УДК 517.14
DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-8-721-727

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ АЛФРЕЯ В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. А. Смагин, И. А. Карабельников, И. С. Петрова

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, 197198, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: va_smagin@mail.ru

Предложено приближенно получать численные значения функций, изображения которых представлены сложными преобразованиями Лапласа, с помощью формулы Т. Алфрея. Данная формула была получена при изучении механических свойств высокополимеров, она основана на способе фильтрации дельта-функцией подынтегрального выражения преобразования Лапласа. В качестве примера приведено решение интегрального уравнения с временной избыточностью для определения вероятности выполнения задания системой. Попытки повысить точность обратного преобразования с применением математического аппарата Хаара или Уиддера не увенчались успехом.

Ключевые слова: *преобразование Лапласа, обратное преобразование, формула Алфрея, интегральное уравнение с временной избыточностью, вероятность выполнения задания, метод моментов, информационная работа*

Введение. Интегральные преобразования Лапласа применяются во многих областях математики, особенно для решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также в теории случайных процессов. Функцию $F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ называют преобразованием Лапласа функции $f(t)$. Здесь p рассматривается как комплексная переменная. Функция $f(t)$ называется обратным преобразованием Лапласа для $F(p)$. Во многих книгах приводятся таблицы как для прямого, так и обратного преобразования Лапласа. Однако для многих достаточно сложных выражений прямого преобразования Лапласа в таблицах не содержится готовых выражений обратного преобразования. Это значительно затрудняет работу исследователей, особенно в теории случайных процессов. В ряде случаев на помощь приходят приближенные аналитические выражения для получения обратных преобразований, предложенные Алфреем, Хааром и Уиддером. В настоящей статье освещены некоторые возможности работы в теории случайных процессов с формулой, предложенной Т. Алфреем [1].

Обратное преобразование Лапласа формулой Алфрея. В работе [1] формула приближенного обращения преобразования Лапласа, предложенная Алфреем, для изучения механических свойств высокополимеров имеет вид:

$$f(t) = s\,F(s)\Big|_{s=\frac{1}{t}}. \tag{1}$$

Здесь $f(t)$ — оригинал, изображение, $F(s)$ — преобразование Лапласа оригинала, t — вещественная переменная времени, s — комплексная переменная Лапласа. Формула (1) получена автором на основе свойства фильтрации дельта-функцией Дирака подынтегрального выражения в преобразовании Лапласа.

В книге [2] приведен интеграл Лапласа, связывающий функцию релаксации с функцией ее спектра

$$\overline{\psi}(t)=\int\limits_0^\infty \overline{N}(s)e^{-ts}ds\,, \tag{2}$$

где $\bar{\psi}(t)$ — функция релаксации, $\bar{N}(s)$ — функция спектра. Основной задачей в [2] является вычисление спектра. При этом приближенные формулы для вычисления спектра можно получить непосредственно из определяющего интеграла (2), если заменить экспоненциальную функцию в подынтегральном выражении каким-либо приближением. Так, например, Алфрей [2] применил такое приближение:

$$e^{-ts} = \begin{cases} 1, \ s \le \dfrac{1}{t}, \\ 0, \ s > \dfrac{1}{t}. \end{cases} \tag{3}$$

Из уравнения (2) получают

$$\bar{\psi}(t) = \int_0^{1/t} \bar{N}(s)ds. \tag{4}$$

Дифференцирование интеграла по верхнему пределу дает

$$\bar{\psi}'(t) = -\bar{N}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2},$$

а после обращения переменной

$$\bar{N}(s) = -\frac{1}{s^2}\bar{\psi}'\left(\frac{1}{s}\right). \tag{5}$$

Эта формула совпадает с первым приближением по формуле Уиддера:

$$N(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{s}\right)^{n+1} \psi^{(n)}\left(\frac{n}{s}\right), \tag{6}$$

