

## ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА БЫСТРОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Н. Я. МАМЕДОВ, А. Н. ДЖАФАРОВА

*Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,  
AZ1010, Баку, Азербайджан  
E-mail: mr.nuraddin47@mail.ru*

Предложен алгоритм спектрального анализа измерительных сигналов, позволяющий проводить обработку сигнала внутри интервала наблюдения. Для обоснования целесообразности применения данного алгоритма оценивается погрешность при численном определении коэффициентов Фурье. С использованием многочленов Бернулли оценивается точная верхняя граница погрешности. Полученное обобщенное выражение погрешности в зависимости от дифференциальных и спектральных свойств сигнала, а также значений допустимой погрешности позволяет определить параметры дискретизации сигнала.

**Ключевые слова:** спектральный анализ, комплексные коэффициенты Фурье, погрешность дискретного интегрирования, точная верхняя граница погрешности, спектральные и дифференциальные свойства сигнала

Использование метода интегральных преобразований Фурье для получения численных результатов связано со значительными временными затратами. Поэтому среди проблем развития методов цифровой обработки сигнала особое место занимает разработка и усовершенствование способов и алгоритмов спектрального анализа для исследования сигналов во временной и в частотной областях.

Пусть исследуемый периодический сигнал  $f(t)$  представлен выражением

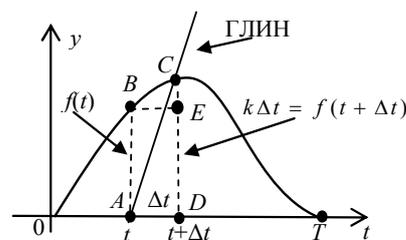
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}, \quad (1)$$

где  $C_n$  — комплексные коэффициенты Фурье, определяемые как

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt, \quad (2)$$

где  $T$  — период исследуемого сигнала  $f(t)$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Применение время-импульсного метода преобразований мгновенных значений исследуемого сигнала  $f(t)$  в произвольный момент времени  $t$  приводит к равенству  $k\Delta t = f(t + \Delta t)$ , где  $k$  — постоянная величина, показывающая крутизну линейно возрастающего пилообразного напряжения (см. рисунок). Здесь  $k\Delta t$  является информационным параметром для время-импульсного метода преобразования. Приняв  $k\Delta t = y$ , получим  $\Delta t = \frac{1}{k} y$ , то-



гда  $y = f\left(t + \frac{1}{k} y\right)$ . Далее, обозначив  $\frac{1}{k} = \alpha$ , имеем  $y = f(t + \alpha y)$ , где  $\alpha$  — малая постоянная величина.

Как показано в работе [1], если функция  $f(t)$  непрерывна, имеет ограниченную первую производную и удовлетворяет условию  $|\alpha f'(t)| < 1$ , то неявная зависимость  $y = f(t + \alpha y)$  определяет  $y$  как некоторую однозначную явную функцию вида  $y = F(t, \alpha)$ . Найти эту зависимость в явной форме не всегда удается, однако ее можно разложить в ряд Фурье:

$F(t, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega t}$ . Здесь  $G_n$  — комплексные коэффициенты Фурье зависимости  $y = F(t, \alpha)$ , которые определяются формулами [1]

$$G_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = C_0, \quad G_n = \frac{1}{2\pi n \alpha j} \int_0^T e^{jn\omega(\alpha f(t)-t)} dt, \quad n \neq 0, \quad j^2 = -1. \quad (3)$$

Эти коэффициенты Фурье в действительной области определяются как

$$a_n = \frac{1}{\pi n \alpha} \int_0^T \sin n\omega[t - \alpha f(t)] dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi n \alpha} \int_0^T \cos n\omega[t - \alpha f(t)] dt.$$

В работе [1] также показано, что для коэффициентов  $C_n$  и  $G_n$  справедливо равенство  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_n = C_n$ , поэтому соотношения (3) были предложены как алгоритмы для определения

комплексных коэффициентов Фурье  $C_n$  для сигнала  $f(t)$ .

Численное определение значений  $G_n$  по формуле (3) на практике реализуется переходом от непрерывного усреднения к дискретному:

$$\bar{G}_n = \frac{1}{M} \frac{1}{jn\omega\alpha} \sum_{i=1}^M e^{jn\omega(\alpha f(t_i)-t_i)}, \quad (4)$$

где  $t_i = i \frac{T}{M} = iT_0$  — моменты отсчета мгновенных значений измерительного сигнала  $f(t)$ ,  $T_0 = T/M$  — шаг дискретизации,  $M$  — количество отсчетов мгновенных значений  $f(t_i)$  за период  $T$ .

