

---

---

# ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

---

---

УДК 681.5  
DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-3-210-218

## МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ИНТЕРВАЛЬНОСТИ ПАРАМЕТРОВ

К. Ф. ИВАНОВА

*Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: Klara.I2010@yandex.ru*

Рассматривается новый подход к стабилизации линейных стационарных систем управления с одним входом. Стабилизация неустойчивого объекта реализуется формализованными матрицами с помощью модификации интервальных коэффициентов исходной матрицы в ограниченном диапазоне их изменения. Предложена методика, позволяющая осуществить смещение корней характеристического уравнения, соответствующих полюсам передаточной функции, из правой половины комплексной плоскости в левую, тем самым изменяя динамику системы и переводя ее из неустойчивого состояния в устойчивое. Разность матриц между новой устойчивой системой и неустойчивой может быть отождествлена с понятием модального управления. Из устойчивых формализованных матриц, полученных в кусочно-непрерывном цикле изменения их коэффициентов, выстраивается целый ряд точечных и интервальных матриц модального управления.

**Ключевые слова:** динамика системы, устойчивость, смещение корней, кусочно-непрерывный цикл, формализованные матрицы, интервальные коэффициенты, модальное управление

**Введение.** Объект управления описывается дифференциальными уравнениями в нормальной форме Коши для систем в пространстве состояний:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bu(t); \tag{1}$$
$$Y(t) = CX(t), \quad X(0) = X_0,$$

где  $X(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояния объекта управления, т.е.  $X \in R^n$ ;  $u(t)$  — скалярное входное управляющее воздействие размером  $1 \times 1$ ;  $A$  —  $n \times n$ -матрица, определяющая динамические свойства объекта;  $B$  —  $n \times 1$ -матрица входа управляющих воздействий;  $Y(t)$  —  $m$ -мерный вектор выхода;  $C$  —  $m \times n$ -матрица выхода;  $X_0$  — начальные условия для переменных состояния.

Ставится задача о стабилизации линейной системы, не обладающей устойчивостью.

К наиболее известным способам управления относится поиск управления, стабилизирующего линейную систему (1) в форме  $u(t) = -K_p X(t)$ , где  $K_p$  — вектор обратной связи, устанавливающий в замкнутой системе требуемые (назначаемые) корни характеристического полинома. Если все переменные состояния измеряемы, то управление формируется как их линейная комбинация:

$$u(t) = -(k_{p1}x_1 + k_{p2}x_2 + \dots + k_{pn}x_n) = -K_p X(t).$$

Синтезированная система с модальным управлением  $u(t)$  принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= (A - BK_p)X(t), \\ Y(t) &= CX(t), \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Матрица  $F = A - BK_p$  характеризует динамические свойства замкнутой системы размерностью  $n \times n$ , характеристический полином которой выражается как

$$D = \det(\lambda I - (A - BK_p)) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Как правило, решение такой задачи сводится к определению вектора обратной связи  $K_p$  модального регулятора  $u = K_p X$ , приводящего систему (1) к асимптотической устойчивости. Модальное управление является стабилизирующим фактором, который обеспечивает расположение корней характеристического уравнения в левой половине комплексной плоскости. Для поиска модального управления применяется метод приведения исходных уравнений к каноническому виду в форме Фробениуса с последующим построением вектора  $K$  канонической системы, позволяющего определить искомый вектор обратной связи  $K_p$ . Другим способом построения модального управления является применение квадратичных функций Ляпунова и техники линейных матричных неравенств, благодаря которым определяется искомый вектор стабилизации  $K$ , также отвечающий за размещение корней в отрицательной плоскости комплексной полуплоскости.

Как правило, для удовлетворения этих условий используются достаточно сложные матричные преобразования с предварительным назначением отрицательных вещественных корней или вещественных частей комплексных корней. [1—3].

**Новый алгоритм определения вектора стабилизации.** Динамика системы (1) с матрицей  $A$  правой части определяется собственными числами характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A) = 0$ . Среди них в случае неустойчивой системы (1), (2) возникают положительные корни характеристического полинома  $D(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ , которые располагаются в правой полуплоскости комплексной плоскости. Наиболее частой причиной возникновения неустойчивости является свободный член  $a_0$  [4]. Из теории линейных систем управления следует, что при  $a_0 < 0$  один из корней характеристического уравнения будет положительным. При этом в системе возникает синхронное самовозбуждение, которое можно устранить регулятором возбуждения.

