УДК 621. 391
DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-8-764-769

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ИСПРАВЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ АБЕРРАЦИИ В ЛИНЗЕ С ОСЕВОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

А. Л. Сушков[1], С. А. Гусев[2]

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 105005, Москва, Россия*
*E-mail: ale-sushkov@yandex.ru*

*ЗАО „Гринекст“, 197198, Санкт-Петербург, Россия*

С целью исправления сферической аберрации предлагается использовать осевое распределение показателя преломления в стеклянной линзе. Обоснована требуемая функция распределения показателя преломления по поверхности линзы, обеспечивающая исправление сферической аберрации при удаленном предмете для различных относительных отверстий линзы. Показано определяющее значение углового коэффициента наклона осевого распределения показателя преломления при исправлении сферической аберрации. При изготовлении оптических элементов с лучшими светопередающими характеристиками перспективно использование градиентных сред.

***Ключевые слова:*** *линза, осевая неоднородность показателя преломления, сферическая аберрация*

Традиционно линзы изготавливают из однородного стекла со сферическими поверхностями. Хотя сферические поверхности обладают не лучшими коррекционными возможностями, их достоинством является хорошо развитая технология изготовления. Асферические поверхности позволяют создавать более совершенные оптические конструкции, но они требуют освоения специальных технологий, которые не всегда доступны на производстве.

В ряде теоретических работ [1—5] показана перспективность применения линз с неоднородным по поверхности показателем преломления (ПП) — это позволит совместить преимущества асферических линз в исправлении аберраций и достоинства технологии изготовления сферических поверхностей [6, 7].

Однако еще не в достаточной мере изучен вопрос о необходимой функциональной зависимости изменения ПП. Обычно рассматривают линейный закон при осевом и сфероконцентрическом распределении ПП и параболический или полиномиальный (как развитие параболического) — при радиальном распределении [8].

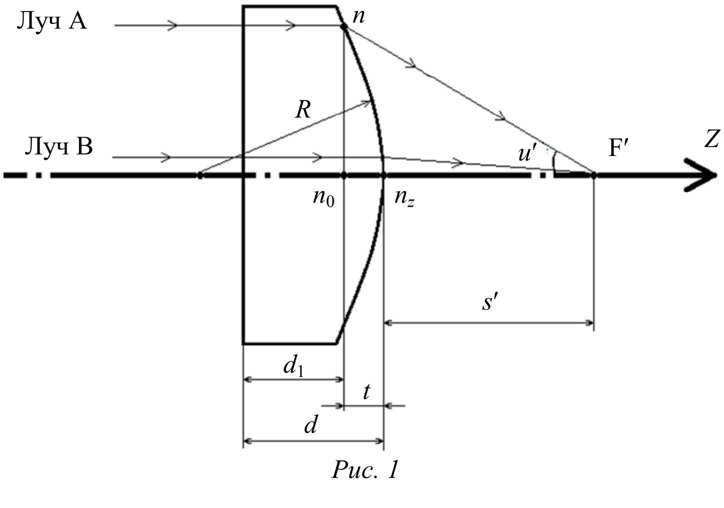


*Рис. 1*

Целью настоящей статьи является обоснование необходимой функциональной зависимости изменения ПП по поверхности линзы для наилучшего исправления аберрации. В качестве исправляемой аберрации будем рассматривать сферическую, обладающую наглядностью и являющуюся важнейшей для получения высокого качества изображения по всему полю изображения. Рассмотрим плосковыпуклую линзу с параметрами согласно рис. 1 ($R$ — радиус кривизны поверхности линзы, $t$ — стрелка прогиба поверхности по лучу А, $n_z$ — значение ПП в вершине поверхности линзы, $n_0$ — значение ПП в начале неоднородной зоны по ходу луча, $u'$ — апертурный угол в пространстве изображений, $s'$ — расстояние от вершины поверхности до заднего фокуса линзы, $d$ — толщина линзы, $d_1$ — толщина однородной зоны линзы).

Для изменения ПП по всей поверхности его осевая неоднородность должна присутствовать в пределах стрелки прогиба поверхности.

На рис. 2 показано прохождение двух лучей в линзе из осевой точки предмета, находящегося на бесконечности. Луч А находится на высоте $h$ от оптической оси, луч В — параксиальный.

