УДК 681.5.015
DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-9-812-817

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА С НЕСТАЦИОНАРНОЙ АМПЛИТУДОЙ

А. А. Ведяков, А. А. Бобцов, А. А. Пыркин

Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vedyakov@corp.ifmo.ru

Предложен метод оценивания параметров синусоидального сигнала с нестационарной амплитудой, известной с точностью до постоянного множителя. Описан метод параметризации, использование которого позволяет с помощью доступных измерений получить линейную регрессионную модель. На основе градиентного метода синтезируется алгоритм идентификации параметров модели и параметров исходного сигнала, обеспечивающий экспоненциальную сходимость к нулю ошибок оценивания.

Ключевые слова: *идентификация, обработка сигналов, оценивание частоты, нестационарные сигналы*

Введение. Задача оценивания параметров синусоидальных сигналов является базовой и, кроме теоретической значимости, имеет широкое практическое применение [1]. Такая задача может возникать при синтезе системы компенсации параметрически неопределенного возмущения [2], например в прецизионных системах перемещения [3]. В энергетических системах оценка частоты используется в задачах распределения нагрузки, обнаружения неисправностей, улучшения качества работы электрогенераторов [4, 5].

Особый интерес представляют алгоритмы, обеспечивающие глобальную сходимость к нулю ошибок оценивания при любых допустимых начальных условиях и параметрах схемы оценивания (см., например, [6—9]). Однако в таких работах обычно рассматриваются стационарные сигналы. С другой стороны, с практической точки зрения, оценивание особенно важно в случаях, когда параметры сигнала изменяются во времени, например для обнаружения неисправностей в работе электрогенераторов [10].

В настоящей статье рассматривается задача синтеза устройства оценивания параметров синусоидального сигнала с нестационарной амплитудой, известной с точностью до постоянного множителя. Предложена параметризация, позволяющая получить линейную регрессионную модель, вектор неизвестных параметров которой связан с параметрами исходного сигнала. Для оценивания параметров используется градиентный метод. Сформулированы условия, при выполнении которых обеспечивается экспоненциальная сходимость к нулю ошибок оценивания.

Постановка задачи. Рассматривается измеряемый сигнал

$$y(t) = \mu A(t)\sin(\omega t + \delta), \tag{1}$$

где μ, ω, δ — неизвестные постоянные параметры, $A(t)$ — функция времени.

Сигнал (1) можно рассматривать как синусоидальный сигнал с частотой ω, фазой δ и нестационарной амплитудой $\mu A(t)$.

Допущение 1. Известна верхняя $\overline{\omega}$ и нижняя $\underline{\omega}$ границы частоты ω, причем $\underline{\omega} > 0$.

Допущение 2. Функция $A(t)$ является известной, непрерывной и ограниченной. (Дополнительные допущения относительно функции $A(t)$ будут введены далее при синтезе алгоритма оценивания.)

Требуется синтезировать устройство оценивания, обеспечивающее для любых $\mu > 0$, $\omega > 0$ и δ выполнение следующих условий:

$$\left|\omega - \hat{\omega}(t)\right| \le C_{11} e^{-a_{11} t}; \tag{2}$$

$$\left|\mu - \hat{\mu}(t)\right| \le C_{12} e^{-a_{12} t}, \tag{3}$$

где $\hat{\omega}(t)$ — текущая оценка коэффициента при частоте ω; $\hat{\mu}(t)$ — текущая оценка коэффициента при амплитуде μ; C_{11}, C_{12}, a_{11}, a_{12} — некоторые положительные константы.

Параметризация. Одна из особенностей при решении поставленной задачи заключается в том, что зависимость $y(t)$ от параметра ω является нелинейной. Произведем параметризацию и получим линейную регрессионную модель, оценив параметры которой сможем найти оценки для μ и ω.

Пропустим сигнал через звено запаздывания, тогда

$$y_1(t) = y(t-\tau) = \mu_1\beta_1 A_1(t)\sin(\omega t + \delta) - \mu_1\beta_2 A_1(t)\cos(\omega t + \delta), \tag{4}$$

где $\tau > 0$ — выбираемая величина запаздывания, $A_1(t) = A(t-\tau)$, $\beta_1 = \cos\omega\tau$, $\beta_2 = \sin\omega\tau$.