оно позволяет более простым способом вычислить обращение интеграла Лапласа, по сравнению с численным его обращением [2]. В формуле (6) $\psi^{(n)}(n/s)$ — n-я производная функции $\psi(t)$, в которой после дифференцирования переменная t заменена на n/s. Известно, что вычисление производной для эмпирически определенной функции — операция весьма нежелательная из-за низкой точности результата. Практически можно вычислить не более чем вторую производную. Поэтому формула Уиддера обычно ограничена вторым приближением. Для справки приведем формулу первого приближения и второго обращения:

$$\bar{N}_1(s) = -\frac{1}{s^2}\bar{\psi}'\left(\frac{1}{s}\right) \tag{7}$$

и формулу второго приближения

$$\bar{N}_2(s) = \frac{4}{s^3}\psi''\left(\frac{2}{s}\right). \tag{8}$$

Этим можно ограничиться, так как нам в дальнейшем не нужны вычисления только вероятностей для различных распределений.

Кроме приближения (3) в работе [3] было предложено следующее приближение для экспоненциальной функции:

$$se^{-ts} = \frac{\delta(s - 1/t)}{t^2}, \tag{9}$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Из определяющего интеграла (2) получают формулу

$$\overline{\psi}(t)=\int_0^\infty \frac{\overline{N}(s)}{s} s e^{-ts} ds=\int_0^\infty \frac{\overline{N}(s)}{s}\frac{\delta(s-1/t)}{t^2} ds=\frac{1}{t^2}\frac{\overline{N}(1/t)}{1/t}=\frac{\overline{N}(1/t)}{t}, \tag{10}$$

которую можно считать нулевым приближением к (1).

Рассмотрим простейший пример. Пусть вероятность безотказной работы системы при экспоненциальном законе $P(t)=e^{-\lambda t}$, где λ — интенсивность отказа системы. В преобразовании Лапласа $P^*(s)=\dfrac{1}{s+\lambda}$. Применив формулу Алфрея, получим

$$P(t)=sP^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{t}}=\frac{1}{1+\lambda t}.$$

Применив формулу (10), получим

$$P(t)=\frac{P^*(s)}{t}=\frac{1}{t\left(\frac{1}{t}+\lambda\right)}=\frac{1}{1+\lambda t},$$

т.е. результат тот же, что и по формуле Алфрея.

Приведенное выражение дает большее значение $P(t)$, и тем больше, чем больше время *t*. Для неэкспоненциальных выпуклых распределений приближение по форме более правильное. Но остается без ответа вопрос о том, как найти более точное определение оригинала по изображению Лапласа. Попытки авторов использовать для повышения точности обращения преобразования Лапласа на основе методов Меллина, Хаара и Уиддера [4] не дали желаемых результатов.

Применение формулы Алфрея в вероятностном анализе и теории случайных процессов. При решении практических задач иногда приходится обращаться с интегральными уравнениями, представленными в преобразовании Лапласа. При неэкспоненциальных распределениях в замкнутом виде решать их затруднительно. Рассмотрим одно частное интегральное уравнение с временной избыточностью. Пусть некоторая система должна непрерывно в течение установленного времени τ безошибочно решить задачу. Если отказ наступает раньше истечения τ, то задача начинает решаться сначала. Этот процесс может продолжаться до тех пор, пока хватит избыточного времени t для однократного успешного решения задачи длительностью τ.

Формально можно записать интегральное уравнение для определения вероятности успешного решения задачи:

$$P(\tau,t)=P(\tau,0)+\int_0^\tau a(\xi)q(\xi)P(\tau,t-\xi)d\xi, \tag{11}$$

где $P(\tau,0)$ — вероятность успешного решения задачи с первого раза, $a(\xi)$ — плотность распределения вероятности времени решения задачи в момент отказа ξ, определяемая как $a(t)=-P'(t)$, $q(\xi)$ — вероятность обнаружения встроенной системой контроля момента отказа ξ, а $P(\tau,t-\xi)$ — вероятность успешного решения задачи длительностью τ при величине оставшегося избыточного времени для ее решения $t-\xi$.

Соотношение (11) носит название интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода с разностным ядром, оно отличается от стандартного уравнения наличием параметра $q(t)$ и усеченной величиной верхнего предела у интеграла τ вместо переменного значения времени t. Решить это уравнение можно либо численным методом, либо с применением преобразования Лапласа.