Предлагаемая методика стабилизации системы (2) основана на устранении неустойчивости системы, вызванной отрицательным значением  $a_0$ .

С этой целью на основе точечной матрицы  $A$  правой части формируется интервальная матрица  $A$ ,  $A \in \mathbf{IR}^{n \times n}$ . Матрица  $A$  представляется своими левой и правой границами  $A = [\underline{A}, \bar{A}]$ , элементы которых задаются с относительной погрешностью  $|\varepsilon_{ij}| \leq \varepsilon_0$ :

$$a = [\underline{a}, \bar{a}], \quad \underline{a}_{ij} = a_{ij}(1 - \varepsilon_{ij}); \quad \bar{a}_{ij} = a_{ij}(1 + \varepsilon_{ij}), \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Динамика системы (2) с интервальной матрицей  $A$  определяется собственными числами характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A) = 0$ , которое в соответствии с разработанной методикой сводится к решению одного из двух точечных уравнений:  $\det(\lambda I - A^-) = 0$  или

$\det(\lambda I - A^+) = 0$  с угловыми точечными матрицами  $A^-$  и  $A^+$ , полученными, согласно (3), при конкретном значении  $\varepsilon$ . Из всего континуума точечных матриц интервальной матрицы  $A$ , равного  $2^{n^2}$ , в зависимости от размерности  $n$  системы (например,  $2^{2^2} = 16$  при  $n=2$ ,  $2^{3^2} = 512$  при  $n=3$ ,  $2^{4^2} = 65\,536$  при  $n=4$  и т.д.), формализуются две точечные матрицы  $A^-$  и  $A^+$ , которые названы *оптимальными угловыми матрицами*, так как их определители  $|A^-|$  и  $|A^+|$  соответствуют левой и правой (наименьшей и наибольшей) *точечным* границам интервального определителя  $|A| = [|A^-|, |A^+|]$ .

С ростом  $\varepsilon$  интервал точечных границ определителя  $|A|$  становится шире, и может возникнуть ситуация, когда левая граница интервального определителя перейдет через нуль и определитель матрицы  $A^-$  станет отрицательным. Устойчивость системы с такой матрицей в правой части изменится, и первоначально неустойчивая система станет устойчивой, что отразится на смене знака коэффициента  $a_0$  с отрицательного на положительный. Так как в этом случае все корни уравнения  $\det(\lambda I - A^-) = 0$  становятся отрицательными, матрица  $A^-$  выступает в роли регулятора управления, стабилизирующего систему. Выбор одной из матриц  $A^-$  или  $A^+$ , определяющей изменение устойчивости системы, зависит от знака  $\det(A)$ . В случае если детерминант исходной матрицы неуправляемой системы положительный,  $\det(A) > 0$ , то характеристическим является уравнение  $\det(\lambda I - A^-) = 0$  со стабилизирующей матрицей  $A^-$ , если же  $\det(A) < 0$ , то рассматривается характеристическое уравнение  $\det(\lambda I - A^+) = 0$  с матрицей  $A^+$ . Оптимальные угловые матрицы  $A^-$  и  $A^+$  интервальной матрицы  $A$  определяются по методике, предложенной автором в работе [5].

Синтез модального управления системой (2) построен на кусочно-непрерывном изменении интервальных коэффициентов формализованной матрицы  $A$  до получения новых угловых матриц, приводящих к стабилизации системы. Процесс стабилизации начинается со значения  $\varepsilon_1$ , обеспечивающего коэффициент  $a_0 > 0$  и переход всех корней характеристического полинома в левую полуплоскость комплексной плоскости, а заканчивается значением  $\varepsilon_k$ , определяющим наибольшие отрицательные смещения корней. При дальнейшем росте  $\varepsilon$  значение  $a_0$  уменьшается и снова может стать отрицательным. В результате выстраивается ряд точечных матриц  $A_\varepsilon = \{A^-, A^+\}$  с кусочно-непрерывным изменением коэффициентов, полученных в интервале  $[\varepsilon_1, \varepsilon_k]$  относительных погрешностей. В каждом из вариантов управляемых систем со стабилизирующей матрицей  $A_\varepsilon$ , задаваемой кодами функций, встроенных в систему MatLab, графически отображаются их переходные процессы.

