

## ПРИМЕНЕНИЕ ТРЕХЛЕНТОЧНОЙ УПРУГОЙ ОПОРЫ С КВАЗИНУЛЕВЫМ ПРОТИВОДЕЙСТВУЮЩИМ МОМЕНТОМ В ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ СТЕНДАХ

В. И. ВЕТРЕНКО

ООО „Звездный“, 634040, Томск, Россия  
E-mail: vladim.vetrenko@yandex.ru

Представлена трехленточная упругая опора вращения с регулируемым противодействующим моментом и регулируемой соосностью элементов вращения. Конструкция опоры позволяет обеспечить квазинулевой противодействующий момент в малом угле отклонения. Отсутствие универсальных формул для расчета опоры затрудняет вычисление ее геометрических размеров. Методами теории упругости с применением обобщенного закона Гука получены выражения крутильной, осевой и радиальной жесткости опоры. Получены аналитические выражения обобщенных реакций упругих элементов и формулы для расчета жесткостей опоры. Для подтверждения полученных результатов использован подвес с шестью упругими лентами, которые снабжены устройствами, создающими усилие растяжения-сжатия и одновременно регулирующими соосность вращающихся элементов. Результаты эксперимента полностью подтвердили основные теоретические выводы. Полученные выражения могут быть использованы при создании упругих подвесов в точном приборостроении.

**Ключевые слова:** квазинулевой противодействующий момент, упругая трехленточная опора вращения, регулируемая соосность, осевая и радиальная жесткость, полунатурное моделирование

Интенсивное освоение космического пространства осуществляется с использованием современных ракетносителей, позволяющих выводить в открытый космос объекты со значительной полезной массой. Увеличение массы выводимого объекта приводит к снижению угловых скоростей относительно его центра масс при действии внешних возмущений, что накладывает жесткие требования на точность системы ориентации и стабилизации космического аппарата (КА). При решении объектом астрономических задач и обеспечении спутниковой связи точность ориентации должна составлять не хуже сотых долей угловой секунды.

Для проверки пригодности элементов таких систем выполняется полунатурное моделирование, позволяющее определить параметры системы в условиях, близких к реальным. Для такого вида испытаний используются динамические моделирующие стенды, формирующие внешние воздействия и механически воспроизводящие движение КА. На имитатор движения КА устанавливаются элементы системы. Сухое трение в опорах подвеса имитатора приводит к прерывистости движения и создает нижний предел по скорости. Как показывают исследования и опыт проектирования, наиболее приемлема для создания подвеса такого стенда упругая опора вращения на трех скрещенных лентах с регулируемым противодействующим моментом [1]. Она в малом угле поворота обладает стабильной функцией противодействующего

момента. Опоры, представленные в работах [2, 3], применяются в гироскопах, вибрационных гироскопах, динамических моделирующих стендах и других измерительных приборах.

Исследование свойств трехленточной опоры проводилось в работах [4, 5], где приведено выражение момента противодействия опоры при наличии предварительного растягивающего или сжимающего усилия. Но опора сохраняет свою работоспособность, и когда предварительное усилие лент равно нулю. В этом случае подсчитать противодействующий момент по приведенным формулам невозможно. Отсутствие в монографиях [6, 7] формул для расчета осевой и радиальной жесткости опоры, учитывающих предварительное усилие лент, также затрудняло вычисление геометрических размеров.

Поэтому ставится задача получения универсальных аналитических выражений для осевой, радиальной и крутильной жесткости опоры, учитывающих как предварительное усилие лент, так и его отсутствие.

На рис. 1 приведена трехленточная опора вращения. Правая система координат  $O X_0 Y_0 Z_0$ , связанная с опорой, расположена так, что оси  $O Y_0$  и  $O Z_0$  находятся в плоскости вращения опоры, а  $O X_0$  перпендикулярна этой плоскости и является осью вращения опоры. Работа опоры основана на законе изгиба длинной ленты под действием продольной нагрузки. Если опора снабжена устройством растяжения-сжатия лент 3, то при растяжении или сжатии одной из лент 4, как известно из теоретической механики, все ленты будут находиться под действием одинакового усилия. Если продольная нагрузка на ленту превышает какой-то предел, то лента изгибается и приобретает новую криволинейную форму равновесия. Очень малые отклонения ленты от равновесного состояния могут произойти практически без дополнительной изгибающей силы. Подбором величины растягивающего или сжимающего усилия  $F_z$  (рис. 1) восстанавливающий момент между цилиндрами 1 и 2 можно свести к нулю или сделать отрицательным. Это объясняется тем, что благодаря предварительному усилию, действующему на ленту, на окружности цилиндра 1 действует отрицательный момент противодействия, который возрастает с увеличением угла поворота. Но из-за своей естественной жесткости лента создает положительный восстанавливающий момент. Соответствующим подбором этих моментов регулируется общий восстанавливающий момент.

