения искомых параметров. Рассмотренный метод оценивания неопределенности восстановления теплового потока позволяет определить границы применения метода с учетом допустимой неопределенности; разработать требования к используемым преобразователям теплового потока, выбрать их тип и конструкцию, отвечающую предъявляемым требованиям; создать преобразователь с заданными характеристиками. Рассмотрен пример установления доверительной области при измерении нестационарного теплового потока с помощью батарейного преобразователя.

Ключевые слова: *неопределенность измерения нестационарного теплового потока, параметрическая идентификация дифференциально-разностных моделей, фильтр Калмана, матрица Грама*

Метод параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей теплопереноса в системах тел в последние годы широко используется для восстановления нестационарных условий теплообмена. При этом решаются прямые, обратные и комбинированные задачи, в которых определяется, по измеренным в эксперименте температурам, тепловой поток и уточняются теплофизические свойства материалов объектов исследования [1—7]. При этом безусловно учитываются возникающие общие неопределенности, присущие как нестационарной, так и стационарной теплометрии, вызванные неоднородностью измерительной среды, влиянием преобразователей теплового потока на теплообмен и температурное поле объекта исследования. Эти источники неопределенности детально исследованы в работах [8, 9] и в настоящей статье не рассматриваются. Остановимся здесь только на неопределенности восстановления нестационарного теплового потока путем параметрической идентификации, которая в литературе [10, 11], по мнению автора, освещена недостаточно.

Вначале кратко изложим сущность параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей теплопереноса в объектах исследования [1—3]. Это необходимо для лучшего понимания дальнейшего изложения метода оценивания неопределенности восстановления нестационарного теплового потока с использованием различных типов преобразователей теплового потока (ПТП). Отметим, что метод оценивания неопределенности является общим практически для всех известных ПТП, модели которых представлены на рис. 1 [3], где *а* — однородный ПТП; *б* — двухсоставной неоднородный ПТП с контактным тепловым сопротивлением ($R_{\text{к}}$); *в* — комбинированный ПТП с воздушной прослойкой; *г* — ПТП типа тонкого диска; *д* — однородный ПТП на полуограниченном теле с контактным тепловым сопротивлением; *е* — батарейный ПТП.

Для упрощения решения задачи примем ряд требований и допущений, относящихся к конструкциям ПТП, математическим моделям теплопереноса, характеру изменения теплового потока $q(\tau)$ и методу его восстановления:

— при восстановлении потока $q(\tau)$ измеряется температура рабочей поверхности ПТП либо перепад температуры между нею и другой точкой преобразователя; выполнение этого требования переводит граничную обратную задачу теплопроводности в разряд псевдообратных и позволяет судить о начале действия $q(\tau)$;

— известны априорные сведения о характере изменения $q(\tau)$, что позволяет выполнить его кусочно-линейную В-сплайн-аппроксимацию и на каждом ее участке выделить вектор искомых параметров $\mathbf{Q}$ [1]:

$$\mathbf{Q} = \left| q_a \quad q_b \right|^T, \tag{1}$$

где q_a, q_b — значения потока в начале и в конце участка сплайн-аппроксимации.

Принятые допущения позволяют для оценивания неопределенности использовать алгоритм цифрового фильтра Калмана [12—15], который по сути является рекуррентной процедурой обобщенного метода наименьших квадратов, минимизирующей по вектору искомых параметров $\mathbf{Q}$ функцию невязки $\Phi(\mathbf{Q})$:

$$\Phi(\mathbf{Q}) = \sum_{k=1}^{l} \left[\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\mathbf{Q}) \right] R^{-1} \left[\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\mathbf{Q}) \right]^T, \tag{2}$$

где $\mathbf{Y}_k$ — вектор измерения температуры, включающий вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ случайных погрешностей измерений; $\hat{\mathbf{Y}}_k(\mathbf{Q})$ — модельные (расчетные) значения вектора измерений; R — ковариационная матрица ошибок случайных измерений; k— дискретное время.