Применяя преобразование Лапласа по переменной t, решение уравнения (11) можно представить в следующем виде:

$$P^*(\tau,\mathrm{s})=\frac{P(\tau,0)}{s\left(1-\int\limits_0^\tau a(\xi)q(\xi)e^{-s\xi}d\xi\right)}. \tag{12}$$

Пример 1. Используя выражение (12) и формулу Алфрея при численных значениях параметров $m=20\,\text{ч}, \sigma=6\,\text{ч}, a(t)=\mathrm{dnorm}(t,m,\sigma), \tau=10\,\text{ч}, q_1=1, q_2=0{,}8,$ произведем расчет вероятностей $P(\tau,t)$. Результаты расчета приведены на рис. 1 при двух указанных значениях контроля (*1* — $P_1(\tau, 100)=0{,}955$, q_1; *2* — $P_2(\tau, 100)=0{,}955$, q_2).

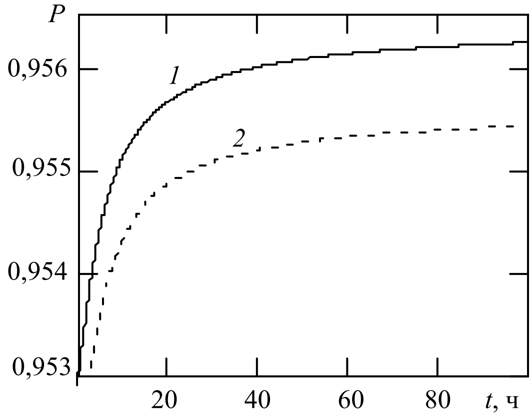

Рис. 1

Пример 2. Избыточная информационная система описывается интегральным уравнением вида (12), но в ней дополнительно учитывается случайное время задержки после возникновения отказа. Поэтому уравнение (12) несколько изменяется и принимает вид:

$$P^*(\tau,\mathrm{s})=\frac{P(\tau,0)}{s\left(1-g^*(s)\int\limits_0^\tau a(\xi)q(\xi)e^{-s\xi}d\xi\right)}, \tag{13}$$

например, где $g^*(s)=\dfrac{\mu^2}{(sJ+\mu)^2}, \mu=2\,\text{ч}^{-1}, J=5\,\text{оп.}^{-1},$ а значения других параметров принимаются следующими: $m=20\,\text{ч}, \sigma=6\,\text{ч}, a(t)=\mathrm{dnorm}(t,m,\sigma), \tau=10\,\text{ч}, I=20\,\text{оп.}^{-1}, q_1=1, q_2=0{,}8,$

$P(\tau,0)=\int\limits_\tau^\infty \frac{1}{I}a\left(\frac{\xi}{I}\right)d\xi$ (здесь J, I — удельные пропускные способности потери и накопления информации в системе).

Применяя формулу Алфрея (1) для перехода от преобразования Лапласа (13) к оригиналу, получим следующее выражение для вероятности выполнения системой определенного количества операционной работы:

$$P(\tau,t)=\frac{\int\limits_\tau^\infty \frac{1}{I}a\left(\frac{\xi}{I}\right)d\xi}{1-\frac{\mu^2t^2}{(J+\mu t)^2}\int\limits_0^\tau q(\xi)\frac{1}{I}a\left(\frac{1}{I}\right)e^{-\frac{\xi}{t}}d\xi}. \tag{14}$$

На рис. 1 представлены зависимости вероятности выполнения операционной работы системой при указанных в примере значениях параметров от избыточного времени. По этому рисунку определить величину выполненной операционной работы невозможно. Для этого сначала необходимо найти по графику начальные значения величины выполненной работы для определенного времени, а затем подобрать по ним функцию распределения величины работы. Из рис. 2 следует, что с увеличением операционных потерь из-за простоя системы при ее восстановлении вероятность выполнения работы системой уменьшается (*1* — $q_1 = 1$, *2* — $q_2 = 0,8$).

