УДК 519.7
DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-1-12-21

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОЦЕНИВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. Ф. Иванова

Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Klara.I2010@yandex.ru

Представлен метод оценивания устойчивости непрерывных систем управления с интервальной неопределенностью коэффициентов стационарных уравнений. Показано, что опасность возникновения неустойчивости увеличивается с ростом погрешности (диапазона интервальных границ) измерения коэффициентов матрицы системы уравнений, что обусловливает ее переход от асимптотической устойчивости к неустойчивости. Анализ устойчивости системы с интервальными коэффициентами, основанный на формализации точечных систем уравнений, построен на конструкции оптимальных угловых матриц. Оценки устойчивости интервальной системы уравнений согласуются с оценками запаса устойчивости семейства характеристических полиномов Харитонова.

Ключевые слова: *линейные непрерывные уравнения, интервальные коэффициенты, устойчивость системы, угловые оптимальные матрицы, характеристический полином*

Коэффициенты уравнений, представленные интервальными величинами, характеризуют неопределенность входных данных, которая практически всегда имеет место при измерениях. Рассмотрим систему однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка, когда все внешние воздействия отсутствуют и динамика системы определяется ее собственной структурой [1].

Будем рассматривать вариант, при котором система уравнений приведена к нормальной форме Коши, т.е. объект управления описывается векторным уравнением

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t), \tag{1}$$

где $X(t)$ — n-мерный вектор состояния, A — $n \times n$-матрица коэффициентов системы.

Устойчивость системы (1) может быть исследована с помощью корней характеристического уравнения, которое получается из матричного уравнения

$$\det(\lambda E - A) = 0,$$

где E — единичная $n \times n$-матрица.

Известно [2], что система является асимптотически устойчивой, если все корни характеристического уравнения

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2}$$

располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, имеющих отрицательные вещественные составляющие или отрицательные значения. Для этого достаточен алгебраический анализ коэффициентов уравнения (2) с помощью критериев Гурвица, Льенара — Шипара или Рауса. При этом составляется матрица из коэффициентов характеристического уравнения, расположенных по строкам в определенном порядке. Положительные значения коэффициентов и главных миноров матрицы, а также некоторых вновь сформированных коэффициентов таблицы Рауса — необходимое и достаточное условие для подтверждения устойчивости системы.

Другой вариант проверки асимптотической устойчивости системы (1) основывается на существовании функции Ляпунова в виде квадратичной формы $V(x) = X^T(t)QX^T(t)$. Если Q — положительно-определенная $n \times n$-матрица действительных чисел, то матрица A устойчива. Квадратичная форма функции Ляпунова является одновременно необходимым и достаточным условием существования равномерной асимптотической устойчивости системы в целом. Положительность матрицы Q устанавливается по критерию Сильвестра или по положительным значениям ее собственных чисел [3].

Оценка устойчивости характеристического полинома с интервальными коэффициентами, предложенная Харитоновым [4], основана на построении четырех полиномов с граничными значениями коэффициентов. Наличие только отрицательных корней или вещественных частей комплексных корней каждого из полиномов является необходимым и достаточным условием устойчивости интервальной системы. Появление хотя бы одного положительного корня или вещественной части комплексного корня характеризует неустойчивость [4, 5].

В настоящей статье представлен новый метод оценивания устойчивости непрерывной линейной системы управления с интервальными коэффициентами. Идея предлагаемого унифицированного метода изложена в работах [6—8]. Рассматриваемый в статье подход к оценке устойчивости отличается от известных [9—11] простотой и эффективностью построенного алгоритма.

Границы интервалов каждого элемента матрицы характеризуют попадание в них точного значения параметра. При использовании предлагаемого метода достаточно из множества угловых матриц интервальной системы, равного 2^{n^2}, выделить две оптимальные угловые матрицы, которые определяют минимальное и максимальное значения, соответствующие левой и правой границам интервального определителя. Это достигается выбором границы каждого элемента на основе критерия, представляющего собой минимаксное произведение граничных значений элементов интервальной матрицы на их алгебраические дополнения. Выбор границы элемента на основе предлагаемого критерия соответствует определенному точечному элементу одной из двух искомых оптимальных угловых матриц.