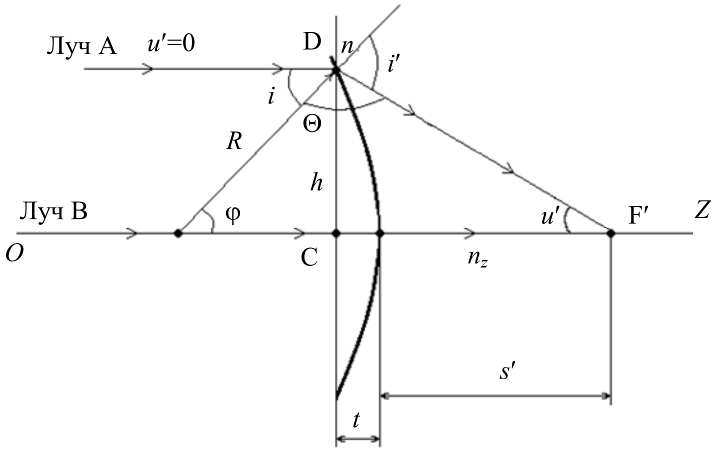


*Рис. 2*

Для треугольника CDF’ имеем соотношения

$$\left(s'+t\right)^2+h^2=\mathrm{DF}'^2$$

Оптическая длина хода луча по оси $z$ составляет [8, 9]

$$t=\int_0^t n\left(z\right)dz\,. \tag{1}$$

По теореме синусов имеем

$$\frac{s'+R}{\sin\Theta}=\frac{R}{\sin u'},\quad n\sin i=\sin i',\quad \varphi=i,\quad \Theta=180-i',\quad n\sin\varphi=\sin\Theta\,, \tag{2}$$

$$u'=180-\Theta-\varphi,\quad \sin u'=\sin\left(\Theta+\varphi\right),\quad \cos\Theta=\sqrt{1-n^2\sin^2\varphi}\,. \tag{3}$$

Подставив (3) в (2) и проведя преобразования, получим

$$\frac{s'+R}{n}=\frac{R}{n\cos\varphi+\sqrt{1-n^2\sin^2\varphi}}\,. \tag{4}$$

В параксиальной области $\varphi\to 0,\ \varphi^2=0$

$$\frac{s'+R}{n_z}=\frac{R}{n_z-1}\,,$$

отсюда

$$s'=\frac{R}{n_z-1}. \tag{5}$$

Подстановка (5) в (4) и выполнение преобразований позволяет получить

$$\frac{n\cos\varphi+\sqrt{1-n^2\sin^2\varphi}}{n}=1-\frac{1}{n_z},$$

или

$$\frac{n\sqrt{1-\sin^2\varphi}+\sqrt{1-n^2\sin^2\varphi}}{n}=1-\frac{1}{n_z}, \qquad (6)$$

откуда

$$n^2=\frac{n_z^2}{n_z^2-2n_z\left(n_z-1\right)\cos\varphi+\left(n_z-1\right)^2}.$$

С учетом $\cos\varphi=\frac{R-t}{R}=1-\frac{t}{R}$ получаем формулу для ПП по поверхности линзы по координате $z$ в пределах светового диаметра поверхности линзы (в пределах стрелки прогиба поверхности):

$$n^2={n_z}^2\Bigg/\left(\frac{2n_z\left(n_z-1\right)}{R}t+1\right). \qquad (7)$$

Формула (7) позволяет рассчитать ПП на поверхности линзы, при котором обеспечивается гомоцентричность маргинального и параксиального лучей при положении предмета на бесконечности.

Формулу (7), учитывая (5), можно записать через $s'$:

$$n^2={n_z}^2\Bigg/\left(\frac{2n_z t}{s'}+1\right)$$

или, учитывая $s'=f'$,

$$n^2={n_z}^2\Bigg/\left(\frac{2n_z t}{f'}+1\right). \qquad (8)$$

При $t/f \ll 1$ функцию (8) можно представить в виде ряда

$$n=n_z\left(1-\frac{n_z}{f'}t+\frac{3}{2}\frac{{n_z}^2}{f'^2}t^2-\frac{15}{6}\frac{n_z^3}{f'^3}t^3+\frac{35}{8}\frac{n_z^4}{f'^4}t^4-\ldots\right). \qquad (9)$$