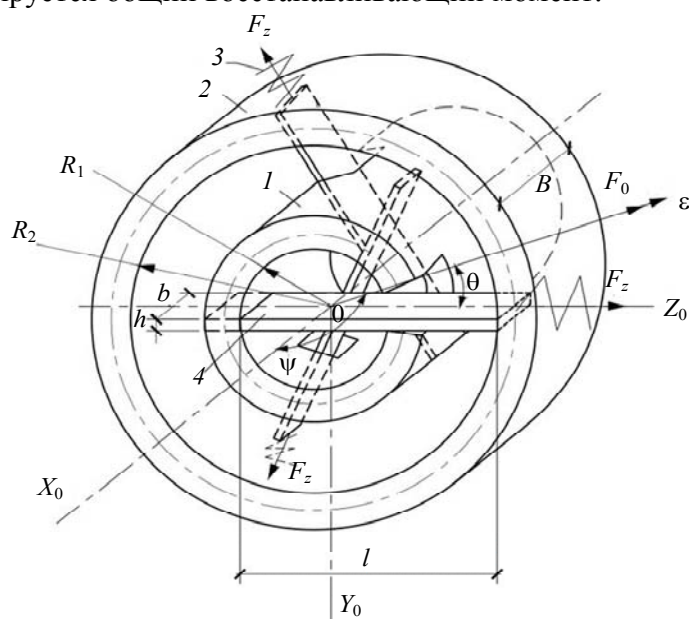


Рис. 1

Для решения поставленной задачи рассмотрим пространственный изгиб ленты. Воспользуемся подходом, изложенным в [8]. Предположим, что материал лент работает упруго, деформированная форма упругой ленты мало отличается от первоначальной.

Представим упругую ленту в виде плоской кривой. Один конец ленты жестко заделан в цилиндре 1 (рис. 2), другой — в цилиндре 2, с которым связана правая система координат  $O\xi\eta\zeta$ . Ось  $O\zeta$  направлена по продольной оси ленты, а оси  $O\xi$  и  $O\eta$  — по главным осям инерции поперечного сечения ленты,  $\rho(s)$  — радиус-вектор, имеющий начало в точке  $O'$ . При сообщении цилиндру 2 поступательного перемещения  $U$  и поворота  $\theta$  система координат  $O\xi\eta\zeta$  займет положение  $O'\xi'\eta'\zeta'$ . В этом случае уравнения равновесия упругой линии ленты в системе координат  $AXYZ$ , связанной с лентой, будут иметь вид

$$dv/ds = M_x/EJ_x; \quad d\theta/ds = M_y/EJ_y; \quad d\psi/ds = M_z/GJ_z; \quad \omega(ds)/ds = F_z/ES_z, \quad (1)$$

где  $\omega, u, v$  — проекции вектора перемещения  $\mathbf{U}$ ;  $v, \theta, \psi$  — проекции вектора поворота  $\boldsymbol{\theta}$  на оси системы координат  $O\xi\eta\zeta$ ;  $\mathbf{M}, \mathbf{F}$  — момент и усилие растяжения-сжатия;  $J_x, J_y, J_z$  — моменты инерции сечения ленты;  $S_z$  — площадь поперечного сечения ленты;  $E$  — модуль упругости;  $G$  — модуль сдвига.

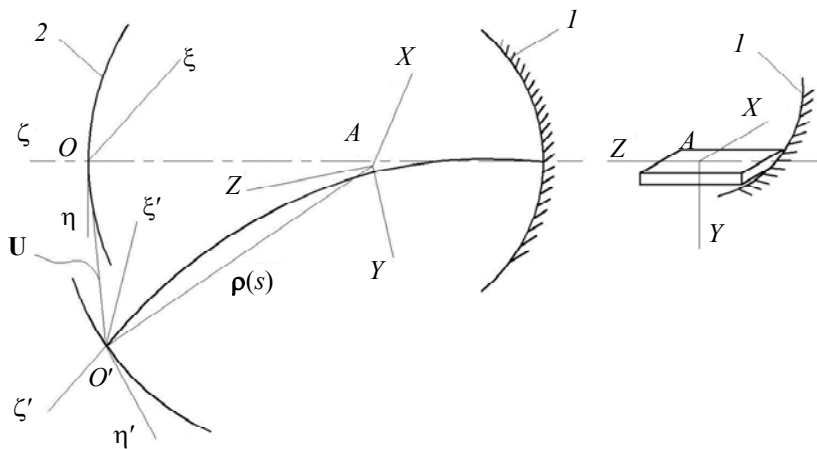


Рис. 2

Энергия упругих деформаций определяется работой момента  $\mathbf{M}$  на взаимном угловом перемещении и усилия растяжения-сжатия  $\mathbf{F}$  на линейном перемещении

$$d\Pi_{yz} = \frac{1}{2} M_x dv; \quad d\Pi_{xz} = \frac{1}{2} M_y d\theta; \quad d\Pi_{xy} = \frac{1}{2} M_z d\psi; \quad d\Pi_z = \frac{1}{2} F_z \omega(ds). \quad (2)$$

С учетом (1) уравнения (2) примут вид

$$d\Pi_{yz} = \frac{M_x^2}{2EJ_x} ds; \quad d\Pi_{xz} = \frac{M_y^2}{2EJ_y} ds; \quad d\Pi_{xy} = \frac{M_z^2}{2GJ_z} ds; \quad d\Pi_z = \frac{F_z^2}{2ES_z} ds. \quad (3)$$

В работе [8] потенциальная энергия ленты складывается из энергии изгиба, кручения, а при наличии растягивающей силы — энергии растяжения. Энергию сдвига учитывать не будем, так как с увеличением длины ленты, при сохранении ее поперечного сечения, касательные напряжения остаются неизменными, а нормальные возрастают пропорционально длине. Таким образом, всегда можно сделать отношение длины ленты к ее толщине таким, чтобы наибольшие касательные напряжения составили сколь угодно малую долю от наибольших нормальных. Интегрируя выражения (3), получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{M_x^2}{EJ_x} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{M_z^2}{C^*} + \frac{F_z^2}{ES_z} \right) ds. \quad (4)$$