Примером линейной системы управления [3] является система дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы при отсутствии внешних воздействий:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -0,3622x_1 - 0,2779x_2 + 0,0255x_3 - 0,061x_4, \quad x_1(0) = 1,1;\\
\frac{dx_2}{dt} &= -0,2779x_1 - 0,6707x_2 - 0,0283x_3 - 0,2603x_4, \quad x_2(0) = -2,2;\\
\frac{dx_3}{dt} &= 0,0255x_1 - 0,0283x_2 - 1,2726x_3 - 0,1x_4, \quad x_3(0) = 1,3;\\
\frac{dx_4}{dt} &= -0,061x_1 - 0,2603x_2 - 0,1x_3 - 0,999x_4, \quad x_4(0) = -2,4.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Номинальная матрица системы, представляющая собой усредненные значения измерений, записывается как

$$A = \begin{pmatrix} -0,3622 & -0,2779 & 0,0255 & -0,061 \\ -0,2779 & -0,6707 & -0,0283 & -0,2603 \\ 0,0255 & -0,0283 & -1,2726 & -0,1 \\ -0,061 & -0,2603 & -0,1 & -0,999 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Отсюда характеристическое уравнение данной системы принимает вид

$$s^4 + 3,3048s^3 + 3,7011s^2 + 1,5690s + 0,1854 = 0. \tag{5}$$

Характеристический полином (5) имеет следующие коэффициенты: $a_4 = 1$, $a_3 = 3,3048$, $a_2 = 3,7011$, $a_1 = 1,5690$, $a_0 = 0,1854$.

Устойчивость системы (3) определяется положительностью всех главных миноров и коэффициентов матрицы Гурвица. В общем виде таблица Гурвица для системы порядка n записывается как

$$G = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5}\cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4}\cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3}\cdots. & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Как правило, принятые критерии удобны для оценки устойчивости при постоянных коэффициентах. Линейные системы являются асимптотически устойчивыми. В случае если коэффициенты неопределенны, т.е. их точные значения находятся в некотором интервале, такой подход становится проблематичным, особенно для матриц большого порядка.

Рассмотрим условия возникновения неустойчивости динамического объекта при неточном задании элементов матрицы. Анализ проводится на основе приведенной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка (3). Предполагается, что коэффициенты матрицы A принадлежат некоторому интервалу: $a_{ij}(1-\varepsilon_{ij}) \le a_{ij} \le a_{ij}(1+\varepsilon_{ij})$, $i, j = \overline{1,n}$, ε — относительная погрешность, обусловленная отклонением коэффициентов от их номинальных значений. Тогда интервальная матрица, элементы которой принадлежат левой и правой границам, может быть записана как

$$\boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \left\{ \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}; \underline{A} \le A \le \overline{A} \right\}, \quad \underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

а ее элементы $\boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ выражаются в виде

$$\underline{a} = a_{ij}(1-\varepsilon_{ij}); \quad \overline{a} = a_{ij}(1+\varepsilon_{ij}), i, j = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Для удобства анализа принимается значение $\varepsilon_0 \ge \left|\varepsilon_{ij}\right|$, не превосходящее процентов и их десятых. В то же время некоторые отклонения коэффициентов a_{ij} могут иметь на порядок большие приращения при ограничении относительной погрешности $\varepsilon_0 < 100$ %.

Построение угловых точечных матриц $\{A^-, A^+\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ осуществляется на основе фиксации элементов a^-_{ij} и a^+_{ij}, отождествляемых с границами $\underline{a}_{ij}$ или $\overline{a}_{ij}$, которые выбираются из наибольших и наименьших значений парных произведений выражения

$$W = \min\left(\underline{a}_{ij}\,\underline{\mathrm{Ad}}_{ij}, \underline{a}_{ij}\,\overline{\mathrm{Ad}}_{ij}, \overline{a}_{ij}\,\underline{\mathrm{Ad}}_{ij}, \overline{a}_{ij}\,\overline{\mathrm{Ad}}_{ij}\right), \max\left(\underline{a}_{ij}\,\underline{\mathrm{Ad}}_{ij}, \underline{a}_{ij}\,\overline{\mathrm{Ad}}_{ij}, \overline{a}_{ij}\,\underline{\mathrm{Ad}}_{ij}, \overline{a}_{ij}\,\overline{\mathrm{Ad}}_{ij}\right). \tag{7}$$

Выражение (7) формируется из поэлементных произведений граничных значений интервальных элементов $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ матрицы $\boldsymbol{A}$ на их алгебраические дополнения $[\underline{\mathrm{Ad}}_{ij}, \overline{\mathrm{Ad}}_{ij}]$.

Сформированные таким образом две точечные матрицы A^- и A^+ соответствуют наименьшему и наибольшему значениям определителей из всего множества определителей интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ [6].

Утверждение 1. Если наименьший определитель $\left|A^{-}\right|$, полученный на основе минимаксного выражения (7), меняет знак с положительного на отрицательный, это является необходимым и достаточным условием возникновения неустойчивости системы.