Использование алгоритма (4) для вычисления комплексных коэффициентов Фурье  $C_n$  приводит к погрешности

$$\bar{G}_n - C_n = \frac{1}{M} \frac{1}{jn\omega\alpha} \sum_{i=1}^M e^{jn\omega(\alpha f(t_i)-t_i)} - \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt. \quad (5)$$

Абсолютное значение погрешности  $\bar{G}_n - C_n$  представим как

$$|\bar{G}_n - C_n| = |G_n - C_n + \bar{G}_n - G_n| \leq |G_n - C_n| + |\bar{G}_n - G_n|, \quad (6)$$

где для составляющей  $|G_n - C_n|$  погрешность оценена в работе [2]:

$$|G_n - C_n| \leq \alpha \max_{t \in [0, T]} |f(t) f'(t)|. \quad (7)$$

Здесь выбором числа  $\alpha$  можно добиться того, что погрешность будет меньше любого заранее заданного числа  $\varepsilon$ .

Оценим погрешность второй составляющей  $|\bar{G}_n - G_n|$  в выражении (6). Учитывая (3) и (4), получаем

$$\bar{G}_n - G_n = \frac{1}{M} \frac{1}{jn\omega\alpha} \sum_{i=1}^M e^{jn\omega(\alpha f(t_i)-t_i)} - \frac{1}{T} \frac{1}{jn\omega\alpha} \int_0^T e^{jn\omega(\alpha f(t)-t)} dt. \quad (8)$$

Эта погрешность зависит от класса исследуемых сигналов. Оценим погрешность (8) для измерительных сигналов  $f(t)$ , заданных на отрезке  $[0, T]$ , принадлежащих к классу периодичности  $\tilde{C}^{(m-1)}[0, T]$ ,  $m \geq 1$ , обладающему следующими свойствами [3]:

1) функция  $f(t)$  непрерывна на отрезке  $[0, T]$  вместе со своими производными до  $(m-1)$ -го порядка включительно;

2)  $f^{(k)}(+0) = f^{(k)}(T-0)$  для  $k = 0, m-1$ , т.е. на концах отрезка  $[0, T]$  значения функции  $f(t)$  и ее  $m-1$  первых производных должны совпадать.

Из условий 1 и 2 следует, что периодическое продолжение функции  $f(t)$  принадлежит классу  $C^{(m-1)}(-\infty, +\infty)$ . Если  $f(t)$  не удовлетворяет условию 1 или 2, то методом выделения особенностей [3] или же используя сглаживающие функции на концах отрезка  $[0, T]$ , эту функцию можно привести к классу периодичности  $\tilde{C}^{(m-1)}[0, T]$ . Для упрощения дальнейших преобразований введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{jn\omega\alpha} e^{jn\omega(\alpha f(t)-t)} = x(t), \quad \bar{G}_n - G_n = \gamma(M, x). \quad (9)$$

Учитывая обозначения (9) в (8), имеем

$$\gamma(M, x) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x(iT_0) - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (10)$$

Отметим, что если  $f(t) \in \tilde{C}^{(m-1)}[0, T]$ , то

$$x(t) \in \tilde{C}^{(m-1)}[0, T]. \quad (11)$$

Кроме того, предположим, что функция  $x(t)$  имеет ограниченную производную  $m$ -го порядка, т.е.

$$|x^{(m)}(t)| \leq x_{\max}^{(m)}, \quad (12)$$

где  $x_{\max}^{(m)}$  — некоторая постоянная величина.

Отметим, что для множества функции  $x(t)$ , удовлетворяющего (11), будут справедливы следующие равенства:

$$\int_0^T x^{(k)}(t) dt = 0, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad (13)$$

$$\sum_{i=0}^{M-1} x(iT_0) = \sum_{i=0}^{M-1} x(iT_0 + T_0). \quad (14)$$

Используя (14), правую часть выражения (10) приведем к виду

$$\gamma(M, x) = \frac{1}{2M} \sum_{i=0}^{M-1} [x(iT_0) + x(iT_0 + T_0)] - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (15)$$

откуда при дальнейшем преобразовании получаем

$$\gamma(M, x) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{iT_0}^{iT_0+T_0} \left[ (t-iT_0) \frac{M}{T} - 0,5 \right] x'(t) dt. \quad (16)$$

Преобразуя правую часть выражения (16) методом интегрирования по частям, можно получить формулу (15): этим обосновывается справедливость равенства (16).

