УДК 28.50
DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-9-863-868

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОЛИТОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

С. В. Быстров[1], В. В. Григорьев[1], О. К. Мансурова[2], И. М. Першин[3], М. И. Першин[4]

[1]*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия*

[2]*Санкт-Петербургский горный университет, 199106, Санкт-Петербург, Россия*

[3]*Филиал Северо-Кавказского федерального университета, 357501, Пятигорск, Россия*
E-mail: ivmp@yandex.ru

[4]*Южный федеральный университет, 344006, Ростов-на-Дону, Россия*

Многие гидролитосферные процессы описываются уравнениями в частных производных, математические модели которых не имеют аналитического решения; в некоторых случаях отсутствуют и их математические модели. Представлена методика построения аппроксимирующей модели гидролитосферного процесса, использование которой позволяет на основе частотного метода синтеза и качественной теории распределения мод проектировать распределенные регуляторы, обеспечивающие требуемые показатели качества.

Ключевые слова: *гидролитосферные процессы, распределенные объекты, уравнения в частных производных*

Математические модели гидролитосферных процессов описываются системами уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями. Каждое месторождение минеральных вод является уникальным и характеризуется конкретной совокупностью геометрических и физических параметров, определяющих динамику гидролитосферных процессов. Математические модели ряда месторождений минеральных вод приведены в [1—4]. Основные задачи рационального природопользования — синтез системы управления дебитами добывающих скважин и формирование оптимальных технологических режимов эксплуатации месторождений. Оптимальные режимы эксплуатации месторождений рассмотрены в работах [1, 5, 6], Методы определения оптимального числа добывающих скважин приведены в работе [1].

На примере гидролитосферного процесса рассмотрим сочетание обычного частотного метода синтеза и качественной теории для улучшения динамических характеристик замкнутой системы управления. Математическая модель гидролитосферного процесса имеет следующий вид:

— для горизонта грунтовых вод

$$\frac{\partial h_1(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = k_{1,x}\frac{\partial^2 h_1(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} + k_{1,y}\frac{\partial^2 h_1(x,y,z,\tau)}{\partial y^2} + k_{1,z}\frac{\partial^2 h_1(x,y,z,\tau)}{\partial {z_1}^2};$$

$$0 < x < L_x;\ 0 < y < L_y;\ 0 < z < L_{z_1},$$

— для водоносного горизонта

$$\frac{\partial H_2(x,y,z,\tau)}{\partial \tau}=\frac{1}{\eta_2}\left(k_{2,x}\frac{\partial^2 H_2(x,y,z,\tau)}{\partial x^2}+k_{2,y}\frac{\partial^2 H_2(x,y,z,\tau)}{\partial y^2}+k_{2,z}\frac{\partial^2 H_2(x,y,z,\tau)}{\partial {z_2}^2}\right)-$$

$$-F_{2,x}\frac{\partial H_2(x,y,z,\tau)}{\partial x}+V_1(y_{2,j},\tau)\delta_2(x_{0,j},y_{0,j},z_{0,j}),$$

где h_1 — напор грунтовых вод; H_2 — напор в водоносном горизонте; x, y, z — пространственные координаты; τ — время; $V_1(y_{2,j}, \tau)$ — понижение напора, вызванное входным воздействием (дебитом) j-й добывающей скважины (в рассматриваемом случае j=1…5); $\delta_2(x_{0,j}, y_{0,j}, z_{0,j})$ — функция, равная единице, если $x= x_{0,j}$, $y= y_{0,j}$, $z= z_{0,j}$, где $x_{0,j}$, $y_{0,j}$, $z_{0,j}$ — координаты расположения добывающих скважин; $k_{i,x}, k_{i,y} k_{i,z}$ — коэффициенты фильтрации по пространственным координатам для горизонта грунтовых вод (при i=1 $k_{1,x}$= 0,252 м/сутки, $k_{1,y}$= 0,252 м/сутки, $k_{1,z}$=0,291 м/сутки) и пласта (при i=2 $k_{2,x}$=0,145 м/сутки, $k_{2,y}$=0,193 м/сутки, $k_{2,z}$=0,0194 м/сутки); η_2 — упругоемкость пласта ($\eta_2 = 0{,}0005$ м$^{-1}$); $F_{2,x}$ — скорость течения в водоносном горизонте (для рассматриваемого месторождения $F_{2,x}$= 0,1 м/ч).