Таким образом, автоматически решается задача модального управления. Если принять матрицу  $A^-$  за сумму неустойчивой матрицы и матрицы модального управления  $A - BK_p$ , то в соответствии с правой частью системы (2) матрицу  $BK_p$  модального стабилизирующего управления можно выразить как разность начальной неустойчивой матрицы и любой из устойчивых матриц: в частности при  $A^- BK_p = A - A^-$ .

**Пример.** Номинальная матрица системы (2) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -40,2530 & -2,3940 & -3,9780 & 1,2320 & -1,4490 \\ -2,3940 & -6,6000 & 2,8080 & 2,0070 & 0,4770 \\ -3,8160 & 2,8080 & -12,2760 & 3,0060 & -3,8390 \\ 0,9270 & -4,6350 & 1,0780 & 4,8950 & -1,9620 \\ -1,4490 & 0,4770 & -3,8610 & 5,0130 & -7,7990 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$B = [-2,55; -3,77; -2,95; -2,34]$ ;  $C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ ;  $\det(A) > 0$ ,  $\det(A) = 1,5523 \cdot 10^4$ ;  
 $X_0 = [1; 2; 3; 4; 5]$  — начальные условия для системы (2).

Коэффициенты характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A) = 0$ :

$$a_5 = 1,0000, a_4 = 62,2000, a_3 = 963,0376, a_2 = 4015,6537, a_1 = 473,6073, a_0 = -15522,9868.$$

Корни характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A) = 0$ :

$$r_1 = -41,1613, r_2 = -14,6157, r_3 = -4,2252, r_4 = -3,8035, r_5 = 1,6056.$$

Система (4) 5-го порядка неустойчива.

Интервальная матрица  $A = [\underline{A}, \bar{A}]$  на базе номинальной средней матрицы  $A$  с целью выполнения условия (4) может быть задана с незначительными отклонениями коэффициентов  $a_{ij}$ , например с  $\varepsilon_0 = 0,01$ .

Строится цикл оптимальных угловых матриц  $A^-$  и  $A^+$  по  $\varepsilon$  с шагом  $h=0,005$ .

1.  $\varepsilon = 0,045$ . Определитель  $\det(A^-) > 0$ . Характеристический полином оптимальной угловой матрицы  $A^-$  по-прежнему имеет положительный корень:

$$r_1 = -39,4733, r_2 = -14,2888, r_3 = -3,7721, r_4 = -1,8709, r_5 = 0,0042.$$

Система с матрицей  $A^-$  остается неустойчивой, однако наблюдается тенденция приближения корней характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A^-) = 0$  к мнимой оси, определяя тренд перехода от неустойчивой системы к устойчивой. Графики переходного процесса в системе с матрицей  $A^-$  при времени наблюдения  $t = 200$  с и совместных переходных процессов с матрицами  $A$  и  $A^-$  при  $t = 5$  с приведены на рис. 1, а, б соответственно.