Вычитая из уравнения (1), умноженного на $A_1(t)\beta_1$, выражение (4), умноженное на $A(t)$, получаем

$$\beta_1 A_1(t) y(t) - A(t) y_1(t) = \mu\beta_2 A(t) A_1(t)\cos(\omega t + \delta). \tag{5}$$

Тогда из выражений (5) и (1) следует

$$\mu\beta_2 A(t) A_1(t)\sin(\omega t + \delta) = \beta_2 A_1(t) y(t), \tag{6}$$

$$\mu\beta_2 A(t) A_1(t)\cos(\omega t + \delta) = \beta_1 A_1(t) y(t) - A(t) y_1(t). \tag{7}$$

Возводя в квадрат и складывая левые и правые части уравнений (6) и (7), получаем

$$A_1^2(t) y^2(t) + A^2(t) y_1^2(t) = 2\beta_1 A(t) A_1(t) y(t) y_1(t) + \mu^2(1-\beta_1^2) A^2(t) A_1^2(t). \tag{8}$$

Выражение (8) есть искомая линейная регрессионная модель вида

$$\psi(t) = \mathbf{\Theta}^T \mathbf{\Phi}(t), \tag{9}$$

где $\psi(t)$ — выходной сигнал модели, $\mathbf{\Theta}$ — вектор неизвестных параметров, $\mathbf{\Phi}(t)$ — регрессор:

$$\psi(t) = A_1^2(t) y^2(t) + A^2(t) y_1^2(t); \tag{10}$$

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \mu^2\left(1-\beta_1^2\right) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A(t) A_1(t) y(t) y_1(t) \\ A^2(t) A_1^2(t) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

З а м е ч а н и е. Представленный подход применим и к задаче оценивания параметров синусоидальных сигналов с постоянной амплитудой. Если $A(t) = 1$, то регрессионная модель (9)—(12) принимает вид

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\mathbf{\Theta}}^T \bar{\mathbf{\Phi}}(t), \tag{13}$$

где

$$\bar{\psi}(t) = A_1^2(t) y^2(t) + A^2(t) y_1^2(t); \tag{14}$$

$$\bar{\mathbf{\Theta}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \mu^2\left(1-\beta_1^2\right) \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(t) = \begin{bmatrix} 2y(t) y_1(t) \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Аналогично можно получить линейную регрессионную модель для сигналов со смещением.

Алгоритм оценивания параметров. Идентификация модели (9)—(12) может быть произведена разными способами [11]. Предлагается использовать градиентный метод [12], отличающийся своей простотой. В этом случае алгоритм идентификации будет иметь вид

$$\dot{\hat{\mathbf{\Theta}}}(t)=\mathbf{K}\mathbf{\Phi}(t)\left(\psi(t)-\hat{\mathbf{\Theta}}^T(t)\mathbf{\Phi}(t)\right), \tag{17}$$

где $\hat{\mathbf{\Theta}}^T(t)=[\hat{\theta}_1(t),\hat{\theta}_2(t)]$ — оценка вектора неизвестных параметров $\mathbf{\Theta}$, $\mathbf{K}=\mathrm{diag}\{k_1,k_2\}$.

Для обеспечения экспоненциальной сходимости ошибки оценивания к нулю, т.е.

$$\left\|\mathbf{\Theta}-\hat{\mathbf{\Theta}}(t)\right\|\le C_2e^{-a_2t}, \tag{18}$$

где C_2, a_2 — некоторые положительные константы, необходимо выполнение следующих условий [12]:

1) регрессор $\mathbf{\Phi}(t)$ должен быть ограничен;

2) регрессор должен удовлетворять условию неисчезающего возбуждения, т.е. должна существовать пара положительных чисел T и α, таких что для всех $t>0$ будет справедливо неравенство

$$\int_t^{t+T}\mathbf{\Phi}^T(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau)d\tau\ge\alpha\mathbf{I}, \tag{19}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Первое условие выполняется в силу допущения 2. Для выполнения второго условия требуется ввести дополнительные ограничения. В зависимости от конкретного вида функции $A(t)$ условие (19) может как выполняться, так и не выполняться. В регрессор $\mathbf{\Phi}(t)$ входит функция $A_1(t)=A(t-\tau)$, что означает дополнительную возможность обеспечения выполнения условия (19) путем выбора соответствующей величины запаздывания τ. В данной статье ограничимся введением общего допущения.

Допущение 3. Функция $A(t)$ и запаздывание τ, такие что регрессор $\mathbf{\Phi}(t)$ удовлетворяет условию (19).

Оценивание параметров исходного сигнала. Следующим шагом является нахождение $\hat{\omega}(t)$ и $\hat{\mu}(t)$ на основе оценок параметров модели (9)—(12).

Из выражения (18) следует выполнение неравенств

$$\left|\theta_1-\hat{\theta}_1(t)\right|\le C_{21}e^{-a_2t}; \tag{20}$$

$$\left|\theta_2-\hat{\theta}_2(t)\right|\le C_{22}e^{-a_2t}, \tag{21}$$

где $\hat{\theta}_1(t)$, $\hat{\theta}_2(t)$ — оценки параметров θ_1 и θ_2 соответственно, C_{21}, C_{22} — некоторые положительные константы.