Для вычисления интеграла в (4) найдем значения момента  $\mathbf{M}$  и силы  $F$ . Будем считать проекции вектора перемещения  $\mathbf{U}$  и проекции вектора поворота  $\boldsymbol{\theta}$  на оси системы координат  $O\xi\eta\zeta$  малыми величинами, произведения которых пренебрегаем. Эти шесть величин примем за обобщенные координаты  $u = q_1, v = q_2, \omega = q_3, v = q_4, \theta = q_5, \psi = q_6$ . Соответствующие

им обобщенные реакции будут проекциями главного вектора  $\mathbf{F}$  и главного момента  $\mathbf{M}$  упругих реакций на цилиндр 2:

$$F_{\xi}^0 = Q_1, F_{\eta}^0 = Q_2, F_{\zeta}^0 = Q_3, M_{\xi}^0 = Q_4, M_{\eta}^0 = Q_5, M_{\zeta}^0 = Q_6. \quad (5)$$

Уравнение сил и моментов в системе координат  $O\xi\eta\zeta$  примет вид

$$\left. \begin{aligned} M_{\xi} &= M_{\xi}^0 - F_{\eta}^0 \zeta(s) + F_{\zeta}^0 \eta(s); & F_{\xi} &= F_{\xi}^0; \\ M_{\eta} &= M_{\eta}^0 - F_{\zeta}^0 \xi(s) + F_{\xi}^0 \zeta(s); & F_{\eta} &= F_{\eta}^0; \\ M_{\zeta} &= M_{\zeta}^0 - F_{\xi}^0 \eta(s) + F_{\eta}^0 \xi(s); & F_{\zeta} &= F_{\zeta}^0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $\xi(s), \eta(s), \zeta(s)$  — проекции вектора  $\mathbf{p}(s)$  на оси  $O\xi\eta\zeta$ .

Матрица направляющих косинусов между системой координат  $O\xi\eta\zeta$  и  $A_{XYZ}$  вследствие малости углов примет значение

$$\begin{array}{ccc|ccc} & \xi & \eta & \zeta & & \\ x & 1 & \psi & \theta & & \\ y & -\psi & 1 & v & & \\ z & -\theta & -v & 1 & & \end{array} \quad (7)$$

Проекции векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{F}$  (6) на оси системы координат  $A_{XYZ}$  с учетом (7):

$$\begin{aligned} M_x &= M_{\xi}^0 - F_{\eta}^0 \zeta(s) + F_{\zeta}^0 \eta(s) + (M_{\eta}^0 - F_{\zeta}^0 \xi(s) + F_{\xi}^0 \zeta(s))\psi + (M_{\zeta}^0 - F_{\xi}^0 \eta(s) + F_{\eta}^0 \xi(s))\theta; \\ M_y &= (-M_{\xi}^0 + F_{\eta}^0 \zeta(s) - F_{\zeta}^0 \eta(s))\psi + M_{\eta}^0 - F_{\zeta}^0 \xi(s) + F_{\xi}^0 \zeta(s) + (M_{\zeta}^0 - F_{\xi}^0 \eta(s) + F_{\eta}^0 \xi(s))v; \\ M_z &= (-M_{\xi}^0 + F_{\eta}^0 \zeta(s) - F_{\zeta}^0 \eta(s))\theta + (-M_{\eta}^0 - F_{\zeta}^0 \xi(s) - F_{\xi}^0 \zeta(s))v + M_{\zeta}^0 - F_{\xi}^0 \eta(s) + F_{\eta}^0 \xi(s); \\ F_x &= F_{\xi}^0 + F_{\eta}^0 \psi + F_{\zeta}^0 \theta; \quad F_y = -F_{\xi}^0 + F_{\eta}^0 + F_{\zeta}^0 v; \quad F_z = -F_{\xi}^0 - F_{\eta}^0 \eta + F_{\zeta}^0. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что для прямолинейного стержня  $\zeta(s) = s, \xi(s) = \eta(s) = 0$  и  $v = \theta = \psi = 0$ , получим

$$M_x = M_{\xi}^0 - F_{\eta}^0 s; \quad M_y = M_{\eta}^0 + F_{\xi}^0 s; \quad M_z = M_{\zeta}^0; \quad F_z = F_{\zeta}^0. \quad (9)$$

Произведя замену в (9) на обобщенные реакции (5), получим

$$M_x = Q_4 - Q_2 s; \quad M_y = Q_5 + Q_1 s; \quad M_z = Q_6; \quad F_z = Q_3. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (4), запишем значение потенциальной энергии ленты в обобщенных реакциях

$$\Pi = \frac{Q_4^2 l}{2EJ_x} - \frac{Q_4 Q_2 l^2}{2EJ_x} + \frac{Q_2^2 l^3}{6EJ_x} + \frac{Q_5^2 l}{2EJ_y} + \frac{Q_5 Q_1 l^2}{2EJ_y} + \frac{Q_1^2 l^3}{6EJ_y} + \frac{Q_6^2 l}{2C^*} + \frac{Q_3^2 l}{2ES_z}. \quad (11)$$