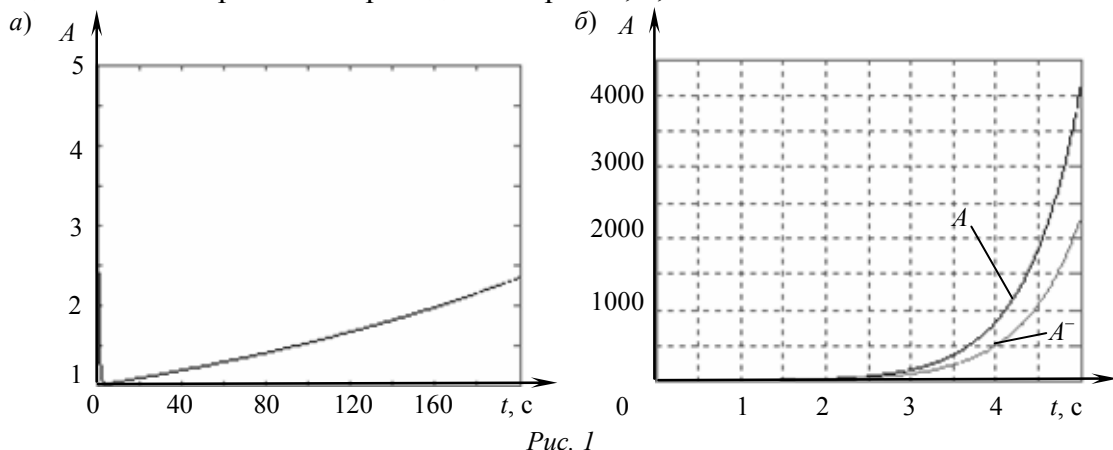


Рис. 1

2.  $\varepsilon = 0,05$ . Определитель  $|A^-| < 0$ ,  $\det(A^-) < 0$ . При переходе через нуль сохраняется непрерывность определителя, который принимает отрицательное значение. Все корни характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A^-) = 0$  становятся отрицательными, а система с матрицей  $A^-$  — устойчивой. При этом

$$\det(A) = 1,5523 \cdot 10^4, \det(A^-) = -1,3847 \cdot 10^3, \det(A^+) = 3,9496 \cdot 10^4, \\ \det(\underline{A}) = 1,1734 \cdot 10^4, \det(\bar{A}) = 1,9716 \cdot 10^4.$$

Значения определителей граничных матриц  $\det(\underline{A})$  и  $\det(\bar{A})$  приводятся для подтверждения того, что они, в отличие от  $\det(A^-)$ , не определяют переход системы в новое состояние. Определитель  $\det(A^+)$  точечной матрицы  $A^+$  не выявляет неустойчивости, так как возрастает. Корни характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A^-) = 0$ :

$$r_1 = -39,2866, r_2 = -14,2526, r_3 = -3,7200, r_4 = -1,3316, r_5 = -0,4992.$$

Переходный процесс показан на рис. 2: видно, что установление переходного процесса в системе с матрицей  $A^-$  происходит в течение первых секунд; на фоне исходного неустойчивого процесса (рис. 2, б, кривая  $A$ ) устойчивый процесс (кривая  $A^-$ ) стремится к нулю.

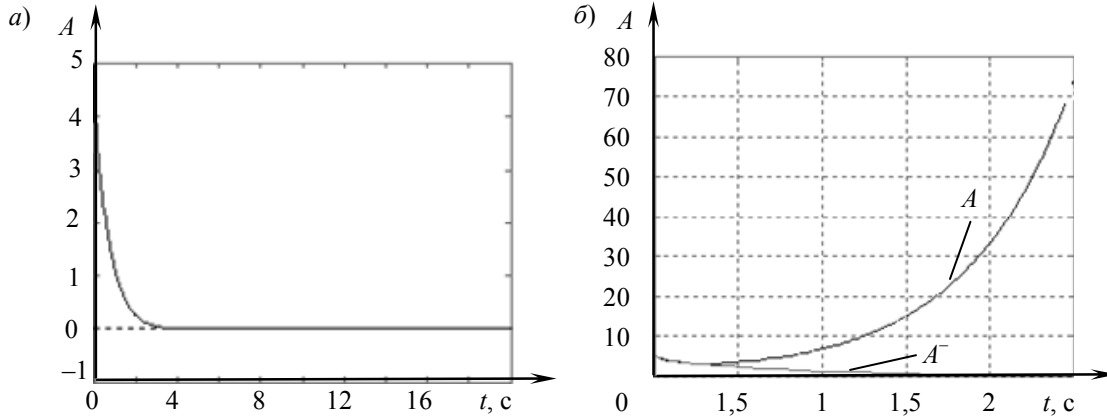


Рис. 2

3.  $\epsilon = 0,1$ . Два корня характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A^-) = 0$  становятся комплексными с отрицательными вещественными частями, характеризующими устойчивость, и мнимыми частями, определяющими периодический процесс:

$$r_1 = -37,4282, r_2 = -13,8919, r_3 = -3,1914, r_4 = -0,7342 + 2,6117i, r_5 = -0,7342 - 2,6117i.$$

Полученные значения определителей:

$$\det(A) = 1,5523 \cdot 10^4, \det(A^-) = -1,2213 \cdot 10^4, \det(A^+) = 6,9556 \cdot 10^4, \\ \det(\bar{A}) = 2,4269 \cdot 10^4, \det(\underline{A}) = 8,3809 \cdot 10^3.$$

На рис. 3, а, б показаны переходные процессы для устойчивой системы и двух сравнительных систем с матрицами  $A$  и  $A^-$ .