Входящая в фильтр Калмана m×2-матрица функций чувствительности имеет следующий вид [2]:

$$H_{k+1} = \left. \frac{\partial \mathbf{Y}_k}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}_k} = \begin{vmatrix} U_{1q_a(k+1)} & U_{1q_b(k+1)} \\ U_{2q_a(k+1)} & U_{2q_b(k+1)} \\ \cdots & \cdots \\ U_{mq_a(k+1)} & U_{mq_b(k+1)} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

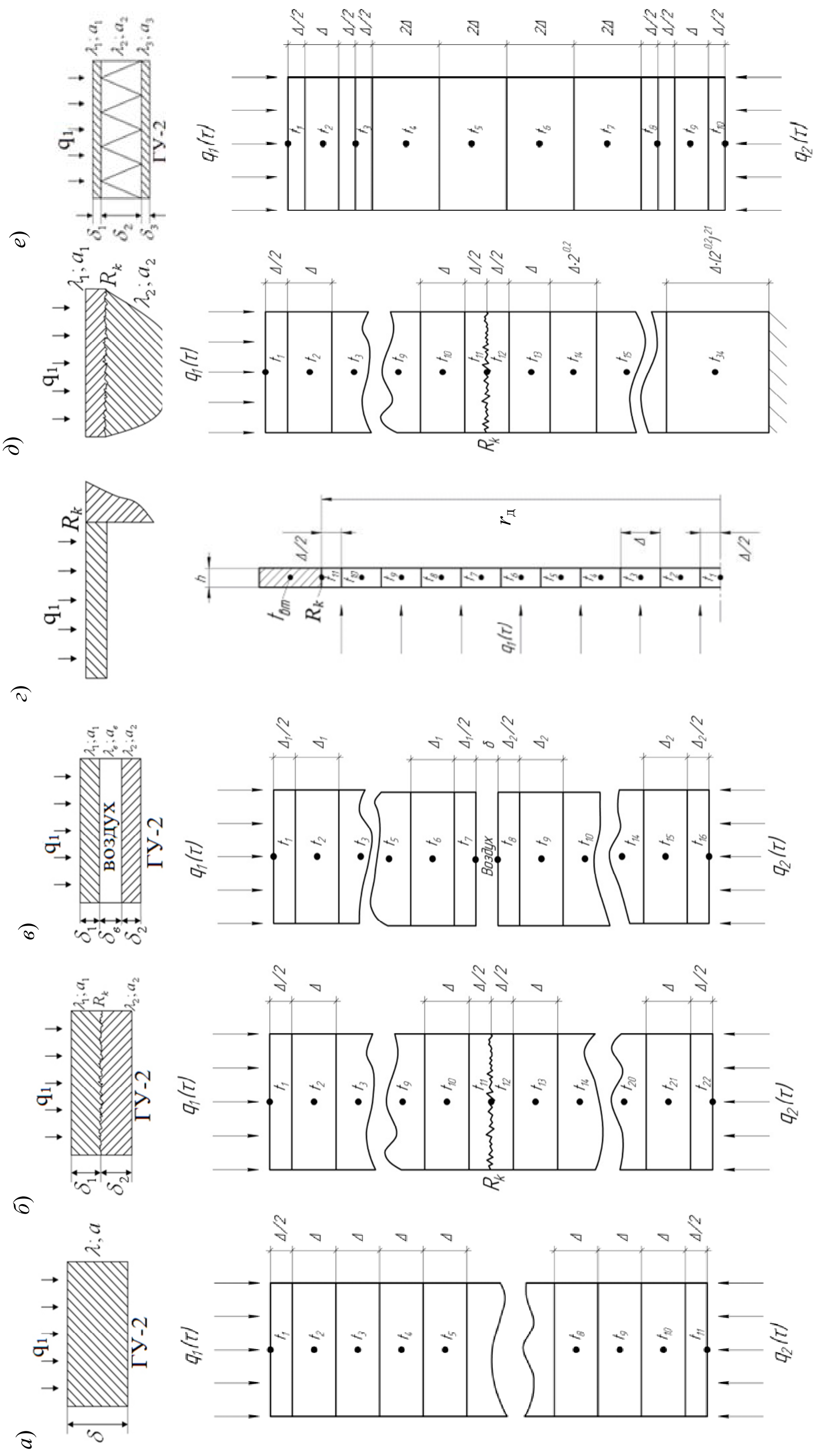

Рис. 1

Составляющие матрицы H_{k+1}

$$U_{jq_a(k+1)} = \left.\frac{\partial y_{j,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_a}\right|_{\mathbf{Q}=\hat{\mathbf{Q}}_k}, \quad U_{jq_b(k+1)} = \left.\frac{\partial y_{j,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_b}\right|_{\mathbf{Q}=\hat{\mathbf{Q}}_k} \tag{4}$$