Доказательство. Допустим, что номинальная матрица (4) коэффициентов системы положительна и удовлетворяет условиям устойчивости. В интервальной матрице с элементами (6) точечная матрица A^{-} является одной из угловых, так что $A^{-} \in \boldsymbol{A}$. Если интервальная система порядка $n \times n$ неособенная: $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, то неособенными являются и все ее угловые матрицы [12]. При возрастании относительной погрешности элементов интервальной матрицы возникает опасность возникновения плохой обусловленности хотя бы одной из матриц и приближения к нулю ее определителя. Доказано, в силу построения, что определитель матрицы A^{-} наименьший, наибольшая вероятность приближения которого к нулю существует именно для $\left|A^{-}\right|$. Поэтому если $\left|A^{-}\right| \to 0$ при определенном ε, то интервальная система с такой матрицей становится особенной (или вырожденной), что приводит к ее неустойчивости. Одновременно с этим смена знака определителя левой оптимальной точечной матрицы является и достаточным условием неустойчивости. ■

Утверждение 2. Оценки устойчивости системы дифференциальных уравнений по разработанной методике должны полностью соответствовать известным критериальным алгебраическим оценкам Гурвица — Рауса и оценкам по сконструированным полиномам Харитонова.

Доказательство. Смена знака одного их коэффициентов характеристического уравнения при увеличении относительной погрешности элементов исходной матрицы свидетельствует о возникновении отрицательного корня характеристического уравнения и неустойчивости системы. Одновременно с этим отрицательное значение определителя одной из угловых матриц при ее переходе через нуль соответствует обратной матрице $\left(A^{-}\right)^{-1} \to \infty$ и потере непрерывности решения для вектора состояния, выводя его за границы области конечномерного пространства $\mathbb{R}^{n}$. Оба эти факта характеризуют потерю устойчивости системы на основании сформированных матриц вектора состояния и характеристических уравнений. ■

Условия устойчивости полинома с интервальными коэффициентами, границы которых определены из характеристических уравнений с номинальной $\det(\lambda E - A) = 0$ и левой оптимальной угловой матрицей $\det(\lambda E - A^{-}) = 0$, должны совпадать с оценкой устойчивости, полученной из анализа четырех точечных полиномов Харитонова. В случае если эти оценки различаются, то одна и та же интервальная система уравнений, с одной стороны, является устойчивой, а с другой — неустойчивой.

Проверим эти утверждения на примере исследования устойчивости системы (3) при разных значениях относительной погрешности: $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,2$, $\varepsilon = 0,2326$, $\varepsilon = 0,3$.

Вариант 1: ε=0,1. Граничные матрицы $\underline{A}$ и $\overline{A}$ и две оптимальные угловые матрицы A^{-} и A^{+}, первая из которых имеет наименьший из всех угловых матриц интервальной системы определитель, а вторая — наибольший, записываются как

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -0,3984 & -0,3057 & 0,0229 & -0,0671 \\ -0,3057 & -0,7378 & -0,0311 & -0,2863 \\ 0,0229 & -0,0311 & -1,3999 & -0,1100 \\ -0,0671 & -0,2863 & -0,1100 & -1,0989 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} -0,3260 & -0,2501 & 0,0280 & -0,0549 \\ -0,2501 & -0,6036 & -0,0255 & -0,2343 \\ 0,0280 & -0,0255 & -1,1453 & -0,0900 \\ -0,0549 & -0,2343 & -0,0900 & -0,8991 \end{pmatrix},$$

$$A^- = \begin{pmatrix} -0,3260 & -0,3057 & 0,0280 & -0,0549 \\ -0,3057 & -0,6036 & -0,0311 & -0,2863 \\ 0,0280 & -0,0311 & -1,1453 & -0,1100 \\ -0,0549 & -0,2863 & -0,1100 & -0,8991 \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} -0,3984 & -0,2501 & 0,0229 & -0,0671 \\ -0,2501 & -0,7378 & -0,0255 & -0,2343 \\ 0,0229 & -0,0255 & -1,3999 & -0,0900 \\ -0,0671 & -0,2343 & -0,0900 & -1,0989 \end{pmatrix}.$$

Определители номинальной, граничных, левой и правой оптимальных угловых матриц равны соответственно: $|A|$=0,1854, $|\underline{A}|$ =0,1215, $|\overline{A}|$=0,2716, $\left|A^-\right|$=0,0832, $\left|A^+\right|$=0,3292. Как правило, $\left|A^-\right| \le |\underline{A}|$ и $\left|A^+\right| \ge |\overline{A}|$. Для определения устойчивости системы, как следует из утверждения 1, достаточно исследовать устойчивость формализованной матрицы A^-. Смены знака определителя $\left|A^-\right|$, при заданном ε, по сравнению со знаком определителя номинальной матрицы $|A|$ не произошло, и возмущенная система оказалась устойчивой к погрешностям коэффициентов.