Анализ (9) показывает, что в первом приближении распределение ПП является линейным. Формулу (9) запишем в виде полинома с коэффициентами $n_{0i}$

$$n(z)=n_0+n_{01}z+n_{02}z^2+n_{03}z^3+n_{04}z^4+\ldots,$$

$$n_{01}=-n_z^2/f',\ n_{02}=\frac{3}{2}n_z^3/f'^2,\ n_{03}=-\frac{15}{6}n_z^4/f'^3,\ n_{04}=\frac{35}{8}n_z^5/f'^4. \qquad (10)$$

Отметим, что выражение (10) совпадает с приведенной в [6] формулой, полученной из теории аберрации 3-го порядка линзы с осевым распределением ПП.

Такая форма записи относится к системе координат, привязанной к вершине поверхности линзы. При расчетах реальных лучей систему координат по ходу луча обычно располагают последовательно в начале очередной оптической среды [10]. При подготовке задания на расчет с помощью ЭВМ знаки коэффициентов $n_{0i}$ полинома (9) следует изменить на противоположные, а коэффициент $n_0$ есть ПП в начале неоднородной оптической среды.

Для лучей А и В также выполняется условие таутохронизма. Оптическая длина хода луча А

$$\mathrm{DF}'=\frac{R}{n_0-1}\sqrt{1+\frac{2n_0\left(n_0-1\right)}{R}t},$$

оптическая длина хода луча B

$$\mathrm{CF}' = \int_0^t n(z)dz + s' = \int_0^t n(z)dz + \frac{R}{n_0-1} = \frac{R}{n_0-1}\sqrt{1+\frac{2n_0\left(n_0-1\right)}{R}t} - \frac{R}{n_0-1} + \frac{R}{n_0-1};$$

$$\mathrm{DF}' - \mathrm{CF}' = 0.$$

Таким образом, в общем случае для исправления сферической аберрации маргинального луча линзы функция ПП по оси $OZ$ должна быть нелинейной и определяться формулой (8) или ее разложением в ряд (9).

В качестве примера выполнения условия (10) рассмотрим линзу с фокусным расстоянием $f' = 20$ мм, $r_1 = \infty$, $r_2 = -10$ мм, толщиной 2 мм, показатель преломления исходного стекла линзы $n = 1{,}5000$ при различных относительных отверстиях 1:К = 1:2,8; 1:3,5; 1:7. По оси ординат откладывается $R^2 = (h/m_{\text{кр}})^2$.

*Относительное отверстие 1:2,8* ($m_{\text{кр}}=h=3{,}57$ мм, $t = 0{,}66$ мм, $d_1 = 1{,}34$ мм; аберрация однородной линзы $\Delta s' = -3{,}204$ мм; $n_0 = 1{,}430893$, $n_{01} = 0{,}1125$ мм$^{-1}$, $n_{02} = -0{,}012656$ мм$^{-2}$, $n_{03} = 0{,}001582$ мм$^{-3}$, $n_{04} = -0{,}0002076$ мм$^{-4}$, $\Delta n = n_z - n_0 = 0{,}069107$). На рис. 3 представлена продольная аберрация линзы согласно табл. 1 ($n_{01}\dots n_{04}$).

*Таблица 1*

| $m/m_{\text{кр}}$ | $\Delta s'(n_{01}\dots n_{04})$ | $\Delta s'(n_{01}\dots n_{03})$ | $\Delta s'(n_{01}\dots n_{02})$ | $\Delta s'(n_{01})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,00 | –0,0005 | 0,001 | –0,017 | 0,201 |
| 0,87 | –0,089 | –0,088 | –0,106 | 0,095 |
| 0,70 | –0,110 | –0,109 | –0,124 | 0,031 |
| 0,50 | –0,076 | –0,076 | –0,085 | 0,001 |
| 0,00 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