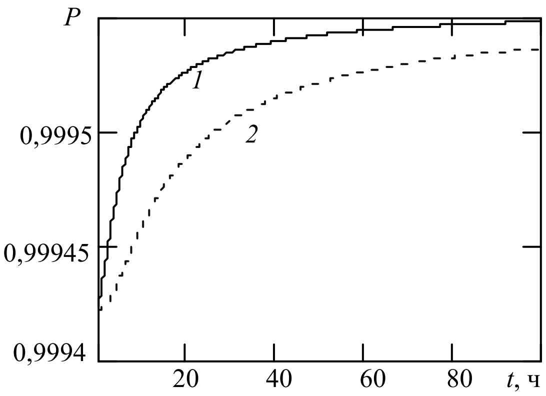

Рис. 2

Определение количества выполненной информационной работы за время функционирования системы. В статье [5] приведена методика решения этой задачи. Суть методики состоит в последовательном выполнении следующих этапов:

1) выделить необходимое выражение вероятности выполнения работы системы с учетом накопления полезной информации и потерь информации за время преобразований Лапласа;

2) последовательно дифференцируя выражение по переменной Лапласа, найти требуемое число начальных значений величины выполненной работы;

3) используя метод моментов, построить функцию аппроксимации распределения выполненной работы;

4) применять найденную функцию распределения при практическом расчете показателей качества.

Для иллюстрации методики представим простой пример расчета. Во избежание громоздких вычислений будем учитывать не потери информации, а только количество полезной информационной работы, выполненной системой. Поэтому в качестве исходного будем использовать следующее выражение:

$$P_t^*(\tau, s) = \frac{(s+\lambda)\, e^{-s\tau}}{s[s+\lambda e^{-(\lambda+s)\tau}]}, \tag{15}$$

полученное в результате решения интегрального уравнения (11) на основе применения преобразования Лапласа. Примем для расчета следующие значения параметров: $\lambda = 0,01\,\text{ч}^{-1}, \tau = 10\,\text{ч},$ мгновенное возобновление работы системы после ее отказа в течение τ, $I = 10\,\text{оп.}^{-1}$.

Сначала применим формулу Алфрея к выражению (15):

$$P(\tau, t) = \frac{0,819 + 0,008t}{1 + 0,01te^{-\frac{(20+0,2t)}{t}}}, \tag{16}$$

затем учтем значение $I = 10$ оп.$^{-1}$:

$$R(\tau, t) = \lim_{s \to \frac{1}{t}} \frac{(s\,I+\lambda)\, e^{-\lambda\tau}}{[s\,I + \lambda e^{-(\lambda+s\,I)\tau}]}, \tag{17}$$

и для него после раскрытия предела получаем

$$G(\tau,t)=\frac{8{,}187+0{,}008t}{10+0{,}01te^{-(200+0{,}2t)}}. \qquad (18)$$

Далее, используя выражения для нахождения начальных моментов

$$A^*(s)=\frac{(s+\lambda)\,e^{-\lambda\tau}}{s+\lambda\,e^{-(\lambda+s)\tau}},\; B^*(s)=\frac{(s\,I+\lambda)e^{-\lambda\tau}}{s\,I+\lambda\,e^{-(\lambda+s\,I)\tau}}, \qquad (19)$$

находим:

$$\nu a_0=1,\ \nu a_1=2{,}140\ \text{оп.},\ \nu a_2=37{,}212\ \text{оп.}^2;$$

$$\nu b_0=1,\ \nu b_1=21{,}403\ \text{оп.},\ \nu b_2=3721{,}672\ \text{оп.}^2$$

Допуская возможность аппроксимации искомых распределений вероятностей нормальными распределениями с использованием величин найденных моментов, приведем графики плотностей вероятностей (рис. 3, *1* — $ga(x)$, *2* — $gb(x)$) и распределения вероятностей (рис. 4, *1* — $Ga(x)$, *2* — $Gb(x)$).