Определим обобщенные координаты, применяя теорему Кастилиано  $-q_i = \frac{d\Pi}{dQ_i}$ :

$$\begin{aligned} -q_1 &= \frac{Q_5 l^2}{2EJ_y} + \frac{Q_1 l^3}{3EJ_y}; & -q_2 &= \frac{Q_4 l^2}{EJ_x} + \frac{Q_2 l^2}{3EJ_x}; & -q_3 &= \frac{Q_3 l}{ES_z}; \\ -q_4 &= \frac{Q_4 l}{EJ_x} - \frac{Q_2 l^2}{2EJ_x}; & -q_5 &= \frac{Q_5 l}{EJ_y} + \frac{Q_1 l^2}{2EJ_y}; & -q_6 &= \frac{Q_6 l}{2C^*}. \end{aligned} \quad (12)$$

Преобразуя (12), найдем значения реакций со стороны ленты на цилиндр 2

$$\begin{aligned} Q_1 &= -q_1 C_{11} + q_5 C_{11}; & Q_4 &= -q_4 C_{44} + q_2 C_{42}; \\ Q_2 &= -q_2 C_{22} + q_4 C_{24}; & Q_5 &= -q_5 C_{55} + q_1 C_{51}; \\ Q_3 &= -q_3 C_{33}; & Q_6 &= -q_6 C_{66}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{12EJ_y}{l^3}; & C_{15} &= C_{51} = \frac{6EJ_y}{l^2}; & C_{55} &= \frac{4EJ_y}{l}; & C_{44} &= \frac{4EJ_x}{l}; \\ C_{42} &= C_{24} = \frac{6EJ_x}{l^2}; & C_{22} &= \frac{12EJ_x}{l^3}; & C_{33} &= \frac{ES_z}{l}; & C_{66} &= \frac{2C^*}{l}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $C_{ij}$  — коэффициенты жесткости упругой ленты,  $C^*$  — жесткость ленты при кручении,  $l$  — длина упругой ленты.

Для определения противодействующего момента трехленточной опоры рассмотрим поворот цилиндра 2 в плоскости  $Y_0OZ_0$ . На рис. 3 показаны силы, действующие на ленту.

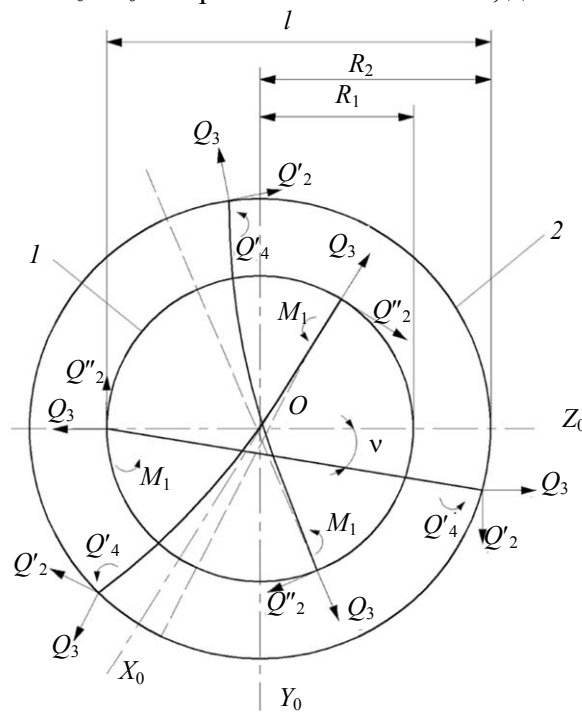


Рис. 3

Уравнение моментов относительно центра вращения  $O$  опоры примет вид

$$M_{Y_0Z_0} = Q_2 R_2 - Q_4 + Q_3 Y, \quad (15)$$

где  $Q_2, Q_4$  — реакции лент в заделке,  $Q_3$  — предварительное нагружение ленты (растяжение),  $\nu$  — угол поворота,  $R_2$  — внутренний радиус наружного цилиндра 2.

Подставим (12), (13) в (15) и с учетом (14) получим

$$M_{Y_0Z_0} = \left( -q_2 \frac{12EJ_x}{l^3} - q_4 \frac{6EJ_x}{l^2} \right) R_2 + q_4 \frac{4EJ_x}{l} + q_2 \frac{6EJ_x}{l^2} + Q_3 Y. \quad (16)$$

Ввиду того что  $q_4 = \nu$ , а  $Y = q_2 \approx R_2 q_4 = R_2 \nu$  и из рис. 3 видно, что  $R_2 = l - R_1$ , выражение (15) для противодействующего момента опоры из трех лент примет вид

$$-\sum M_{Y_0Z_0} = \left[ \frac{12\lambda^2 (3R_1^2 - 6R_1 l + 2l^2) - 3l^3 R_2}{l^3} \right] Q_3 \nu, \quad (17)$$

где  $\lambda^2 = \frac{EJ_x}{Q_3}$ ,  $R_1$  — внутренний радиус внутреннего цилиндра  $l$ .