Из уравнения (11) найдем выражения для расчета оценок $\hat{\mu}(t)$ и $\hat{\omega}(t)$ на основе $\hat{\theta}_1(t)$ и $\hat{\theta}_2(t)$:

$$\hat{\mu}(t)\ =\sqrt{\hat{\theta}_2(t)/(1-\hat{\theta}_1^2(t))}. \tag{22}$$

$$\hat{\omega}(t)\ =\frac{1}{\tau}\arccos\left(\hat{\theta}_1(t)\right), \tag{23}$$

Для однозначного определения $\hat{\omega}(t)$ на основе $\hat{\theta}_1(t)$ необходимо выполнение условия

$$\omega\tau<\pi. \tag{24}$$

Для этого следует выбирать запаздывание τ согласно следующему неравенству:

$$\tau < \pi/\overline{\omega}. \qquad (25)$$

Более того, так как область определения функций (22) и (23) есть подмножество $\mathbb{R}$, необходимо ввести соответствующие ограничения на допустимые значения $\hat{\theta}_1(t)$ и $\hat{\theta}_2(t)$, например с помощью использования проекции в алгоритме идентификации (17) [12]. С учетом (25) и допущения 1 значения $\hat{\theta}_1(t)$ должны удовлетворять неравенству

$$\theta_{1,\min} \le \hat{\theta}_1(t) \le \theta_{1,\max}, \qquad (26)$$

где $\theta_{1,\min} = \cos\overline{\omega}\tau$, $\theta_{1,\max} = \cos\underline{\omega}\tau$.

Из (11) следует, что $\hat{\theta}_2(t)$ может принимать значения из полуинтервала $[0,+\infty)$.

Рассмотрим вопрос сходимости оценок $\hat{\mu}(t)$ и $\hat{\omega}(t)$.

Утверждение. При экспоненциальной сходимости к нулю ошибок оценивания параметров θ_1 и θ_2 оценки $\hat{\omega}(t)$ и $\hat{\mu}(t)$ экспоненциально сходятся к истинным значениям ω и μ соответственно, что обеспечивает выполнение требований (2) и (3).

Доказательство. Рассмотрим сходимость оценки $\hat{\omega}(t)$ к ω. Арккосинус на отрезке $\left[\cos\overline{\omega}\tau_1, \cos\underline{\omega}\tau_1\right]$ — липшицева функция, т.е.

$$\left|\arccos x_1 - \arccos x_2\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|, \qquad (27)$$

где константа Липшица L может быть рассчитана следующим образом:

$$L = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\underline{\omega}}}. \qquad (28)$$

Из выражений (20), (22) и (27) следует, что

$$\left|\omega - \hat{\omega}(t)\right| \le L\left|\theta_1 - \hat{\theta}_1(t)\right| \le C_{11}e^{-a_{11}t},$$

где $C_{11} = LC_{21}/\tau$, $a_{11} = a_2$.

Рассмотрим сходимость оценки $\hat{\mu}(t)$ к μ. Из выражений (23) и (20) следует, что

$$\left|\mu^2 - \hat{\mu}^2(t)\right| = \left|\tilde{\theta}_1(t)\frac{\theta_2(\theta_1 + \hat{\theta}_1(t))}{(1-\theta_1^2)(1-\hat{\theta}_1^2(t))} + \frac{\tilde{\theta}_2(t)}{1-\hat{\theta}_1^2(t)}\right|,$$

откуда получим цепочку неравенств:

$$\left|\mu^2 - \hat{\mu}^2(t)\right| \le \left|\tilde{\theta}_1(t)\frac{\theta_2(\theta_1 + \theta_{1,\max})}{(1-\theta_1^2)(1-\theta_{1,\min}^2)}\right| + \left|\frac{\tilde{\theta}_2(t)}{1-\theta_{1,\min}^2}\right|;$$

$$\left|\mu^2 - \hat{\mu}^2(t)\right| \le C_{32}e^{-a_2 t},$$

где

$$C_{32} = C_{21}\frac{\theta_2(\theta_1 + \theta_{1,\max})}{(1-\theta_1^2)(1-\theta_{1,\min}^2)} + C_{22}\frac{1}{1-\theta_{1,\min}^2}.$$

Теперь рассмотрим ошибку оценивания $\tilde{\mu}(t) = \mu - \hat{\mu}(t)$:

$$\tilde{\mu}(t) = \sqrt{\left|\tilde{\theta}_2^2(t) + \hat{\theta}_2^2(t)\right|} - \sqrt{\left|\hat{\theta}_2^2(t)\right|} \le \sqrt{\left|\tilde{\theta}_2^2(t)\right|};$$

$$\tilde{\mu}(t) = \sqrt{\left|\theta_2^2(t)\right|} + \sqrt{\left|\theta_2^2(t) - \tilde{\theta}_2^2(t)\right|} \ge -\sqrt{\left|\tilde{\theta}_2^2(t)\right|},$$

откуда следует, что

$$|\tilde{\mu}| \leq C_{12}e^{-a_{12}t},$$

где $C_{12} = \sqrt{C_{32}}$, $a_{12} = a_2 / 2$.