Подтвердить необходимость и достаточность устойчивости системы можно по известным алгебраическим критериям:

— все коэффициенты характеристического уравнения $\det(\lambda E - A^-) = 0$ положительны: a_4=1,0000; a_3=2,9741; a_2=2,9348; a_1=1,0397; a_0=0,0832;

— все корни характеристического уравнения $\det(\lambda E - A^-) = 0$ отрицательны: r_1= –1,2378; r_2= –1,0475; r_3= –0,5776; r_4= –0,1111;

— все главные миноры матрицы A^- положительны;

— существует квадратичная форма функции Ляпунова $V(x) = X^T(t)QX^T(t)$ с положительно-определенной матрицей Q, собственные числа которой положительны (необходимое условие асимптотической устойчивости): 0,4039; 0,4773; 0,8656; 4,4992.

Погрешность коэффициентов порядка 10 % данной системы оказалась некритичной для устойчивости интервальной системы. Показанные на рис. 1 графики переходных процессов в системе с угловыми матрицами A^- и A^+ при ε =0,1 демонстрируют асимптотическую устойчивость переходных процессов. Система с матрицей A^+ значительно быстрее достигает стационарного состояния, чем система с матрицей A^-.

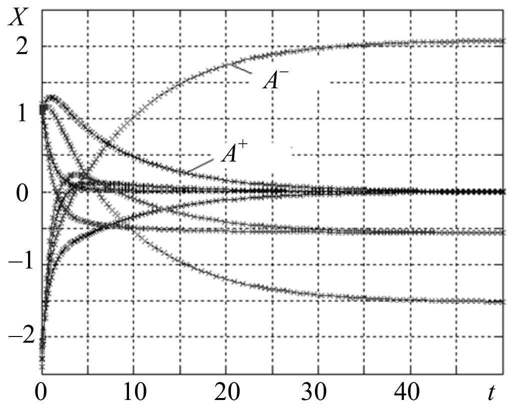

Рис. 1

В дальнейшем по основным критериям будем анализировать только левую формализованную оптимальную угловую матрицу A^- как определяющую устойчивость интервальной системы управления.

Вариант 2: ε=0,2. Формализованная левая и правая угловые матрицы A^{-} и A^{+} равны

$$A^{-}=\begin{pmatrix} -0,2898 & -0,3335 & 0,0306 & -0,0488 \\ -0,3335 & -0,5366 & -0,0340 & -0,3124 \\ 0,0306 & -0,0340 & -1,0181 & -0,1200 \\ -0,0488 & -0,3124 & -0,1200 & -0,7992 \end{pmatrix},\quad A^{+}=\begin{pmatrix} -0,4346 & -0,2223 & 0,0204 & -0,0732 \\ -0,2223 & -0,8048 & -0,0226 & -0,2082 \\ 0,0204 & -0,0226 & -1,5271 & -0,0800 \\ -0,0732 & -0,2082 & -0,0800 & -1,1988 \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц: $\left|A^{-}\right|$=0,0157; $\left|A^{+}\right|$= 0,5223. С ростом погрешности элементов исходной матрицы (увеличения интервала между границами каждого элемента) наблюдается уменьшение значения определителя левой матрицы и возрастание определителя правой. Как упоминалось выше, опасность представляет только левая матрица A^{-}, которая с ростом погрешности может вызвать неустойчивость всей системы. Правая матрица A^{+}, наоборот, определяет все более быстрый переходный процесс.

Алгебраические критерии матрицы A^{-} при ε=0,2 по-прежнему соответствуют условиям устойчивости. Коэффициенты характеристического уравнения, равные a_4=1,0000, a_3=2,6436, a_2=2,2431, a_1= 0,6187, a_0=0,0157, строго положительны, что является необходимым, но недостаточным условием устойчивости. Корни характеристического уравнения отрицательны: r_1 = –1,1560, r_2= –0,9537, r_3= –0,5057, r_4= –0,0282. Отрицательные корни являются необходимым и достаточным условием устойчивости системы в целом. Собственные числа матрицы Q (условия устойчивости) положительны: 0,4325, 0,5243, 0,9887, 7,7207. Погрешность коэффициентов порядка 20 % данной системы также оказалась некритичной для устойчивости.