Противодействующий момент опоры равен нулю, если числитель выражения (17) равен нулю:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{l^3 R_2}{4(3R_1^2 - 6R_1 l + 2l^2)}}. \tag{18}$$

Рассмотрим случай положительного значения корня в (18), так как  $\lambda$  может быть только положительной величиной. Подкоренное выражение принимает положительное значение при условии

$$l^3 > 0 < 3R_1^2 - 6R_1 l + 2l^2, \tag{19}$$

$$l^3 < 0 > 3R_1^2 - 6R_1 l + 2l^2. \tag{20}$$

Неравенство (20) не соответствует условию рис. 3, следовательно, справедливо неравенство (19). Найдем корни уравнения (19):

$$l_1 = \frac{6R_1 + 3,464R_1}{4} = 2,366R_1, \quad l_2 = \frac{6R_1 - 3,464R_1}{4} = 0,634R_1.$$

Значение первого корня  $l_1 = 2,366R_1$  соответствует условию рис. 3. Это означает, что опора достигнет квазинулевого противодействующего момента при минимальном предварительном усилии, если отношение длины ленты к радиусу внутреннего цилиндра равно 2,366. Если предварительное усилие в ленте  $F_z$  отсутствует, противодействующий момент опоры примет положительное значение

$$M_{Y_0Z_0} = \frac{12EJ_x}{l^3} (3R_1^2 - 6R_1 l + 2l^2) \nu. \tag{21}$$

Для определения осевой и радиальной жесткости рассмотрим трехленточную опору при воздействии на нее центральной нагружающей силы  $F_0$  (рис. 4).

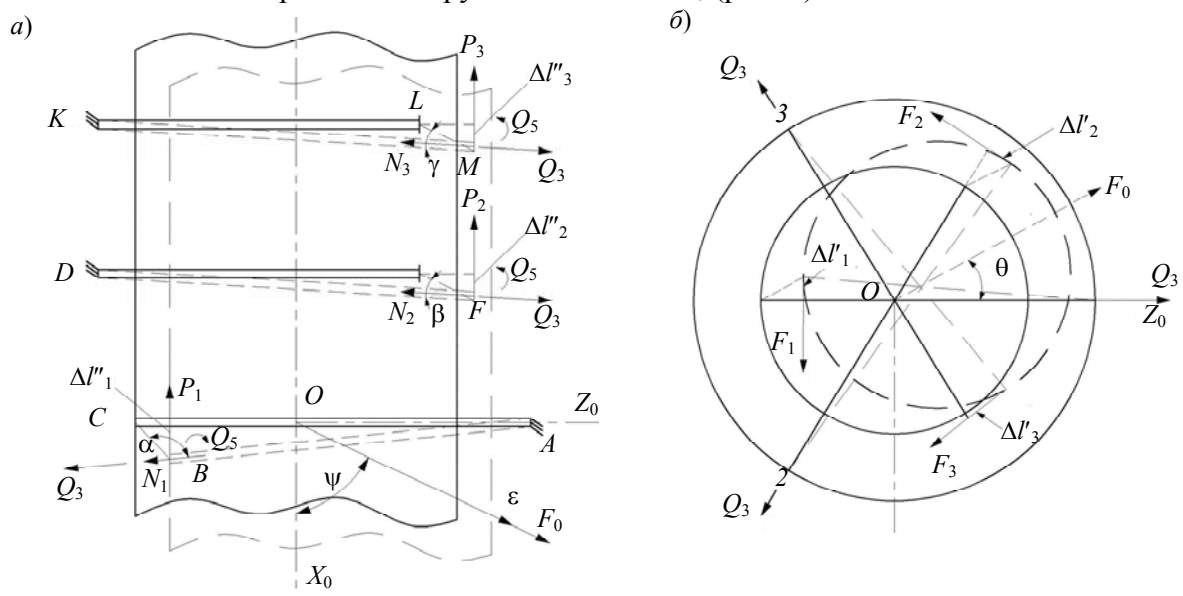


Рис. 4

Направление центральной силы  $F_0$  определим углом  $\psi$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $OX_0$  против хода часовой стрелки и углом  $\theta$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $OZ_0$ . Воспользуемся уравнениями (13) деформации упругого элемента, произведя замену обозначений реакций  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$  на  $P$ ,  $F$ ,  $N$ . Под действием  $F_0$  внутренний цилиндр  $l$  рис. 4 сместится вдоль линии действия силы на величину  $\epsilon$ . При этом

возникнет сила, стремящаяся вернуть систему в положение равновесия. Для нахождения этой силы необходимо определить реакции лент  $N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3$  (рис. 4, а) и  $F_1, F_2, F_3$  (рис. 4, б), а затем спроектировать эти силы на направление линии действия силы  $F_0$ .

Обозначим после деформации углы между направлением лент 1, 2 и 3 и смещением  $\varepsilon$  соответственно  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис. 4, а). Реакция первой ленты  $N_1$  в результате растяжения либо сжатия ленты по модулю равна

$$N_1 = C_{33}(\Delta l_1 + \Delta),$$

где  $\Delta l_1$  — удлинение первой ленты, вызванное смещением  $\varepsilon$ ;  $\Delta$  — деформация от предварительного усилия ленты;  $C_{33} = \frac{ES_z}{l}$  — коэффициент жесткости упругой ленты.