Функция  $\frac{M}{T}(t-iT_0)-0,5$  в правой части (16) представляет собой многочлен Бернулли первого порядка относительно  $\frac{M}{T}(t-iT_0)$  [4], т.е.

$$\frac{M}{T}(t-iT_0)-0,5 = B_1 \left[ \frac{M}{T}(t-iT_0) \right]. \quad (17)$$

Учитывая (17) в равенстве (16), произведя замену  $t-iT_0 = Z$  и подставив в дальнейшем вместо  $Z$  опять  $t$ , имеем

$$\gamma(M, x) = \int_0^{T_0} B_1 \left( \frac{t}{T_0} \right) \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x'(t+iT_0) \right] dt. \quad (18)$$

С учетом (11) и (14) можно установить, что функция  $\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x(t+iT_0)$  принадлежит к классу функций  $\tilde{C}^{(m-1)}[0, T_0]$ . Это обстоятельство, так как ведется поиск экстремума функционала  $\gamma(M, x)$ , позволяет в (18) вместо  $\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x'(t+iT_0)$  записать функцию  $x'(t)$ , определенную на отрезке  $[0, T_0]$ :

$$\gamma(M, x) = \int_0^{T_0} x'(t) B_1 \left( \frac{t}{T_0} \right) dt. \quad (19)$$

Таким образом, задача сводится к определению максимального значения функционала  $\gamma(M, x)$  для класса функции  $x(t) \in \tilde{C}^{(m-1)}[0, T_0]$ , удовлетворяющего условию (12); обозначим его через  $\gamma_{np}[M, x]$ , т.е.

$$\gamma_{np}[M, x] = \max |\gamma(M, x)| = \max \left| \int_0^{T_0} x'(t) B_1 \left( \frac{t}{T_0} \right) dt \right|.$$

Учитывая свойства многочленов Бернулли и последовательно интегрируя по частям выражение (19), получаем

$$\gamma(M, x) = \frac{(-1)^{m-1}}{m!} T_0^{m-1} \int_0^{T_0} x^{(m)}(t) B_m \left( \frac{t}{T_0} \right) dt, \quad (20)$$

где  $B_m \left( \frac{t}{T_0} \right)$  — многочлен Бернулли  $m$ -го порядка относительно  $\frac{t}{T_0}$ .

Используя свойства определенного интеграла в выражении (20), имеем

$$|\gamma(M, x)| \leq \frac{1}{m!} T_0^{m-1} \int_0^{T_0} |x^{(m)}(t)| \left| B_m \left( \frac{t}{T_0} \right) \right| dt, \quad (21)$$

откуда с учетом (12)

$$\gamma_{np}(M, x) = \frac{1}{m!} T_0^{m-1} x_{\max}^{(m)} \int_0^{T_0} \left| B_m \left( \frac{t}{T_0} \right) \right| dt, \quad (22)$$

где значение интеграла зависит от многочлена Бернулли  $B_m \left( \frac{t}{T_0} \right)$ , свойство которого зависит от четности и нечетности порядка  $m$ .

Вычислим (22) для нечетных  $m$ . В этом случае многочлены Бернулли  $B_m\left(\frac{t}{T_0}\right)$

обладают следующими свойствами [4]:

- в интервале  $(0, T_0)$  имеют единственный корень в точке  $t = 0,5T_0$ ;
- знакопостоянны внутри интервалов  $(0; 0,5T_0)$  и  $(0,5T_0; T_0)$ ;
- при переходе от одного из указанных интервалов к другому меняют свой знак на противоположный.

С учетом этих свойств вычисление интеграла в правой части (22) дает

$$\int_0^{T_0} \left| B_m\left(\frac{t}{T_0}\right) \right| dt = \frac{2T_0}{m+1} (2 - 2^{-m}) |B_{m+1}|, \quad (23)$$

где  $B_{m+1}$  — число Бернулли порядка  $m+1$ .