Вариант 3: ε=0,3. Формализованная левая и правая угловые матрицы A^{-} и A^{+} равны

$$A^{-}=\begin{pmatrix} -0,2535 & -0,3613 & 0,0331 & -0,0427 \\ -0,3613 & -0,4695 & -0,0368 & -0,3384 \\ 0,0331 & -0,0368 & -0,8908 & -0,1300 \\ -0,0427 & -0,3384 & -0,1300 & -0,6993 \end{pmatrix},\quad A^{+}=\begin{pmatrix} -0,4709 & -0,1945 & 0,0178 & -0,0793 \\ -0,1945 & -0,8719 & -0,0198 & -0,1822 \\ 0,0178 & -0,0198 & -1,6544 & -0,0700 \\ -0,0793 & -0,1822 & -0,0700 & -1,2987 \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц: $\left|A^{-}\right|$= –0,0238, $\left|A^{+}\right|$= 0,7727. При ε = 30 % определитель $\left|A^{-}\right|$ стал отрицательным. Согласно применяемой методике смена знака определителя $\left|A^{-}\right|$ при заданной погрешности является необходимым и достаточным условием возникшей неустойчивости системы. Проверка поведения системы по известным критериям также подтверждает возникновение неустойчивости. Так, коэффициент a_0 характеристического уравнения становится отрицательным: $\boldsymbol{a_0}$**= –0,0238**, при этом a_4=1,0000, a_3=2,3131, a_2=1,6255, a_1=0,2963. Точное значение относительной погрешности ε, когда a_0 = 0, можно установить итерационным приближением величины определителя $\left|A^{-}\right|$ к нулю по ε. Так, при ε=0,23279 $\left|A^{-}\right|$= =–1,932810·10^{-6}; a_0 = –0,000004. На практике для каждого коэффициента системы имеет место и может быть задана своя погрешность, что не меняет алгоритма вычислений. Вид устойчивости при a_0 = 0 определяется по известным критериям с оценкой знака определителя матрицы Гурвица исследуемой системы n–1-го порядка. Если a_0 = 0 и $\Delta_{n-1} > 0$ (в данном случае определитель 3-го порядка Δ_3 = 2,32372), считается, что система находится на грани апериодической устойчивости. Другим подтверждением определения неустойчивости системы является то, что один из вещественных корней характеристического уравнения становится положительным: $\boldsymbol{r_4}$**= 0,0594**, при этом r_1 = –1,0871; r_2= –0,8527; r_3= –0,4326. Среди собственных значений функции Q также возникает одно отрицательное собственное число: **–8,4242**, 0,4599, 0,5864, 1,1559, что свидетельствует об отсутствии квадратичной формы функции Ляпунова.

Рассмотрим вариант расчета с пограничной погрешностью **ε=0,2326**, когда система еще остается устойчивой, но по показателям определителя матрицы A^{-} и известным критериям очень близка к неустойчивости. Формализованные угловые матрицы A^{-} и A^{+} равны

$$A^{-}=\begin{pmatrix} -0,2780 & -0,3425 & 0,0314 & -0,0468 \\ -0,3425 & -0,5147 & -0,0349 & -0,3208 \\ 0,0314 & -0,0349 & -0,9766 & -0,1233 \\ -0,0468 & -0,3208 & -0,1233 & -0,7666 \end{pmatrix},\ A^{+}=\begin{pmatrix} -0,4464 & -0,2133 & 0,0196 & -0,0752 \\ -0,2133 & -0,8267 & -0,0217 & -0,1998 \\ 0,0196 & -0,0217 & -1,5686 & -0,0767 \\ -0,0752 & -0,1998 & -0,0767 & -1,2314 \end{pmatrix}.$$

Значение определителя матрицы A^{-} положительно, но очень мало: $\left|A^{-}\right|=8,0976\cdot10^{-5}$, $\left|A^{+}\right|=0,5973$. Коэффициенты характеристического полинома A^{-} положительные: a_4=1,0000; a_3=2,5379, a_2=2,0374, a_1= 0,5053, a_0= 0,0003. Корни характеристического уравнения отрицательные: r_1 = –1,1322, r_2= –0,9214, r_3= –0,4820, r_4= –0,0002. Собственные числа матрицы Q: 0,4, 0,5, **0,0010**, 3,1053. Из представленных показателей видно, что, как и определитель угловой оптимальной матрицы, некоторые значения коэффициентов, корней и собственных чисел матрицы Q становятся малыми по абсолютной величине, что характеризует приближение системы к неустойчивости.