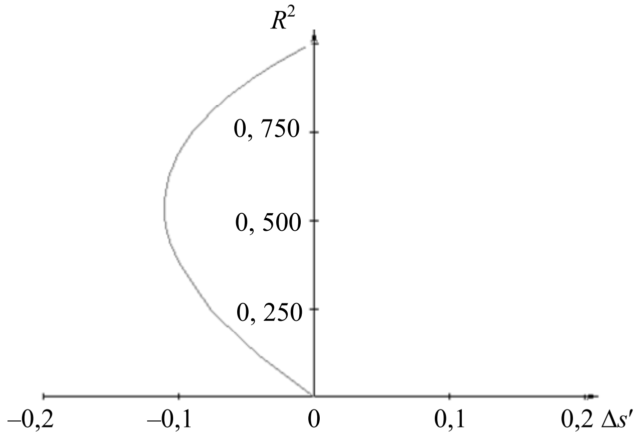


*Рис. 3*

*Относительное отверстие 1:3,5* ($m_{\text{кр}}=h=2{,}85$ мм, $t = 0{,}42$ мм, $d_1 = 1{,}58$ мм, $\Delta s' = -1{,}898$ мм, $n_0 = 1{,}455195$, $n_{01} = 0{,}1125$ мм$^{-1}$, $n_{02} = -0{,}012656$ мм$^{-2}$, $n_{03} = 0{,}001582$ мм$^{-3}$, $n_{04} = -0{,}0002076$ мм$^{-4}$, $\Delta n = n_z - n_0 = 0{,}044805$; см. табл. 2).

*Таблица 2*

| $m/m_{\text{кр}}$ | $\Delta s'(n_{01}\dots n_{04})$ | $\Delta s'(n_{01}\dots n_{03})$ | $\Delta s'(n_{01}\dots n_{02})$ | $\Delta s'(n_{01})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,00 | –0,0005 | –0,0005 | –0,00533 | 0,0823 |
| 0,87 | –0,08943 | –0,0894 | –0,03922 | 0,0418 |
| 0,70 | –0.1098 | –0.1098 | –0,04762 | 0,0156 |
| 0,50 | –0,0763 | –0,0763 | –0,03365 | 0,0021 |
| 0,00 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

*Относительное отверстие 1:7* ($m_{\text{кр}}=h=1{,}40$ мм, $t = 0{,}103$ мм, $d_1 = 1{,}897$ мм, $\Delta s' = -0{,}445$ мм, $n_0 = 1{,}48859$, $n_{01} = 0{,}1125$ мм$^{-1}$, $n_{02} = -0{,}012656$ мм$^{-2}$, $n_{03} = 0{,}001582$ мм$^{-3}$, $n_{04} = -0{,}0002076$ мм$^{-4}$, $\Delta n = n_z - n_0 = 0{,}011$; см. табл. 3).

*Таблица 3*

| $m/m_{кр}$ | $\Delta s'(n_{01}...n_{04})$ | $\Delta s'(n_{01}...n_{03})$ | $\Delta s'(n_{01}...n_{02})$ | $\Delta s'(n_{01})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,00 | –0,0004 | –0,0004 | –0,0005 | 0,0048 |
| 0,87 | –0,0022 | –0,0021 | –0,0022 | 0,0027 |
| 0,70 | –0,0027 | –0,0026 | –0,0027 | 0,0011 |
| 0,50 | –0,0019 | –0,0019 | –0,0020 | 0,0003 |
| 0,00 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

На рис. 4 приведены графики функций $n(z)$ для линзы 1:K=1:2,8 (*1* — при линейном полиноме $n_1(z)$, *2* — полиноме 4-й степени — $n(z)$, *3* — полиноме 2-й степени — $n_2(z)$).

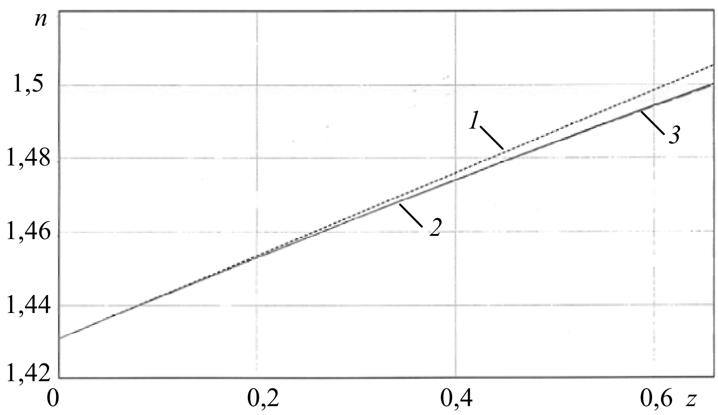


*Рис. 4*

Анализ формул (10), рис. 4 и данных табл. 1—3 показывает, что:

— в общем случае функция распределения ПП является нелинейной (1:2,8) и приближается к линейной при уменьшении относительного отверстия линзы;

— значения коэффициентов $n_{01}...n_{04}$ одинаковы для различных относительных отверстий линзы, изменяется глубина неоднородной зоны стекла и начальное (по ходу луча) значение ПП;

— коэффициент $n_{01}$ (угловой коэффициент наклона осевого распределения ПП) определяет исправление 3-го порядка сферической аберрации и является важнейшим параметром осевого распределения ПП, от которого зависят его коррекционные свойства.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sands P. J.* Inhomogeneous lenses. IV. Aberration of lenses with axial index distribution // JOSA. 1971. Vol. 61, N 8. P. 1086—1091.

2. *Marchand E. W.* Gradient index lenses // Progr. Opt. 1973. Vol. 11. P. 307—337.

3. *Koike Y.* et al. Plastic axial gradient-index lens // Appl. Opt. 1985. Vol. 24, N 24. P. 4321—4325.

4. *Moore D. T.* Catadioptric system with a gradient index corrector plate // JOSA. 1977. Vol. 67, N 9. P. 1143—1146.

5. *Moore D. T.* Gradient-index optics: a review // Appl. Opt. 1980. Vol. 19, N 7. P. 1035—1038.

6. *Сушков А. Л.* Исправление сферической аберрации третьего порядка в линзе асферизацией поверхности и введением осевой, радиальной и радиально-осевой неоднородности показателя преломления // Изв. вузов. Приборостроение. 2010. Т. 52, № 10. С. 54—62.

7. *Сушков А. Л.* Некоторые малоизвестные аберрационные свойства оптической поверхности // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 7 [Электронный ресурс]: <http:// engjournal.ru/catalog/ pribor/828/html>.

8. *Marchand E. W.* Gradient index optics. N Y: Acad. Press, 1976. 166 p.

9. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики / Пер. с англ. под ред. *Г. П. Мотулевич*. М.: Наука, 1970. 855 с.

10. *Montagnino L.* Ray tracing in inhomogeneous media // JOSA. 1968. Vol. 58, N 12. P. 1667—1672.

***Сведения об авторах***

***Александр Леонидович Сушков*** — канд. техн. наук, доцент; МГТУ им. Н. Э. Баумана; кафедра оптико-электронных приборов научных исследований; E-mail: ale-sushkov@yandex.ru

***Сергей Александрович Гусев*** — ЗАО „Гринекст“; инженер; E-mail: gs-a@ yandex.ru

Рекомендована кафедрой оптико-электронных приборов научных исследований

Поступила в редакцию 18.11.16 г.

**Ссылка для цитирования:** *Сушков А. Л., Гусев С. А.* Аналитическое условие исправления сферической аберрации в линзе с осевой неоднородностью показателя преломления // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 8. С. 764—769.

**ANALYTICAL CONDITION OF CORRECTING SPHERICAL ABERRATION IN THE LENS WITH AXIAL INHOMOGENEITY OF THE REFRACTIVE INDEX**

**A. L. Sushkov[1], S. A. Gusev[2]**

[1]*Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russia*
*E-mail: ale-sushkov@yandex.ru*

[2]*GRINEXT Corp., 195248, St. Petersburg, Russia*

Axial distribution of the refractive index in glass lens is proposed as a mean for correction of spherical aberration. The function describing the refractive index distribution along the lens surface to correct the spherical aberration is derived for the case of remote object imaging at various relative aperture values. Angular coefficient of inclination of the axial distribution of refractive index is shown to be the decisive factor when correcting spherical aberration. The use of gradient media is supposed to be promising in the manufacture of optical elements with best light-transmission characteristics.

**Keywords:** lens, axial inhomogeneity of refractive index, spherical aberration

***Data on authors***

***Aleksander L. Sushkov*** — PhD, Associate Professor; Bauman Moscow State Technical University; Department of Opto-Electronic Instruments for Scientific Research; E-mail: ale-sushkov@yandex.ru

***Sergey A. Gusev*** — GRINEXT Corp.; Engineer; E-mail: gs-a@ yandex.ru

**For citation**: Sushkov A. L., Gusev S. A. Analytical condition of correcting spherical aberration in the lens with axial inhomogeneity of the refractive index. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 8. P. 764—769 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-8-764-769