Заключение. Предложен новый алгоритм оценивания параметров синусоидального сигнала с нестационарной амплитудой. Приведена процедура параметризации, позволяющая получить линейную регрессионную модель. Синтезирован алгоритм оценивания параметров сигнала, обеспечивающий экспоненциальную сходимость к нулю ошибок оценивания.

В работе предполагается, что амплитуда известна с точностью до постоянного множителя, в дальнейшем это допущение планируется смягчить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stoica P., Li H., Li J.* Amplitude estimation of sinusoidal signals: survey, new results, and an application // IEEE Transact. on Signal Processing. 2000. Vol. 48, N 2. P. 338—352.
2. *Пыркин А. А., Бобцов А. А., Никифоров В. О., Колюбин С. А., Ведяков А. А., Борисов О. И., Громов В. С.* Компенсация полигармонического возмущения, действующего на состояние и выход линейного объекта с запаздыванием в канале управления // Автоматика и телемеханика. 2015. № 12. С. 43–64.
3. *Aphale S. S., Bhikkaji B., Moheimani S. O. R.* Minimizing scanning errors in piezoelectric stack-actuated nanopositioning platforms // IEEE Transact. on Nanotechnology. 2008. Vol. 7, N 1. P. 79—90.
4. *Phan A. T., Hermann G., Wira P.* A new state-space for unbalanced three-phase systems: Application to fundamental frequency tracking with Kalman filtering // Proc. of the 18th Mediterranean Electrotechnical Conf. (MELECON). 2016. P. 1—6.
5. *Xia Y., Douglas S., Mandic D.* Adaptive frequency estimation in smart grid applications: Exploiting noncircularity and widely linear adaptive estimators // IEEE Signal Process. Mag. 2012. Vol. 29, N 5. P. 44—54.
6. Estimation of polyharmonic signal parameters / *A. A. Pyrkin, A. A. Bobtsov, A. A. Vedyakov, S. A. Kolyubin* // Automat. Remote Control. 2015. Vol. 76, N 8. P. 1400—1416.
7. *Fedele G., Ferrise A., D'Aquila G.* A global frequency estimator based on a frequency-locked-loop filter // Amer. Control Conf. (ACC). 2016. P. 7001— 7006.
8. *Hou M.* Parameter identification of sinusoids // IEEE Transact. on Automat. Control. 2012. Vol. 57, N 2. P. 467—472.
9. *Marino R., Tomei P.* Frequency estimation of periodic signals // Eur. Control Conf. IEEE. 2014. P. 7—12.
10. *Manglik A., Li W., Ahmad S. U.* Fault detection in power system using the Hilbert-Huang Transform // IEEE Canadian Conf. on Electrical and Computer Engineering (CCECE). 2016. P. 1—4.
11. *Льюнг Л.* Идентификация систем Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
12. *Ioannou P. A., Sun J.* Robust Adaptive Control. California : PTR Prentice-Hall, 1996.

Сведения об авторах

Алексей Алексеевич Ведяков — канд. техн. наук; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: vedyakov@corp.ifmo.ru

Алексей Алексеевич Бобцов — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: bobtsov@mail.ru

Антон Александрович Пыркин — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: a.pyrkin@gmail.com

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
21.03.17 г.

Ссылка для цитирования: *Ведяков А. А., Бобцов А. А., Пыркин А. А.* Оценивание параметров синусоидального сигнала с нестационарной амплитудой // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 9. С. 812—817.

PARAMETERS ESTIMATION OF A SINUSOIDAL SIGNAL WITH NON-STATIONARY AMPLITUDE

***A. A. Vedyakov*, A. A. Bobtsov, A. A. Pyrkin**

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: vedyakov@corp.ifmo.ru

A method is proposed for a sinusoidal signal parameters estimation, when the time-varying amplitude of the signal is the product of a known function and unknown coefficient. A new parametrization approach is applied to obtaine linear regression model. The estimation algorithm for the model and initial signal parameters is synthesyzed on the base of standart gradient method. The parameters estimation errors are shown to converge exponentialy to zero.

Keywords: identification, signal processing, frequency estimation, non-stationary signals

Data on authors

Alexey A. Vedyakov — PhD; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: vedyakov@corp.ifmo.ru

Alexey A. Bobtsov — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: bobtsov@mail.ru

Anton A. Pyrkin — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: a.pyrkin@gmail.com

For citation: Vedyakov A. A., Bobtsov A. A., Pyrkin A. A. Parameters estimation of a sinusoidal signal with nonstationary amplitude. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 9. P. 812—817 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-9-812-817