Из рис. 4 удлинение первой ленты запишется в виде

$$(AB) = \sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \theta \sin \psi}, \quad \Delta l_1 = (AB) - l = \sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \theta \sin \psi} - l.$$

Угол  $\alpha$  находится из треугольника ABC по теореме косинусов

$$\begin{aligned} (AC)^2 &= \varepsilon^2 + (AB)^2 - 2\varepsilon(AB) \cos \alpha, \\ l^2 &= \varepsilon^2 + l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \theta \sin \psi - 2\varepsilon \sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \theta \sin \psi} \cos \alpha, \\ \cos \alpha &= \frac{\varepsilon - l \cos \theta \sin \psi}{\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \theta \sin \psi}}. \end{aligned}$$

Проекция силы  $N_1$  на ось  $\varepsilon$  равна

$$N_{1\varepsilon} = C_{33}(\Delta l_1 + \Delta) \cos \alpha = C_{33}(\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \theta \sin \psi} - l + \Delta) \frac{\varepsilon - l \cos \theta \sin \psi}{\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \theta \sin \psi}}. \quad (22)$$

Аналогично находятся удлинение второй ленты и угол  $\beta$  из треугольника DEF по теореме косинусов (рис. 4):

$$\cos \beta = \frac{\varepsilon + l \cos(60^\circ - \theta) \sin \psi}{\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ - \theta) \sin \psi}}.$$

Проекция силы  $N_2$  на ось  $\varepsilon$  равна

$$\begin{aligned} N_{2\varepsilon} &= C_{33}(\Delta l_2 + \Delta) \cos \beta = \\ &= C_{33}(\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ - \theta) \sin \psi} - l + \Delta) \frac{\varepsilon + l \cos(60^\circ - \theta) \sin \psi}{\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ - \theta) \sin \psi}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Удлинение третьей ленты и угол  $\gamma$  определяются из треугольника KLM (рис. 4) также по теореме косинусов. Проекция силы  $N_3$  на ось  $\varepsilon$  запишется в виде

$$\begin{aligned} N_{3\varepsilon} &= C_{33}(\Delta l_3 + \Delta) \cos \gamma = \\ &= C_{33}(\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ + \theta) \sin \psi} - l + \Delta) \frac{\varepsilon + l \cos(60^\circ + \theta) \sin \psi}{\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ + \theta) \sin \psi}}. \end{aligned} \quad (24)$$

После деформации опоры (рис. 4) прогибы лент, вызванные действием силы  $F_0$  в плоскости  $X_0OZ_0$ , запишутся:

$$\Delta l_1'' = \varepsilon \cos \theta \cos \psi, \quad \Delta l_2'' = \varepsilon \cos(60^\circ - \theta) \cos \psi, \quad \Delta l_3'' = \varepsilon \cos(60^\circ + \theta) \cos \psi.$$

Проекции сил  $P_1, P_2, P_3$  на ось  $\varepsilon$  примут вид

$$P_{1\varepsilon} = P_1 \cos \theta \cos \psi, \quad P_{2\varepsilon} = P_2 \cos(60^\circ - \theta) \cos \psi, \quad P_{3\varepsilon} = P_3 \cos(60^\circ + \theta) \cos \psi.$$

Вместе с тем  $P_i = -\Delta l_i'' C_{11} + q_i C_{15}$ ,  $q_i = \frac{\Delta l_i''}{l}$ , где  $i = 1, 3$ ;  $C_{11} = \frac{12EJ_y}{l^3}$ ;  $C_{15} = \frac{6EJ_y}{l^2}$ .

Окончательно получим значения проекций  $P_i$ :

$$\begin{aligned} P_{1\varepsilon} &= \frac{6EJ_y}{l^3} \varepsilon \cos^2 \theta \cos^2 \psi, \\ P_{2\varepsilon} &= \frac{6EJ_y}{l^3} \varepsilon \cos^2(60^\circ - \theta) \cos^2 \psi, \\ P_{3\varepsilon} &= \frac{6EJ_y}{l^3} \varepsilon \cos^2(60^\circ + \theta) \cos^2 \psi. \end{aligned} \tag{25}$$

Прогибы лент в плоскости  $Y_0OZ_0$ , вызванные действием силы  $F_0$  (рис. 4, б), запишем  $\Delta l_1' = \varepsilon \sin \theta \sin \psi$ ,  $\Delta l_2' = \varepsilon \sin(60^\circ - \theta) \sin \psi$ ,  $\Delta l_3' = \varepsilon \sin(60^\circ + \theta) \sin \psi$ .

Проекции сил  $F_1, F_2$  и  $F_3$  на ось  $\varepsilon$  принимают вид:  $F_{1\varepsilon} = F_1 \sin \theta \sin \psi$ ,  $F_{2\varepsilon} = F_2 \sin(60^\circ - \theta) \sin \psi$ ,  $F_{3\varepsilon} = F_3 \sin(60^\circ + \theta) \sin \psi$ .

Но  $F_i = \Delta l_i' C_{22} + q_i C_{24}$ ,  $q_i = \frac{\Delta l_i'}{l}$ , где  $i = 1, 3$ ;  $C_{22} = \frac{12EJ_x}{l^3}$ ;  $C_{24} = \frac{6EJ_x}{l^2}$ , и окончательно значения проекций сил  $F_i$  на ось  $\varepsilon$  запишутся как

$$\begin{aligned} F_{1\varepsilon} &= \frac{18EJ_x}{l^3} \varepsilon \sin^2 \theta \sin^2 \psi, \\ F_{2\varepsilon} &= \frac{18EJ_x}{l^3} \varepsilon \sin^2(60^\circ - \theta) \sin^2 \psi, \\ F_{3\varepsilon} &= \frac{18EJ_x}{l^3} \varepsilon \sin^2(60^\circ + \theta) \sin^2 \psi. \end{aligned} \tag{26}$$