Проверим предлагаемый метод оценивания устойчивости при ε=0,2326 с помощью полиномов Харитонова [4], задав в качестве интервальных значений коэффициентов характеристического уравнения коэффициенты номинальной системы $\det(\lambda E-A)=0$ и левой оптимальной угловой матрицы $\det(\lambda E-A^{-})=0$:

$$D(\lambda)=[1,1]\lambda^4+[2,5379,\ 3,3048]\lambda^3+[2,0374,\ 3,7011]\lambda^2+[0,5053,\ 1,5690]\lambda+[0,0003,\ 0,1854].$$

Семейство полиномов, сформированное по правилам построения характеристических полиномов Харитонова, можно записать как

1) $D_1(\lambda)=\lambda^4+2,5379\lambda^3+2,0374\lambda^2+1,5690\lambda+0,1854$,

2) $D_2(\lambda)=\lambda^4+3,3048\lambda^3+3,7011\lambda^2+0,5053\lambda+0,0003$,

3) $D_3(\lambda)=\lambda^4+3,3048\lambda^3+2,0374\lambda^2+0,5053\lambda+0,1854$,

4) $D_4(\lambda)=\lambda^4+2,5379\lambda^3+3,7011\lambda^2+1,5690\lambda+0,0003$.

Корни характеристических полиномов Харитонова соответственно равны

r_1 =	–1,8684	–0,2642 + 0,8019i	–0,2642 – 0,8019i	–0,1392,
r_2 =	–1,5738 + 0,8542i	–1,5738 – 0,8542i	–0,1567	**–0,0002**,
r_3 =	–2,5815	–0,6376	–0,0427 + 0,3329i	–0,0427 – 0,3329i,
r_4 =	–0,9548 + 1,2620i	–0,9548 – 1,2620i	–0,6263	**–0,0001**.

Согласно сконструированным полиномам система находится на границе устойчивости, так как корни полиномов хотя и остаются отрицательными величинами, но некоторые из них малы по абсолютной величине (выделены жирным шрифтом), т.е. близки к смене знака. Для рассматриваемого метода увеличение погрешности коэффициентов системы, как показали расчеты, уже при ε=0,3 приводит к неустойчивости в связи с появлением отрицательного коэффициента.

Рассмотрим вариант возникновения неустойчивости системы под влиянием погрешности одного из элементов матрицы устойчивости. Так, при $\varepsilon_{ij} = 0,2,\ \ i, j \neq 4, \varepsilon_{44} = 0,55$ система еще остается устойчивой и $\left|A^{-}\right| = 5,0427 \cdot 10^{-4}$, а коэффициенты характеристического уравнения остаются положительными: a_4=1,0000, a_3=2,2939, a_2=1,5982, a_1= 0,3098, a_0=0,0005. При задании погрешности $\varepsilon_{44} = 0,6$ коэффициента a_{44} определитель $\left|A^{-}\right| = -0,0017$ становится отрицательным, знак коэффициента a_0 изменяется с положительного на отрицательный: a_4=1,0000, a_3=2,2440, a_2=1,5061, a_1= 0,2657, a_0= –0,0017, но определитель третьего порядка Δ_3= 0,8358 >0, т.е. система становится апериодически неустойчивой.

Расположение корней характеристических полиномов устойчивой и неустойчивой систем отражено на графиках. На рис. 2 показаны корни трех характеристических полиномов, полученных при относительных погрешностях, равных 0,01, 0,1 и 0,3. Попадание корня в положительную область соответствует состоянию неустойчивости системы при $\varepsilon = 0,3$. На рис. 3 показаны вещественные корни четырех характеристических полиномов Харитонова, не выходящие за границу отрицательной области, полученные при ε=0,2326.

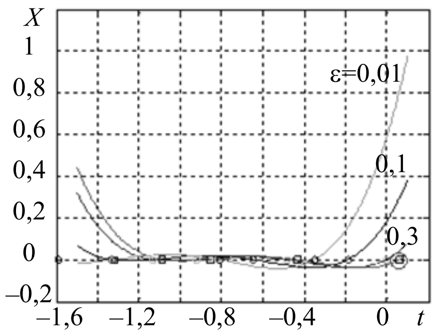

Рис. 2

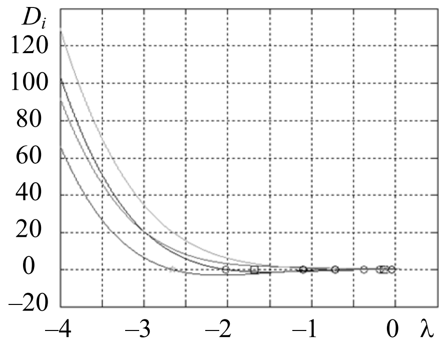

Рис. 3

Сравнительные переходные процессы в системах с оптимальными угловыми матрицами A^{-} при ε, равном 0,1, 0,2, 0,3, отражены на рис. 4: *а* — для трех значений ε, *б*—*г* — отдельно для каждого значения ε.