Граничные условия между пластами задаются в следующем виде (условия Дарси):

— для грунтовых вод

$$h_1(x,y,L_{z_1},\tau)=h_1(x,y,L_{z_1},\tau)+b_1\cdot(H_2(x,y,0,\tau)-h_1(x,y,L_{z_1},\tau));$$

$$H_2(x,y,0,\tau)=H_2(x,y,0,\tau)-b_1\cdot(H_2(x,y,0,\tau)-h_1(x,y,L_{z_1},\tau));$$

$$\frac{\partial H_2(x,y,z,\tau)}{\partial z}=0;$$

— для боковых граней

$$h_1(0,y,z,\tau)=h_{1,0};\ \ H_2(0,y,z,\tau)=H_{2,0};$$

$$\frac{\partial h_1(L_x,y,z,\tau)}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial H_2(L_x,y,z,\tau)}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial h_1(x,0,z,\tau)}{\partial y}=\frac{\partial h_1(x,L_y,z,\tau)}{\partial y}=0;.$$

$$H_2(x,0,z,\tau)=H_2(x,L_y,z,\tau)=H_{2,0},$$

где $h_{1,0}$, $H_{2,0}$ — начальные состояния грунтовых вод и пласта; b_1 —коэффициент перетекания (b_1 = 0,00032 сутки$^{-1}$).

Входным воздействием на объект управления служит функция $U(y_j, \tau)$ (дебит добывающих скважин), которая связана с функцией $V_1(y_j, \tau)$ соотношением $V_1(y_j, \tau) = K_n U(y_j, \tau)$, j=1, 2, …, 5. Значение коэффициента передачи K_n определяется с использованием методики „колодца“ [1, 2]. В рассматриваемом случае K_n=0,0001. Функцией выхода служит изменение уровня понижения (H_2) давления в точках установки добывающих скважин.

Геометрические данные месторождения, схема которого показана на рис. 1, приведены в таблице, где Δy, Δx, Δz_1, Δz_2 — шаги дискретизации математической модели по пространственным координатам.

L_x	L_y	L_{z_1}	L_{z_2}	Δy	Δx	Δz_1	Δz_2
520 м	450 м	50 м	70 м	450 м/8	520 м/8	50 м/6	70 м/6

Добывающие скважины располагаются в следующих точках: $x_{0,j}$=3Δx; $z_{0,j}=L_{z_1}+3\Delta z_2$; $y_{0,j}= \Delta y+\Delta y j$.

С использованием приведенной выше модели и геометрических и физических данных была составлена дискретная модель объекта управления.

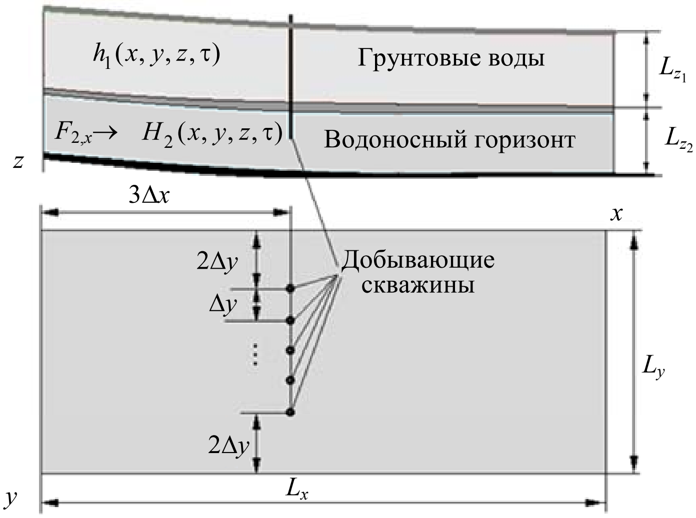

Рис. 1

Методика проведения численных исследований с использованием дискретной модели объекта управления, описанная в работах [1—4], заключается в следующем: для определения реакции системы на заданную пространственную моду входного воздействия оно скачкообразно подается на объект управления в виде выбранной пространственной моды