Суммируя выражения (22)—(26), получим уравнение восстанавливающей силы

$$\begin{aligned} \sum F_0 &= \frac{ES_z}{l} \left[ \begin{aligned} &(\varepsilon - l \cos \theta \sin \psi) + \frac{(\Delta - l)(\varepsilon - l \cos \theta \sin \psi)}{\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \theta \sin \psi}} + (\varepsilon + l \cos(60^\circ - \theta) \sin \psi) + \\ &+ \frac{(\Delta - l)(\varepsilon + l \cos(60^\circ - \theta) \sin \psi)}{\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ - \theta) \sin \psi}} + (\varepsilon + l \cos(60^\circ + \theta) \sin \psi) + \\ &+ \frac{(\Delta - l)(\varepsilon + l \cos(60^\circ + \theta) \sin \psi)}{\sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ + \theta) \sin \psi}} \end{aligned} \right] + \\ &+ \frac{6EJ_y}{l^3} \varepsilon \cos^2 \psi (\cos^2 \theta + \cos^2(60^\circ + \theta) + \cos^2(60^\circ - \theta)) + \frac{18EJ_x}{l^3} \varepsilon \sin^2 \psi (\sin^2 \theta + \\ &+ \sin^2(60^\circ - \theta) + \sin^2(60^\circ + \theta)). \end{aligned} \tag{27}$$

Для определения коэффициента линейной жесткости опоры необходимо продифференцировать выражение (27) по перемещению  $\varepsilon$ :



$$\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} = \frac{ES_z}{l} \left\{ 3 + (\Delta - l) \left[ \frac{(l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \theta \sin \psi) - (\varepsilon - l \cos \theta \sin \psi)^2}{(l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \theta \sin \psi)^{3/2}} + \frac{(l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ - \theta) \sin \psi) - (\varepsilon^2 - l^2 \cos^2(60^\circ - \theta) \sin^2 \psi)}{(l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ - \theta) \sin \psi)^{3/2}} + \frac{(l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ + \theta) \sin \psi) - (\varepsilon^2 - l^2 \cos^2(60^\circ + \theta) \sin^2 \psi)}{(l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos(60^\circ + \theta) \sin \psi)^{3/2}} \right] + \frac{6EJ_y}{l^3} \cos^2 \psi (\cos^2 \theta + \cos^2(60^\circ + \theta) + \cos^2(60^\circ - \theta)) + \frac{18EJ_x}{l^3} \frac{3}{2} \sin^2 \psi (\sin^2 \theta + \sin^2(60^\circ - \theta) + \sin^2(60^\circ + \theta)) \right\} + \quad (28)$$

Отбрасывая члены второго порядка малости в (28), получим линейную жесткость опоры  $C_{\pi}$  в плоскости, проходящей через ее ось вращения, при условии, что перемещение  $\varepsilon$  мало:

$$C_{\pi} = \frac{ES_z}{l} \left\{ 3 + \left( \frac{\Delta - l}{l} \right) \left[ 3 - \frac{3}{2} \sin^2 \psi \right] \right\} + \frac{6EJ_y}{l^3} \frac{3}{2} \cos^2 \psi + \frac{18EJ_x}{l^3} \frac{3}{2} \sin^2 \psi. \quad (29)$$

Если сила  $F_0$  (рис. 1) действует только вдоль оси  $OX_0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\theta = 0$ , то осевая жесткость опоры в этом направлении будет равна

$$C_{X0} = \frac{3ES_z}{l} \left( \frac{\Delta}{l} \right) + \frac{9EJ_y}{l^3}. \quad (30)$$

Если сила  $F_0$  действует только в направлении оси  $OZ_0$ ,  $\psi = \pi/2$ ,  $\theta = 0$ , то выражение для радиальной жесткости примет вид

$$C_{Z0} = \frac{3}{2} \left[ \frac{ES_z}{l} \left( 1 + \frac{\Delta}{l} \right) + \frac{18EJ_x}{l^3} \right]. \quad (31)$$

При отсутствии деформации  $\Delta$  от предварительного усилия лент формулы (30) и (31) осевой и радиальной жесткости примут вид:

$$C_{X0} = \frac{9EJ_y}{l^3}, \quad (32)$$

$$C_{Z0} = \frac{3ES_z}{2l} + \frac{27EJ_x}{l^3}. \quad (33)$$

Из (29) следует условие

$$\sum_{i=1}^n C_i \cos^2 \theta_i = \sum_{i=1}^n C_i \sin^2 \theta_i; \quad \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \sin \theta_i = 0.$$

Это условие означает, что три, четыре или шесть лент, расположенных радиально, будут образовывать однородное упругое поле при достаточно малых перемещениях  $\varepsilon$ . Минимальное число упругих лент, при котором опора будет иметь однородное упругое поле, равно трем. Поле линейной жесткости трехленточной опоры, построенное с использованием выражения (29), представляет собой сильно сжатый по оси  $OX_0$  опоры эллипсоид вращения [9] и не зависит от угла  $\theta$ , т.е. опора в плоскости  $Y_0OZ_0$  является равножесткой. Значения реакций (13) также пригодны для нахождения выражений противодействующих моментов в конструкциях, где используются упругие элементы, например, при расчетах плоских спиральных

пружин в инерционных двигателях, подвесах гирокомаса, вибрационных и динамически настраиваемых гироскопах.