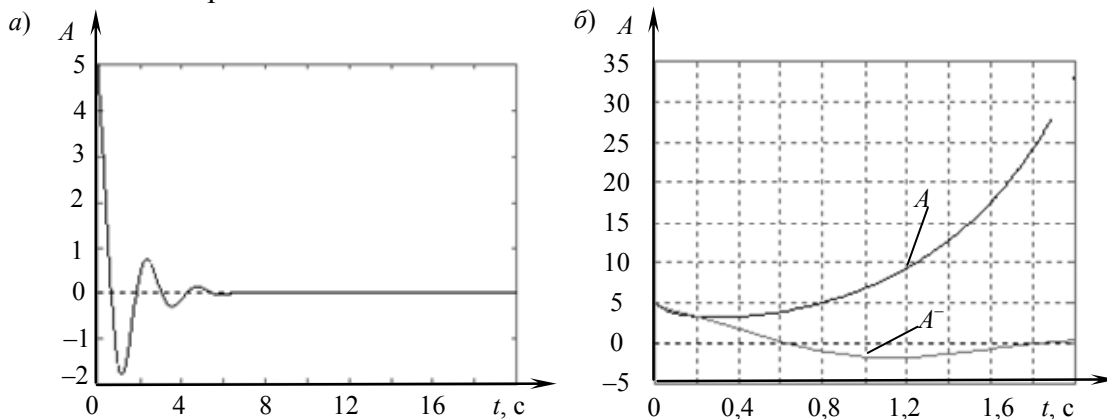


Рис. 3

4.  $\epsilon = 0,25$ . Корни характеристического уравнения:

$$r_1 = -32,0118, r_2 = -13,2385, r_3 = -0,2234 + 5,0398i, r_4 = -0,2234 - 5,0398i, r_5 = -0,9530.$$

Переходные процессы в системах показаны на рис. 4, а, б.

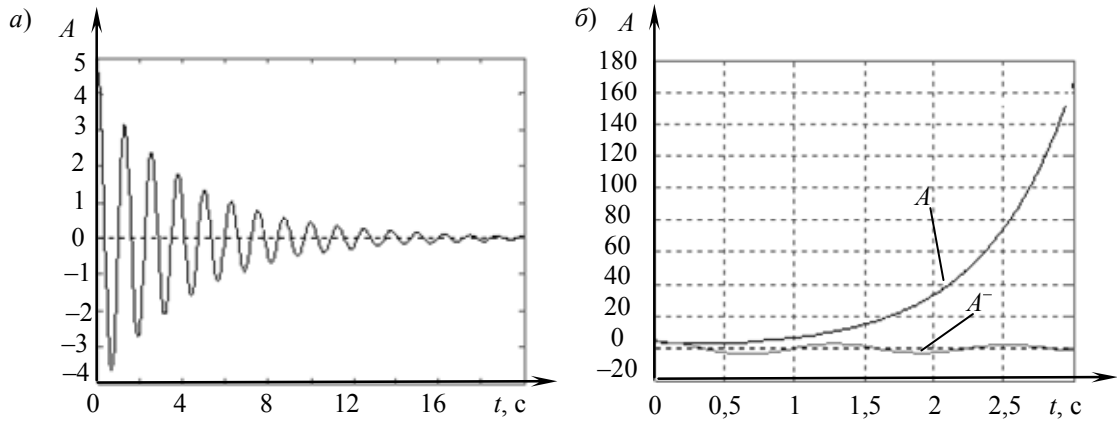


Рис. 4

5.  $\varepsilon = 0,3$ . Корни характеристического уравнения:

$$r_1 = -30,259, r_2 = -12,9521, r_3 = -0,0430 + 5,6066i, r_4 = -0,0430 - 5,6066i, r_5 = -0,2425.$$

Коэффициенты характеристического уравнения:

$$a_5 = 1, a_4 = 44, a_3 = 438, a_2 = 1496, a_1 = 12658, a_0 = 2988.$$

Переходные процессы — рис. 5, а, б.