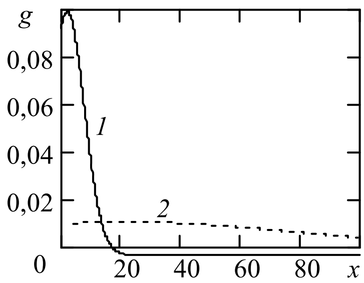

Рис. 3

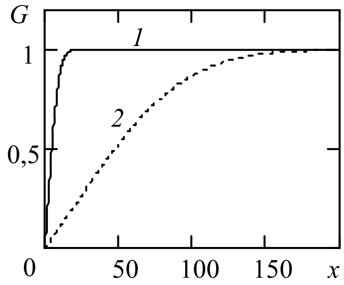

Рис. 4

Кривые *2* соответствуют величине накопленной информационной работе системы с $I=10$ оп.$^{-1}$, кривые *1* — отсутствию накопления информации.

Пользуясь приведенной методикой, можно определить количество информационной работы системы для случаев, соответствующих выражениям (12) и (13), т.е. для непуассоновских распределений, а также с учетом информационных потерь при восстановлениях или простоях системы после ее отказов. Однако процесс определения объема информационной работы, проделанной системой, в этом случае будет более трудоемким.

В качестве примеров приводятся обратные преобразования Лапласа решения интегрального уравнения с временной избыточностью и потерей накопленного результата, если процесс решения заканчивается раньше предусмотренного временем задания для системы.

Предлагается модель обратного преобразования с учетом количества накопленной и потерянной информации за время работы системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смагин В. А.* Немарковские задачи теории надежности. Л.: МО СССР, 1982. 293 с.

2. *Гольберг И. И.* Механическое поведение полимерных материалов. (Математическое описание). М.: Химия, 1970. 192 с.

3. *Gross B.* Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity. Paris: Hermann, 1953.

4. *Залманзон Л. А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.

5. *Смагин В. А., Шерстобитов С. А.* Оценивание длительности и количества информационной работы в цикле управляющей системы // Информация и космос. 2016. № 1. С. 75—79.

Сведения об авторах

Владимир Александрович Смагин — д-р техн. наук, профессор; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра метрологического обеспечения; E-mail: va_smagin@mail.ru

Игорь Анатольевич Карабельников — канд. техн. наук; ВКА им. А. Ф. Можайского, военный институт (научно-исследовательский), начальник отдела; E-mail: igork1981@yandex.ru

Ирина Серафимовна Петрова — ВКА им. А. Ф. Можайского, военный институт (научно-исследовательский), научный сотрудник; E-mail: mariak1985@yandex.ru

Рекомендована кафедрой метрологического обеспечения

Поступила в редакцию 21.03.17 г.

Ссылка для цитирования: *Смагин В. А., Карабельников И. А., Петрова И. С.* Применение формулы Алфрея в теории случайных процессов // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 8. С. 721—727.

APPLICATION OF ALFREY'S FORMULA IN THE THEORY OF RANDOM PROCESSES

V. A. Smagin, I. A. Karabelnikov, I. S. Petrova

A. F. Mozhaisky Military Space Academy, 197198, St. Petersburg, Russia
E-mail: va_smagin@mail.ru

An approximate method using Alfrey's formula is proposed for derivation of digital values of function with image represented by a complex Laplace transform. The formula was obtained in the study of mechanical properties of high polymers; it is based on filtering the integrand of Laplace transform with the delta-function. A solution of an integral equations with temporal redundancy for the probability of task execution by a system is presented as an example. Attempts to improve the accuracy of the inverse transformation using the mathematical apparatus of Haar's or Widder's methods are reported to be unsuccessful.

Keywords: Laplace transform, inverse transformation, Alfrey's formula, integral equations with temporal redundancy, probability of task execution, method of moments, information task

Data on author

Vladimir A. Smagin — Dr. Sci., Professor; A. F. Mozhaisky Military Space Academy, Department of Metrological Support; E-mail: va_smagin@mail.ru

Igor A. Karabelnikov — PhD; A. F. Mozhaisky Military Space Academy, Military Institute; Head of Department; E-mail: igork1981@yandex.ru

Irina S. Petrova — A. F. Mozhaisky Military Space Academy, Military Institute; Researcher; E-mail: mariak1985@yandex.ru

For citation: Smagin V. A., Karabelnikov I. A., Petrova I. S. Application of Alfrey's formula in the theory of random processes. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 8. P. 721—727 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-8-721-727