Для подтверждения теоретических результатов использовался подвес [10] с шестью упругими лентами, выполненными из стали марки 65Г. В эксперименте для измерения осевой жесткости ленты имели следующие геометрические размеры: длина  $l = 86$  мм, ширина  $b = 18$  мм и толщина  $h = 1$  мм. Предварительное усилие лент отсутствовало. Теоретическое значение осевой жесткости, рассчитанное по выражению (32), составило  $2,8 \cdot 10^6$  Н/м, а экспериментальное —  $2,2 \cdot 10^6$  Н/м. Значение радиальной жесткости, рассчитанное по выражению (33), составило  $12,5 \cdot 10^7$  Н/м, экспериментальное —  $9,3 \cdot 10^7$  Н/м. В эксперименте для измерения крутильной жесткости длина ленты составила  $l = 76$  мм, ширина  $b = 19$  мм, толщина  $h = 1$  мм, внутренний радиус внутреннего цилиндра  $R_1 = 15$  мм. Теоретическое значение крутильной жесткости, рассчитанное по выражению

$$C_{Y0Z0} = \frac{2Eh^3b}{j^3} (3R_1^2 - 6R_1l + 2l^2), \quad (34)$$

составило  $98,67$  Н·м/рад, а экспериментальное —  $68,75$ . При увеличении предварительного усилия растяжения противодействующий момент подвеса уменьшался, и чувствительность подвеса достигала значения  $10^{-4}$  Н·м [13]. После дальнейшего увеличения усилия растяжения конструкция переходила в неустойчивое состояние.

В работе представлено решение дифференциального уравнения изогнутой линии упругой ленты опоры с использованием энергетического подхода, обобщенного закона Гука и теоремы Кастилиано. Получены аналитические выражения осевой, радиальной и крутильной жесткости, позволяющие рассчитать подвес имитатора движения. Результаты экспериментов как качественно, так и количественно подтвердили основные теоретические выводы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин Е. А., Шестов С. А., Матвеев В. А. Гироскопические системы. Элементы гироскопических приборов / Под ред. Д. С. Пельпора. М.: Высш. школа, 1988. 251 с.
2. Пат. РФ 2011057, С1 5 F16F 3/10. Опора для прецизионных приборов / А. Н. Гормаков, Ю. М. Камашев, В. И. Ветренко. 1994. Б.И. № 7.
3. Ветренко В. И., Камашев Ю. М. Повышение точности и чувствительности гироскопических устройств с использованием трехленточной опоры с осевым торсионом // Тез. докл. всесоюз. конф. „Системы управления подвижными объектами и автоматизация технологических процессов“. Томск, 1989. С. 56.
4. Бабаева Н. Ф., Ерофеев В. М., Сивоконенко И. М. и др. Расчет и проектирование элементов гироскопических устройств. Л.: Машиностроение, 1967. С. 134—139.
5. Schlitt H. Investigations of a Bearing for Small Angular Deflections without Any Friction and with Negligible Restoring Torque // J. of Applied Physics. 1949. Vol. 20, N 4. p. 297.
6. Гевондян Т. А. Пружинные двигатели. Теория, расчет, методы контроля и испытаний. М.: Гос. изд-во оборонной промышленности, 1956. 271 с.
7. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 121 с.
8. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. С. 221—228.
9. Ветренко В. И., Скорых В. Я. Пространственная жесткость трехленточной опоры. Томск: Том. политехн. ин-т, 1989. 14 с. Деп. в Информприборе 19.09.89. № 4724-89.
10. Ветренко В. И. Трехленточная упругая опора испытательных стендов систем управления космических аппаратов: Автореф. ...дис. канд. техн. наук. Томск: Том. политехн. ин-т, 1990.

**Сведения об авторе**

**Владимир Ильич Ветренко** — канд. техн. наук; ООО „Звездный“, директор;  
E-mail: vladim.vetrenko@yandex.ru

Рекомендована кафедрой  
экономики и организации строительства

Поступила в редакцию  
09.11.16 г.

**Ссылка для цитирования:** Ветренко В. И. Применение трехленточной упругой опоры с квазинулевым противодействующим моментом в испытательных стендах // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 8. С. 742—752.

**APPLICATION OF THREE-RIBBON ELASTIC SUPPORT  
WITH QUASI-ZERO REACTIVE TORQUE IN TEST BENCHES****V. I. Vetrenko**

Zvezdny LLC, 634040, Tomsk, Russia  
E-mail: vladim.vetrenko@yandex.ru

A three-band elastic support with adjustable opposing torque and adjustable alignment of rotation elements is presented. The design of the support allows to provide quasi-zero reactive moment at small deviation angles. It is noted that the lack of universal formulas for calculation of the support complicates calculation of its geometrical sizes. Methods of the theory of elasticity are used to derive formulas for torsional, axial, and radial stiffness of the support using generalized Hooke's law. The analytical expressions of the generalized reactions of elastic elements and formulas to calculate the stiffness of the support are developed. A suspension with six elastic bands equipped with devices that create tension force compression and simultaneously performs the function of regulating the alignment of rotating elements, is used for experimental verification of the formulas. The experimental results fully confirmed the main theoretical insights. It is supposed that the obtained expressions can be used when creating elastic suspensions in precise instrumentation.

**Keywords:** quasi-zero reactive moment, three-ribbon elastic support, adjustable alignment, axial and radial stiffness, semi-detailed modeling

**Data on author**

**Vladimir I. Vetrenko** — PhD; Zvezdny LLC; Director; E-mail: vladim.vetrenko@yandex.ru

**For citation:** Vetrenko V. I. Application of three-ribbon elastic support with quasi-zero reactive torque in test benches. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 8. P. 742—752 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-8-742-752