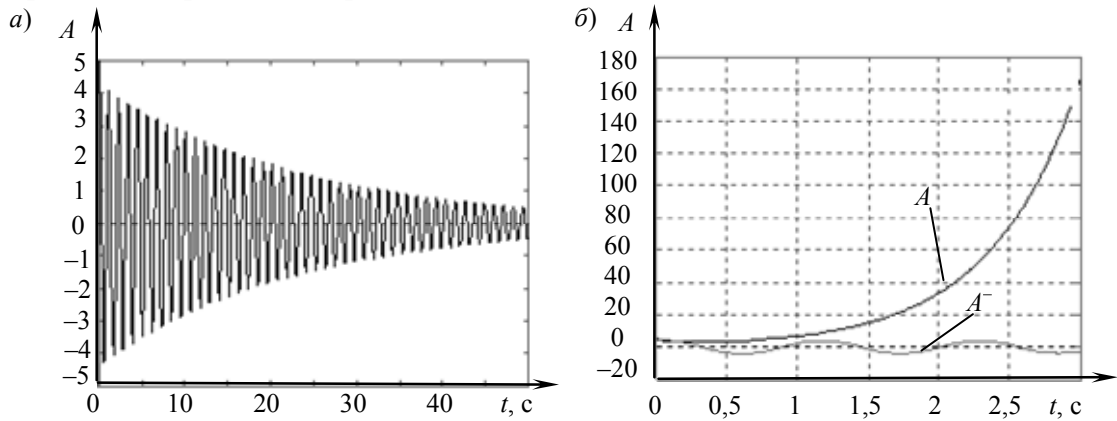


Рис. 5

6.  $\varepsilon = 0,45$ . Корни характеристического уравнения:

$$r_1 = -59,4702, r_2 = -14,5504, r_3 = -0,3528 + 5,4691i, r_4 = -0,3528 - 5,4691i, r_5 = -2,0719.$$

На рис. 6, а, б — переходные процессы в системах.

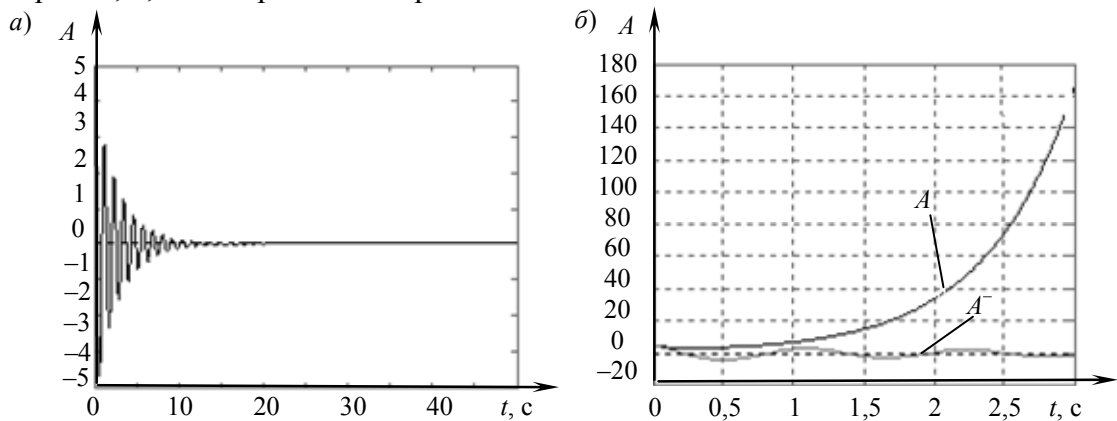


Рис. 6

7.  $\varepsilon = 0,5$ . Система вновь становится неустойчивой.

Корни характеристического уравнения:

$$r_1 = -61,5055, r_2 = -14,6403, r_3 = 2,6253 + 4,7517i, r_4 = 2,6253 - 4,7517i, r_5 = -3,0747.$$

Матрица  $A^-$ , найденная в цикле изменения интервальных границ исходной матрицы, не удовлетворяет условиям устойчивости Гурвица и Рауса. Переходный процесс в системе показан на рис. 7.

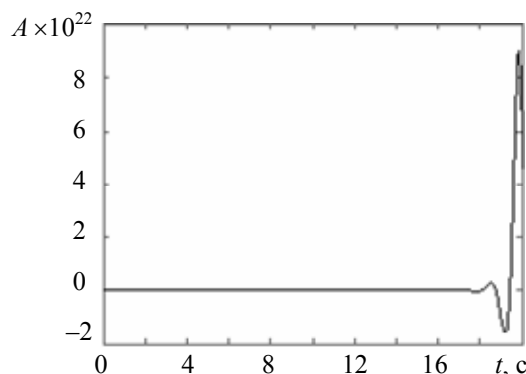


Рис. 7

Обобщая рассмотренные параметры, можно представить переходные процессы в системах при их устойчивости и неустойчивости.