$$U(y_j)= A_i \sin(\psi_i y_j),\ \psi_i= \pi i/L_y,$$

где $y=\Delta y+\Delta yj$; i — номер моды (в рассматриваемом случае выбраны 1-я и 5-я пространственные моды); A и ψ — амплитуда и частота пространственной моды.

На рис. 2, *а*, *б* показаны графики реакций объекта соответственно на 1-ю и 5-ю пространственные моды входного воздействия в точке расположения во второй добывающей скважине (при этом A_i=1) при K_1=12,666/0,924=13,708 (*а*) и K_5=4,238/0,383=11,065 (*б*). Коэффициенты усиления K_i равны отношению функции выхода H_2 (понижения уровня в точке расположения скважины) к входному воздействию (U_j).

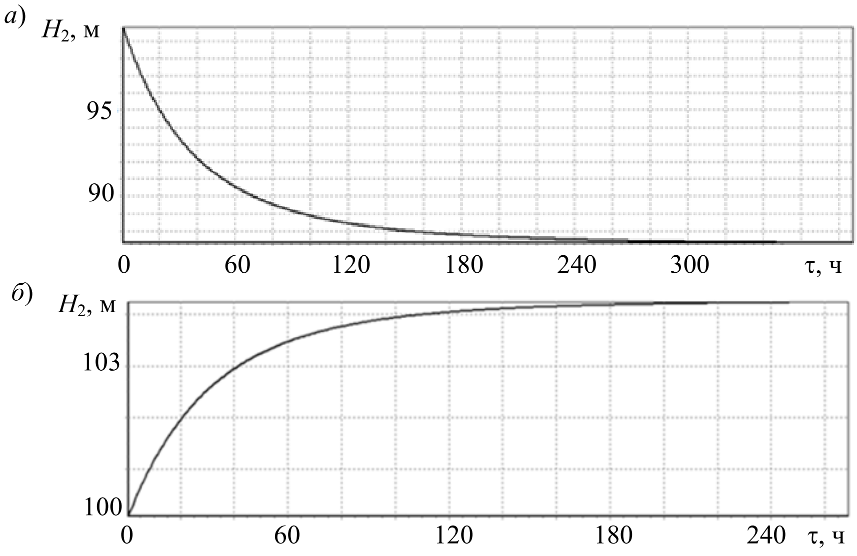

Рис. 2

Были также исследованы динамические характеристики объекта управления. При этом входное воздействие было сформировано в виде

$$U(y_j,\tau)= 1\sin(\psi_i\, y_j)\sin(\omega\tau),\quad \psi_i= \pi i/L_y,\ \omega=0{,}00001.$$

Результаты моделирования представлены графиками входного воздействия и переходного процесса на рис. 3, *а*, *б*.