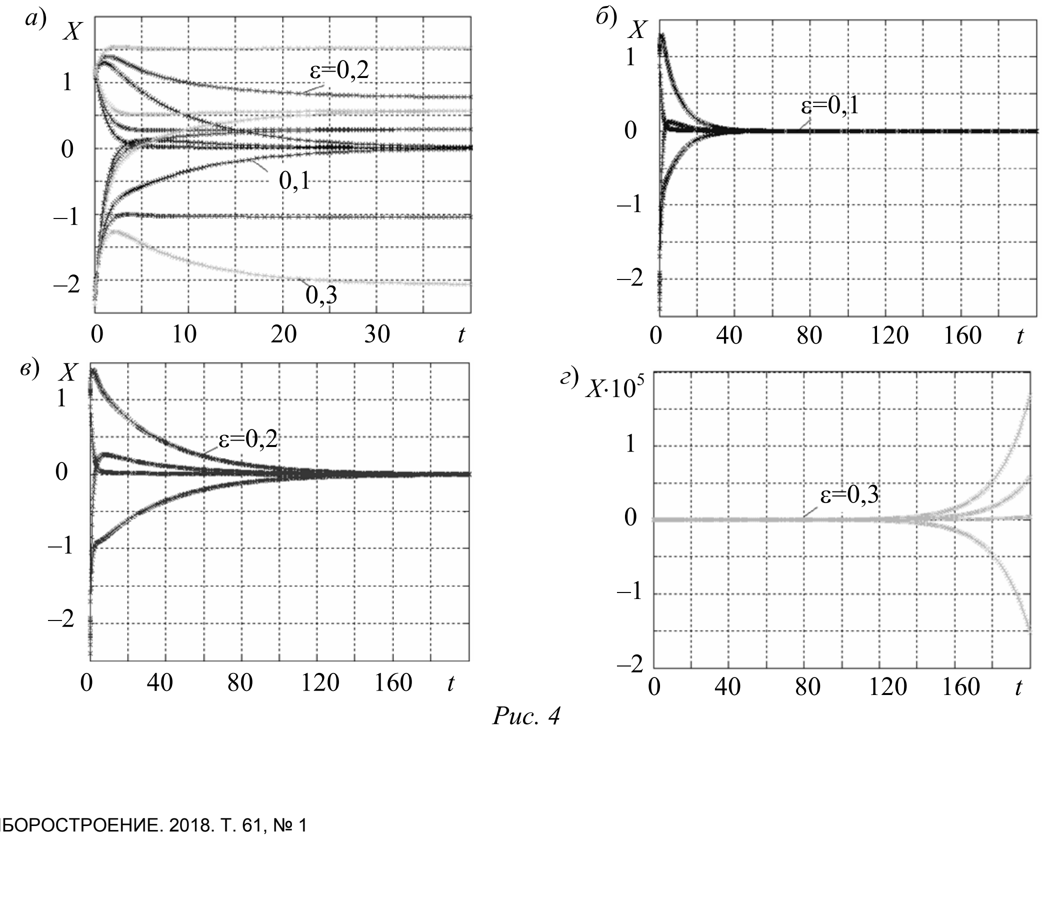

Рис. 4

Как показано ранее, при ε =0,1 и ε=0,2 системы устойчивы. При меньшей погрешности переходный процесс стремится к стационарному состоянию быстрее (см. рис. 4, *а*), при ε =0,3 (см. рис. 4, *г*) система неустойчива и переходный процесс расходится.

Как следует из проведенных расчетов, предлагаемый метод оценивания устойчивости системы управления подтверждает оценку неустойчивости, получаемую другими методами. И хотя детализация конкретного вида неустойчивости требует дополнительного исследования, предлагаемый метод выявления неустойчивости можно отнести к необходимому экспресс-анализу линейных стационарных управляемых систем при наличии неизбежных погрешностей коэффициентов вектора состояния. Предложенный метод, с одной стороны, совместим с оценками устойчивости системы с интервальной матрицей состояния, полученными проф. В. Л. Харитоновым с привлечением аппарата семейства характеристических полиномов, а с другой стороны, открывает новые возможности для исследования широкого класса открытых и закрытых систем управления.

Резюмируя изложенное, можно сделать следующие выводы.