Переходные процессы, определяющие неустойчивость системы при граничных значениях матрицы  $A^-$  при  $\varepsilon = 0,045$  и  $\varepsilon = 0,5$ , показаны на рис. 8 (кривые 1 и 2 соответственно): видна расхожимость обоих переходных процессов.

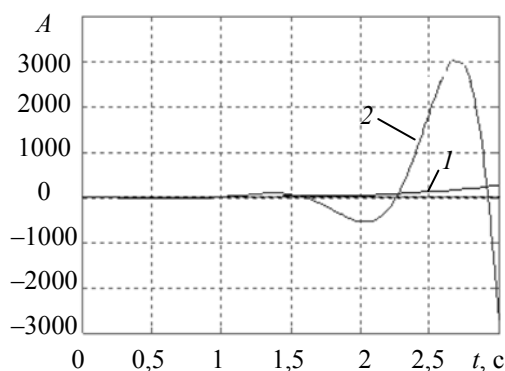


Рис. 8

На рис. 9 отображены переходные процессы в системе, соответствующие граничным значениям устойчивости при  $\varepsilon = 0,05$  (кривая 1) и  $\varepsilon = 0,3$  (кривая 2).

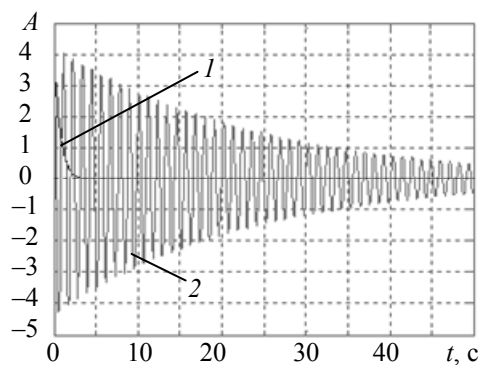


Рис. 9

В ходе исследования были сделанные следующие допущения:

- заданная исходная интервальная матрица  $A = [\underline{A}, \overline{A}]$  не должна быть особенной;
- при формализации матриц  $A^-$  и  $A^+$  требуется соблюдение знаков алгебраических дополнений к элементам граничных матриц.

Проверить полученное решение можно с использованием известного [6] неособого линейного преобразования подобной системы, которое осуществляется по сконструированной матрице  $N$ , так что  $Z(t) = NX(t)$ . Корни характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A^-) = 0$  с матрицей  $A^-$ , найденной по предложенной методике [5], и корни уравнения  $\det(\lambda I - (A - BK_p)) = 0$ , вычисляемые по методике неособого линейного преобразования, должны совпасть, так как они характеризуют динамику одной и той же системы (2). Сравним их для случая  $\varepsilon = 0,3$ .

Поэтапно проводятся следующие операции:

1) проверяется полная управляемость исходной системы (по критерию Калмана);  
 2) определяются коэффициенты характеристического уравнения исходной системы с неустойчивой матрицей  $A$ :  $p_0 = \text{poly}(A)$ ;

3) вычисляется матрица  $N$  преобразования подобия:

$$N1 = [0, 0, 0, 0, \dots, 1] * \text{inv}([B, A \times B, A^2 \times B, A^3 \times B, A^4 \times B \dots]);$$

$$N = [N1; N1 \times A; N1 \times A^2; N1 \times A^3; N1 \times A^4 \dots];$$

4) в качестве назначаемых корней  $r_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , принимаются корни устойчивой системы характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A^-) = 0$  с матрицей  $A^-$ , вычисленные при  $\varepsilon = 0,3$ ;

5) для заданной матрицы  $A^-$  вычисляются коэффициенты характеристического полинома:  $p_{01} = \text{poly}(r)$ ,  $r = \{r_1, \dots, r_5\}$ ;

6) в соответствии с методикой неособого преобразования рассчитывается матрица модального управления для канонической системы:  $K1_p = p_{01}(\text{end}:-1:2) - p_0(\text{end}:-1:2)$ ;

7) определяются элементы матрицы модального управления для исходной неустойчивой системы:  $K_p = K1_p N$ ;

8) проверяются собственные числа замкнутой на модальное управление системы:  $\text{кор} = \text{eig}(A - B \times K_p)$ .