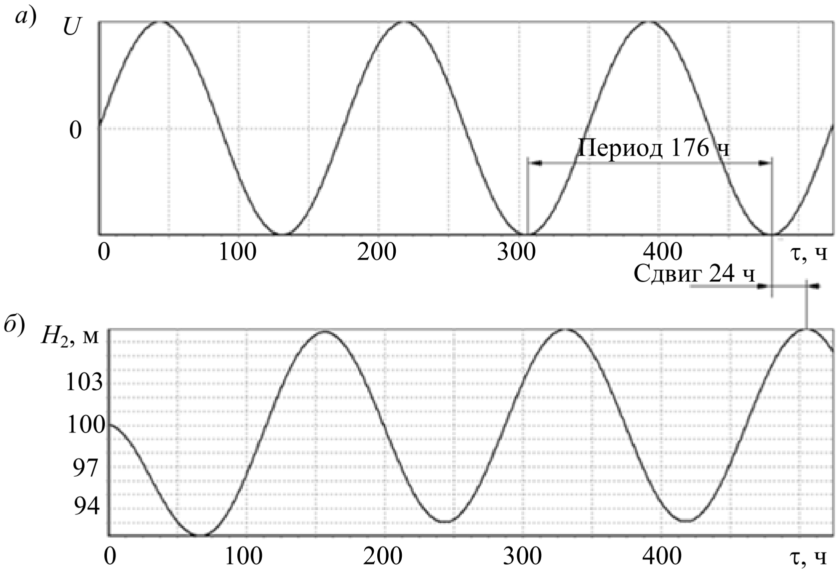

Рис. 3

Вычислим для рассматриваемого объекта управления сдвиг по фазе:

$$\Delta\varphi = -2\pi\cdot 24/176 = -0{,}857 \text{ рад.}$$

В работах [7, 8] исследованы передаточные функции аппроксимирующих звеньев для объектов с распределенными параметрами. Показано, что для описания динамических характеристик гидролитосферных процессов может быть использована передаточная функция вида

$$W_{a,i}(s) = \frac{K}{\beta_i + 1}\exp(-\beta_i \Delta z), \ \ i = \overline{1, 2 \ldots}; \qquad (1)$$

$$\beta_i = \sqrt{\frac{s}{a} + \psi_i^2},$$

где s — оператор Лапласа.

Методика определения параметров аппроксимирующего звена (K, Δz, a), описанная в работах [7, 8], состоит из следующих этапов.

1. Записывая соотношение (1) для стационарного случая, по 1-й и 5-й пространственным модам (с учетом вычисленных коэффициентов K_1 и K_5), получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{K}{\beta_1 + 1}\exp\left(-\beta_1 \Delta z\right); \\ K_5 &= \frac{K}{\beta_5 + 1}\exp\left(-\beta_5 \Delta z\right), \end{aligned}\right\}$$

$$\beta_1 = \left(\psi_1^2\right)^{1/2}, \quad \beta_5 = \left(\psi_5^2\right)^{1/2}.$$

Решая систему уравнений относительно Δz и K, получаем Δz=6,690662, K=14,463761.

2. Приняв в (1) s=$j\omega$, запишем соотношение для определения фазы:

$$\Delta\varphi = -\Delta z \cdot \operatorname{Im}\beta_1 - \operatorname{arctg}(\operatorname{Im}\beta_1 / (\operatorname{Re}\beta_1 + 1)). \qquad (2)$$

Подставив исходные данные (ω = 0,00001, $\Delta\varphi$ = –0,857) в соотношение (2), вычислим значение параметра a: a = 0,000391.

Полученная передаточная функция аппроксимирующего звена записывается в виде

$$W_{a,i}(s) = \frac{14{,}463761}{\beta_i + 1}\cdot\exp(-\beta_i \cdot 6{,}690662)\,, \ \beta_i = \sqrt{\frac{s}{0{,}000391} + \psi_i^2}\ .$$

Использование полученной аппроксимирующей модели гидролитосферного процесса месторождения минеральных вод позволяет на ее основе синтезировать системы управления дебитами добывающих скважин и формировать оптимальные технологические режимы эксплуатации месторождений. Представленная модель ориентирована на использование качественной теории распределения мод при проектировании распределенных регуляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кисловодское месторождение углекислых минеральных вод: Системный анализ, диагностика, прогноз, управление / *А. В. Малков, И. М. Першин, И. С. Помеляйко* и др. М.: Наука, 2015. 283 с.
2. *Малков А. В., Першин И. М.* Системы с распределенными параметрами. Анализ и синтез. М.: Научный мир, 2012. 476 с.
3. *Першин И. М., Веселов Г. Е., Першин М. И.* Синтез распределенных систем управления гидролитосферными процессами месторождений минеральных вод // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2014. № 8. С. 123—137.
4. *Martirosyan A. V., Martirosyan K. V., Pershin I. M.* Analysis of the Caucasus mineral waters' field's modeling // Modern Applied Science. 2015. Vol. 9, N 1. P. 204—210.
5. *Першин И. М., Малков А. В., Першин М. И.* Оперативное и стратегическое управление режимами эксплуатации гидролитосферных процессов // Недропользование XXI век. 2014. № 6. С. 40—47.
6. *Першин И. М., Кузьмин Н. Н., Малков А. В.* Формирование целевых функций в задачах управления гидролитосферными процессами // Материалы 5-й Рос. мультиконф. по проблемам управления: „Информационные технологии в управлении" (ИТУ-2012). 2012. С. 622—632.
7. *Першин М. И.* Исследование погрешностей динамических характеристик распределенных объектов при аппроксимации // Современная наука и инновации: науч. журн. 2014. № 4(8). С. 46—50.
8. *Веселов Г. Е., Першин М. И.* Проектирование распределенных систем управления гидролитосферными процессами // Изв. вузов. Геология и разведка. 2016. № 1. С. 99—105.