1. Предложен эффективный метод исследования асимптотической устойчивости линейных непрерывных систем управления. Рассмотрена система дифференциальных уравнений в форме Коши, имеющая неустранимые погрешности коэффициентов и представленная системой уравнений с интервальной матрицей.

2. Доказана идентичность и совместимость предлагаемых оценок устойчивости точечных систем уравнений, построенных на основе оптимальных угловых матриц, с существующими ранее алгебраическими критериями устойчивости для невозмущенных систем уравнений.

3. На конкретных примерах показана эффективность метода оценивания устойчивости при различном уровне относительной погрешности коэффициентов линейной системы и возникновении неустойчивости вследствие неточности задаваемых коэффициентов.

4. Степень трудности оценивания устойчивости не возрастает с ростом порядка системы, поэтому метод приобретает универсальный характер, позволяющий провести необходимую экспресс-оценку устойчивости любой вновь сформированной непрерывной линейной системы управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никифоров В. О., Слита О. В., Ушаков А. В.* Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. СПб: СПбГУ ИТМО, 2002. 232 с.

2. *Андриевский Б. Р.* Теоретические основы автоматизированного управления: конспект лекций СПб: БГТУ „Военмех“, 2008.

3. www.fet.mrsu.ru/text. 2016.

4. *Харитонов В. Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства дифференциальных уравнений //Дифференциальные уравнения. 1978. № 11.

5. *Сударчиков С. А., Ушаков А. В.* Оценка запасов устойчивости систем с интервальными параметрами // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2002. № 6. С. 257—262.

6. *Иванова К. Ф.* Унификация точечных алгебраических методик внешней оценки решений интервальных систем // Программная инженерия. 2016. Т. 7, № 4.С. 181—189.

7. *Иванова К. Ф.* Новый подход к оценке множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений // Материалы III Междунар. конф., посвященной 85-летию со дня рождения проф. В. И. Зубова. „Устойчивость и процессы управления“, Санкт-Петербург, 5—9 окт., 2015. СПбГУ. С. 313—314.

8. *Иванова К. Ф.* Оценка решения систем линейных алгебраических уравнений с неопределенными коэффициентами // Материалы X Междунар. науч.-практ. конф. „Фундаментальные и прикладные науки сегодня“, Норт-Чарльстон, Ю. Каролина, США, 26—27 дек. 2016 г. Т. 3. С. 101—113.

9. *Хлебников М. В., Поляк Б. Т., Кунцевич В. М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 11. С. 9—59.

10. *Федюков А. А.* Применение средств пакета MatLab для численного решения задач стабилизации по выходу динамических систем с фазовыми ограничениями: Метод. пособие. Нижн. Новгород: Нижегород. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского, 2014. 37 с.

11. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.

12. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: Ин-т вычислительных технологий СО РАН, 2009. 569 с.

Сведения об авторе

Клара Филипповна Иванова — канд. техн. наук; СПбГУ, кафедра моделирования электромеханических и компьютерных систем; E-mail: Klara.I2010@yandex.ru

Поступила в редакцию
06.07.17 г.

Ссылка для цитирования: *Иванова К. Ф.* Алгебраический способ оценивания устойчивости линейных непрерывных систем управления с интервальными коэффициентами // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 1. С. 12—21.

ALGEBRAIC METHOD OF ASSESSMENT OF STABILITY
OF LINEAR CONTINUOUS CONTROL SYSTEMS WITH INTERVAL COEFFICIENTS

K. F. Ivanova

St. Petersburg State University, 199034, St. Petersburg, Russia
E-mail: Klara.I2010@yandex.ru

A technique is proposed to analyze stability of continuous control systems with interval uncertainty of coefficients of stationary equations. The risk of instability is shown to increase with increasing error (range of interval boundaries) of matrix elements of the system of equations, resulting in the transition from asymptotic stability to instability. The stability analysis of the system with interval coefficients, based on formalization of point systems of the equations, is based on construction of optimal angular matrices. The obtained estimates of stability of interval system of the equations are in good agreement with the results the stability analysis of the family of characteristic polynomials performed by V. L. Haritonov.

Keywords: linear continuous equations, interval factors, stability of system, angular optimum matrices, characteristic polynomial

Data on author

Klara F. Ivanova — PhD; St. Petersburg State University, Department of Electro-Mechanical Systems Modeling; E-mail: Klara.I2010@yandex.ru

For citation: Ivanova K. F. Algebraic method of assessment of stability of linear continuous control systems with interval coefficients. *Journal of Instrument Engineering*. 2018. Vol. 61, N 1. P. 12—21 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-1-12-21