Вычисленные по методике неособого линейного преобразования корни, равные

$$\text{кор} = -30,2595, -12,9521, -0,0430 + 5,6066i, 0,0430 - 5,6066i, -0,2425,$$

полностью совпадают с заданными корнями характеристического уравнения  $\det(\lambda I - A^-) = 0$ .

То же самое можно сказать и о коэффициентах характеристических полиномов, равных

$$a_5 = 1, a_4 = 44, a_3 = 438, a_2 = 1496, a_1 = 12658, a_0 = 2988,$$

что гарантирует точность расчета модального управления  $u(t)$  как произведения  $K_p X(t)$ .

**Заключение.** Предложена новая методика стабилизации линейных стационарных систем управления посредством оптимальных угловых матриц, сконструированных из формализованной интервальной матрицы в ограниченном диапазоне изменения ее коэффициентов.

Показано, что все корни характеристических уравнений оптимальных угловых матриц становятся отрицательными за счет изменения знака коэффициента  $a_0$  характеристического уравнения с отрицательного на положительный.

Проанализированы динамические процессы со стабилизирующей формализованной оптимальной угловой матрицей. Показано, что изменение коэффициентов стабилизирующей матрицы, за счет относительной погрешности  $\varepsilon$ , ограничивается интервалом, за пределами которого нарушаются условия устранения самовозбуждения системы.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев В. В., Журавлева Н. В., Лукьянова Г. В., Сергеев К. А. Синтез систем автоматического управления методом модального управления. СПб, 2007. 141 с.
2. Сударчиков С. А., Ушаков А. В. Оценка запасов устойчивости систем с интервальными параметрами // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2002. № 2. С. 257—262.
3. Баландин Д. В., Городецкий С. Ю. Классические и современные методы построения регуляторов в примерах. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород, 2012. 122 с.
4. Свободный член — характеристическое уравнение. [Электронный ресурс]: <ngpedia.ru>id599505p1.html>
5. Иванова К. Ф. Унификация точечных алгебраических методик внешней оценки решений интервальных систем // Программная инженерия. 2016. Т. 7, № 4. С. 181—189.
6. Стабилизация линейных стационарных систем управления. [Электронный ресурс]: <www.fet.mrsu.ru>text/ucheba/asoiu...resources/resource...do.mrsu.ru>.

**Сведения об авторе****Клара Филипповна Иванова**

— канд. техн. наук; СПбГУ, кафедра моделирования электромеханических и компьютерных систем; E-mail: Klara.I2010@yandex.ru

Поступила в редакцию  
18.09.17 г.**Ссылка для цитирования:** Иванова К. Ф. Модальное управление системами в условиях ограниченной интервальности параметров // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 3. С. 210—218.**MODAL CONTROL OF SYSTEMS  
UNDER CONDITIONS OF LIMITED INTERVALS OF PARAMETERS****K. F. Ivanova***St. Petersburg State University, 199034, St. Petersburg, Russia  
E-mail: Klara.I2010@yandex.ru*

A new approach to synthesis of modal control of linear system with single input and single output (SISO) is proposed. Stabilization of an unstable object is realized with formalized matrices by means of modification of interval factors of initial matrix in the limited range of their variation. The developed technique allows to carry out displacement of roots of the characteristic equation corresponding to poles of a transfer function, from the right to the left half of complex plane thereby modifying the system dynamics and converting it from the unstable to a steady condition. The difference of matrices corresponding to the new steady and initial unstable system can be identified with the concept of modal control. From the steady formalized matrices received in a piecewise continuous cycle of their factors modification, variety of pointwise and interval matrices of modal control is drawn up.

**Keywords:** new approach, dynamics of system, stability, displacement of radicals, piecewise continuous cycle, formalized matrices, interval factors, modal control

**Data on author**

**Klara F. Ivanova** — PhD; St. Petersburg State University, Department of Electro-Mechanical Systems Modeling; E-mail: Klara.I2010@yandex.ru

**For citation:** Ivanova K. F. Modal control of systems under conditions of limited intervals of parameters. *Journal of Instrument Engineering*. 2018. Vol. 61, N 3. P. 210—218 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-3-210-218