являются функциями чувствительности *j*-го измерения $y_i\left(\hat{\mathbf{Q}}_k\right)$ к искомым параметрам q_a и q_b в $(k+1)$-й момент времени $(k = 1, 2, ..., l)$. Значения функций чувствительности рассчитываются по известной *k*-й оценке $\hat{\mathbf{Q}}_k$ вектора искомых параметров путем решения уравнения теплопереноса, при этом общий, всегда практически реализуемый, универсальный метод их определения — вычисление по следующим формулам [1]:

$$\begin{aligned} U_{jq_a(k+1)} &= \frac{y_{j(k+1)}\left(\hat{q}_{ak} \mp \Delta q_a, \hat{q}_{bk}\right) - y_{j(k+1)}\left(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk}\right)}{\Delta q_a}, \\ U_{jq_b(k+1)} &= \frac{y_{j(k+1)}\left(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk} \pm \Delta q_b\right) - y_{j(k+1)}\left(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk}\right)}{\Delta q_b}. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, для построения матрицы H_{k+1} для $(k+1)$-го момента времени необходимо по формулам (5) определить изменение во времени значений функции чувствиительности.

Ковариационная матрица $R(\hat{\mathbf{Q}})$, входящая в фильтр Калмана, является характеристикой точности оценок $\hat{\mathbf{Q}}$ и имеет вид [12]

$$R(\hat{\mathbf{Q}}_l) = \sigma^2 \left(\sum_{k=1}^{l} H_k^T H_k \right)^{-1}, \tag{6}$$

где σ^2 — среднеквадратическое отклонение при измерении температуры (влияние шума при измерениях).

Выражение в скобках в формуле (6) является матрицей Грама A_l для системы векторов функций чувствительности (она же — аналог информационной матрицы Фишера). В рассматриваемом случае при измерении температуры на поверхности ПТП [12]

$$A_l(\hat{\mathbf{Q}}_l) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{l} U_{q_{ak}}^2, \quad a_{22} = \sum_{k=1}^{l} U_{q_{bk}}^2, \quad a_{21} = a_{12} = \sum_{k=1}^{l} U_{q_{ak}} U_{q_{bk}}. \tag{8}$$

После определения элементов матрицы Грама можно рассчитать абсолютные неопределенности измерения значений $\pm\Delta q_a$ и $\pm\Delta q_b$ для первого участка сплайн-аппроксимации теплового потока. Поскольку, как указывалось ранее, фильтр Калмана является рекуррентной процедурой, не представляет трудности определить параметры $\pm\Delta q_c, \pm\Delta q_d$ и т.д., т.е. определить значения указанных параметров на каждом участке сплайн-аппроксимации и, таким образом, установить доверительную область по всем интервалам измерения искомого теплового потока $q(\tau)$ [11—13]:

$$\Delta q_a = \pm\sigma\sqrt{\frac{-a_{22}B}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}},\ \Delta q_b = \pm\sigma\sqrt{\frac{-a_{11}B}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}, \quad (9)$$

где $B = \chi_{1-\alpha}^2$, α — заданная вероятность, χ^2 — квадрат распределения с вероятностью $1-\alpha$ [13, 14]; если $\alpha = 0,95$, то $B = \chi_{1-0,95}^2 = 5,911$.

На кафедре компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга Университета ИТМО разработан программный комплекс для решения граничных и коэффициентных обратных задач теплопроводности, восстановления нестационарных тепловых потоков и уточнения теплофизических свойств ПТП, а также установления доверительных областей восстанавливаемых параметров [15].

Рассмотрим пример определения доверительной области при восстановлении нестационарного теплового потока с помощью батарейного ПТП (см. рис. 1, *е*). Отметим, что доверительные области получены для всех ПТП, представленных на рис. 1.

На рис. 2 показаны характер измерений в ходе эксперимента температуры $t(\tau)$ и теплового потока $q(\tau)$, восстановленного по разработанной программе "Heat Identification" [15] с использованием фильтра Калмана. Необходимо установить доверительную область восстановленного теплового потока $q(\tau)$.