Сведения об авторах

Сергей Владимирович Быстров — канд. техн. наук, доцент; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: sbystrov@mail.ru

Валерий Владимирович Григорьев — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: grigvv@yandex.ru

Ольга Карибековна Мансурова — канд. техн. наук, доцент; СПГУ, кафедра автоматизации технологических процессов и производств; E-mail: erke7@mail.ru

Иван Митрофанович Першин — д-р техн. наук, профессор; Филиал СКФУ, кафедра управления в технических и биотехнических системах, Пятигорск; E-mail: ivmp@yandex.ru

Максим Иванович Першин — аспирант; ЮФУ, Ростов-на-Дону; E-mail: Pershinmaksim1992@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики
НИУ ИТМО

Поступила в редакцию
21.03.17 г.

Ссылка для цитирования: *Быстров С. В., Григорьев В. В., Мансурова О. К., Першин И. М., Першин М. И.* Математическая модель гидролитосферных процессов // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 9. С. 863—868.

MATHEMATICAL MODEL OF HYDROLITHOSPHERIC PROCESSES

S. V. Bystrov[1], V. V. Grigoriev[1], O. K. Mansurova[2], I. M. Pershin[3], M. I. Pershin[4]

[1]*ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia*

[2]*Saint Petersburg Mining University, 199106, St. Petersburg, Russia*

[3]*Branch of North-Caucasus Federal University, 357501, Pyatigorsk, Russia*
E-mail: ivmp@yandex.ru
[4]*South Federal University, 344006, Rostov-on-Don, Russia*

It is noted that many of hydrolithospheric processes are described by partial differential equations, and corresponding mathematical models do not have analytical solutions; in several cases, there are no mathematical models, too. Therefore, to solve a practical problem, such as synthesis of control system of flow rate of producing wells or formation of an optimal technological modes of operation field, it is necessary to develop an approximate model. A method of approximating model construction for a hydrolithospheric process is presented. The proposed approach is based on the methods of frequency synthesis and distribution of high-quality modes theory. Design of distributed regulators using the developed method is reported to ensure required quality parameters.

Keywords: hydrolithospheric processes, distributed objects, partial differential equations

Data on authors

Sergey V. Bystrov	—	PhD, Associate Professor; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: sbystrov@mail.ru
Valery V. Grigoriev	—	Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: grigvv@yandex.ru
Olga K. Mansurova	—	PhD, Associate Professor; Saint Petersburg Mining University, Department of Technological Process Automation and Production; E-mail: erke7@mail.ru
Ivan M. Pershin	—	Dr. Sci., Professor; North-Caucasus Federal University, Pyatigorsk Branch, Department of Control of Technical and Biotechnical Systems; E-mail: ivmp@yandex.ru
Maxim I. Pershin	—	Post-Graduate Student; South Federal University, Rostov-on-Don; E-mail: Pershinmaksim1992@yandex.ru

For citation: Bystrov S. V., Grigoriev V. V., Mansurova O. K., Pershin I. M., Pershin M. I. Mathematical model of hydrolithospheric processes. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 9. P. 863—868 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-9-863-868