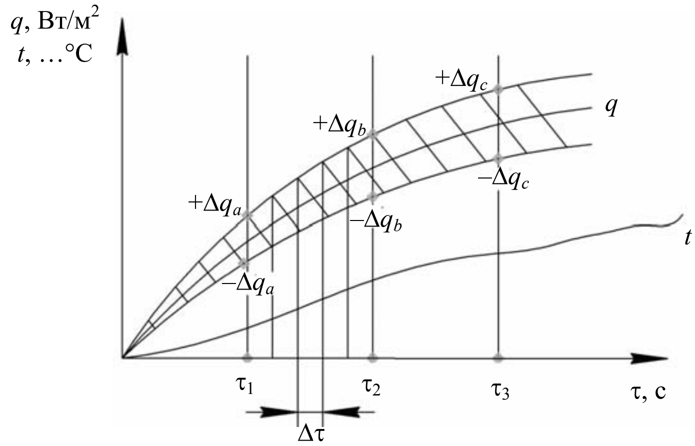

Рис. 2

Для решения задачи разбиваем один из интервалов сплайн-аппроксимации (в частности, от τ_1 до τ_2) на участки $\Delta\tau$ (например, 5 участков) и рассчитываем, с использованием указанной программы, температуры, соответствующие полученному потоку на границах участков:

$$t = \begin{pmatrix} 23,10 \\ 33,37 \\ 40,87 \\ 46,37 \\ 52,17 \end{pmatrix} °\text{C} \text{ — значения для моментов времени } \tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{с.}$$

Для определения функций чувствительности по формулам (4) задаем приращение $\gamma = 0,01$ вначале для q_a, а затем, зафиксировав q_a, — для q_b и рассчитываем температуры на участках:

$$t_{q_a} = \begin{pmatrix} 23,29 \\ 33,61 \\ 41,14 \\ 46,67 \\ 52,48 \end{pmatrix} °\text{C},\ t_{q_b} = \begin{pmatrix} 23,29 \\ 33,45 \\ 41,01 \\ 46,58 \\ 52,48 \end{pmatrix} °\text{C} \text{ — значения для моментов времени } \tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{с.}$$

Определяем функции чувствительности по формулам (4):

$$U_{q_a} = \begin{pmatrix} 1,92\cdot10^{-3} \\ 2,45\cdot10^{-3} \\ 2,74\cdot10^{-3} \\ 2,97\cdot10^{-3} \\ 3,08\cdot10^{-3} \end{pmatrix} \text{м}^2\cdot°\text{C}/\text{Вт},\ U_{q_b} = \begin{pmatrix} 1,46\cdot10^{-4} \\ 3,93\cdot10^{-4} \\ 7,09\cdot10^{-4} \\ 1,09\cdot10^{-3} \\ 0,52\cdot10^{-3} \end{pmatrix} \text{м}^2\cdot°\text{C}/\text{Вт}.$$

Находим коэффициенты матрицы Грама по формулам (8), по которым и определяем q_a и q_b:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{5} U_{q_{ak}}^2,\ a_{11} = 3,5\cdot10^{-5}\ \frac{\text{К}^2\cdot\text{м}^4}{\text{Вт}^2};$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{5} U_{q_{bk}}^2,\ a_{22} = 4,2\cdot10^{-6}\ \frac{\text{К}^2\cdot\text{м}^4}{\text{Вт}^2};$$

$$a_{21} = a_{12} = \sum_{k=1}^{5} U_{q_{ak}} U_{q_{bk}},\ a_{21} = a_{12} = 1,1\cdot10^{-5}\ \frac{\text{К}^2\cdot\text{м}^4}{\text{Вт}^2};$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,55\cdot10^{-5} & 1,108\cdot10^{-5} \\ 1,108\cdot10^{-5} & 4,162\cdot10^{-6} \end{vmatrix};$$

$$\Delta q_a = \pm\sigma\sqrt{\frac{-a_{22}B}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}},\ \Delta q_a = \pm 0,99\cdot10^3\cdot\sigma\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

$$\Delta q_b = \pm\sigma\sqrt{\frac{-a_{11}B}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}},\ \Delta q_b = \pm 2,92\cdot10^3\cdot\sigma\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

При вычислении Δq_a и Δq_b приняты значения $\sigma = 1$ °C и $B = 5,911$.

В заключение отметим, что рассмотренный метод оценивания неопределенности восстановления нестационарных тепловых потоков позволяет определить границы применения метода с учетом допустимой неопределенности; разработать требования к используемым ПТП; выбрать тип и конструкцию ПТП, отвечающую предъявляемым требованиям; выполнить проектирование ПТП с заданными характеристиками [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пилипенко Н. В.* Методы параметрической идентификации в нестационарной теплометрии. Ч. 2 // Изв. вузов. Приборостроение. 2003. Т. 46, № 10. С. 67—71.

2. *Симбирский Д. Ф.* Температурная диагностика двигателей. Киев: Техника, 1976. 208 с.

3. *Pilipenko N.* Parametrical identification of differential-difference heat transfer models in non-stationary thermal measurements // Heat Transfer Research. 2008. Vol. 39, N 4. P. 311—315.

4. *Алифанов О. М.* и др. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем: Учеб. пособие. М.: Логос, 2001. 400 с.

5. *Алифанов О. М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. Введение в теорию обратных задач теплообмена. М.: Машиностроение, 1979. 216 с.

6. *Бек Д., Блакуэлл Б., Сент-Клер Ч., мл.* Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.

7. *Артюхин Е. А.* Оптимальное планирование эксперимента при идентификации процессов теплообмена // ИФЖ. 1989. Т. 56, № 3. С. 378—382.

8. *Ярышев Н. А.* Теоретические основы измерения нестационарной температуры. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 256 с.

9. *Ярышев Н. А.* Научная школа и школа жизни. СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. 296 с.

10. *Симбирский Е. Ф., Гольцов А. С., Бут Е. Н.* О погрешности дифференциально-разностной аппроксимации одномерного уравнения теплопроводности // Теплофизика и теплотехника. 1977. Вып. 33. С. 92—96.

11. *Симбирский Д. Ф.* Метрология косвенных измерений // Измерительная техника. 1983. № 1. С. 12—14.

12. *Пилипенко Н. В.* Методические погрешности определения нестационарных условий теплообмена при параметрической идентификации // Измерительная техника. 2007. № 8. С. 54—59.

13. *Худсон Д.* Статистика для физиков. М.: Мир, 1970. 296 с.

14. *Химельблау Д. Т.* Анализ процессов статистическими методами: Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 957 с.

15. *Пилипенко Н. В., Кириллов К. В.* Алгоритмы программ для решения прямых и обратных задач теплопроводности при использовании дифференциально-разностных моделей // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2010. № 5(69). С. 106—109.

16. *Пилипенко Н. В., Казарцев Я. В.* Оптимальное планирование эксперимента при идентификации процессов теплообмена сенсоров теплового потока // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 5. С. 88—93.

Сведения об авторе

Николай Васильевич Пилипенко — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, кафедра компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга; E-mail: pilipenko38@mail.ru

Рекомендована кафедрой компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга

Поступила в редакцию 01.03.17 г.

Ссылка для цитирования: *Пилипенко Н. В.* Неопределенность восстановления нестационарного теплового потока путем параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей теплопереноса // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 7. С. 664—671.

UNCERTAINTY OF NON-STATIONARY HEAT FLUX RECOVERY BY PARAMETRIC IDENTIFICATION OF DIFFERENTIAL-DIFFERENCE MODEL OF HEAT TRANSMISSION

N. V. Pilipenko

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: pilipenko38@mail.ru

A method is proposed for assessment of uncertainty in recovering non-stationary heat flux by parametric identification of differential-difference models of heat transfer in the system of bodies. The requirements imposed upon the structure of non-stationary heat flux transducers, mathematical models of heat transfer in the body system, and the nature of heat flux change and the used recovery methods are formulated. A Kalman filter with required parameters is employed to minimize the discrepancy between measured values and the model parameters. Mathematical expressions derived for the sensitivity functions describes the effects of all relevant factors of non-stationary thermometry including type and parameters of heat transfer in the heat flux transducers (HFT), number and location of temperature measuring points or drops, the quality of recording channels of measured quantities, specific of input actions. Obtained dependences determining the Gram matrix (the Fisher information matrix) for system of vectors of sensitivity functions allow to calculate the confidential region for measurement of the desired parameters. The proposed method of uncertainty estimation for heat flux recovery makes it possible to determine the boundaries of the method applicability with the account for permissible uncertainty, to formulate requirements for the used HFT, select the type and structure of HFT that meets the requirements, create HFT with desired characteristics. An example of confidence region determination for non-stationary flux measurement using battery HFT is presented.

Keywords: uncertainty of non-stationary heat flux measurement, parametric identification of differential-difference models, Kalman filter, Gram matrix

Data on author

Nikolay V. Pilipenko — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Computer Thermal Physics and Energy-Physical Monitoring; E-mail: pilipenko38@mail.ru

For citation: Pilipenko N. V. Uncertainty of non-stationary heat flux recovery by parametric identification of differential-difference model of heat transmission. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 7. P. 664—671 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-7-664-671