Подставив (23) в правую часть (22), получим

$$\gamma_{np}(M, x) = \frac{|B_{m+1}| (4 - 2^{1-m}) T^m x_{\max}^{(m)}}{(m+1)! M^m}. \quad (24)$$

Теперь рассмотрим случай, когда  $m$  — четное число. При этом в выражении (20) фигурируют многочлены Бернулли четного порядка. С учетом условия (13) выражение (20) представим в виде

$$\gamma(M, x) = \frac{1}{m!} T_0^{m-1} \int_0^{T_0} x^{(m)}(t) \left[ B_m\left(\frac{t}{T_0}\right) - B_m\left(\frac{1}{4}\right) \right] dt. \quad (25)$$

Оценивая (25), имеем

$$|\gamma(M, x)| \leq \frac{1}{m!} T_0^{m-1} \int_0^{T_0} |x^{(m)}(t)| \left| B_m\left(\frac{t}{T_0}\right) - B_m\left(\frac{1}{4}\right) \right| dt, \quad (26)$$

откуда с учетом (12) можно получить

$$\gamma_{np}(M, x) = \frac{1}{m!} T_0^{m-1} x_{\max}^{(m)} \int_0^{T_0} \left| B_m\left(\frac{t}{T_0}\right) - B_m\left(\frac{1}{4}\right) \right| dt. \quad (27)$$

График функции  $B_m\left(\frac{t}{T_0}\right) - B_m\left(\frac{1}{4}\right)$  симметричен относительно прямой  $t = 0,5T_0$  и имеет корни в точках  $0,25T_0$  и  $0,75T_0$ . Используя указанные свойства многочлена Бернулли для четных  $m$ , из (27) после некоторых преобразований для предельного значения погрешности  $\gamma(M, x)$  получаем

$$\gamma_{np}(M, x) = \frac{4}{(m+1)!} T_0^m x_{\max}^{(m)} \left| B_{m+1}\left(\frac{1}{4}\right) \right|. \quad (28)$$

Выражая  $B_{m+1}\left(\frac{1}{4}\right)$  через число Эйлера [5], т.е.  $B_{m+1}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{m+1}{4^{m+1}} E_m$ , согласно (28) для  $\gamma_{np}(M, x)$  имеем

$$\gamma_{np}(M, x) = \frac{|E_m| T^m x_{\max}^{(m)}}{4^m \cdot m! M^m}. \quad (29)$$

Вместо уравнений (24) и (29) для получения общего выражения предельной погрешности введем обозначения:

$$D_m = \begin{cases} \frac{|B_{m+1}|}{(m+1)!} T^m (4 - 2^{1-m}) x_{\max}^{(m)}, & m = 2p - 1, \quad p = 1, 2, 3, \dots; \\ \frac{|E_m|}{4^m \cdot m!} T^m x_{\max}^{(m)}, & m = 2p, \quad p = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (30)$$

Отметим, что значения  $D_m$  зависят от параметров  $m$ ,  $x_{\max}^{(m)}$  и  $T$  сигнала  $x(t)$ . С учетом (30) вместо (24) и (29) получим

$$\gamma_{np}(M, x) = \frac{D_m}{M^m}. \quad (31)$$

Используя конкретные значения чисел Эйлера и Бернулли в (31), для предельной погрешности при  $m = \overline{1, 5}$  получим:

$$\gamma_{np}(M, y) = \begin{cases} \frac{D_1}{M} = \frac{T x'_{\max}}{4M}, & m = 1; \\ \frac{D_2}{M^2} = \frac{T^2 x''_{\max}}{32M^2}, & m = 2; \\ \frac{D_3}{M^3} = \frac{T^3 x'''_{\max}}{192M^3}, & m = 3; \\ \frac{D_4}{M^4} = \frac{T^4 x_{\max}^{(4)}}{6144M^4}, & m = 4, \\ \frac{D_5}{M^5} = \frac{T^5 x_{\max}^{(5)}}{7680M^5}, & m = 5. \end{cases} \quad (32)$$

Используя выражение (9), можно получить различные значения  $x_{\max}^{(m)}$  в зависимости от измерительного сигнала  $f(t)$ . Например, при  $m = 1$  получим  $x'_{\max} = \frac{1}{\alpha} \max_{t \in [0, T]} |\alpha f'(t) - 1|$ .

Учитывая в (6) выражения (7) и (31), имеем

$$|\bar{G}_n - C_n| \leq \alpha \max_{t \in [0, T]} |f(t) f'(t)| + \frac{D_m}{M^m}. \quad (33)$$

Если задается допустимое значение абсолютной погрешности измерения коэффициентов Фурье, то используя (33) выбором  $\alpha$  и  $M$  можно обеспечить требуемую точность измерения.

Используя оценку погрешности, можно решить две характерные задачи:

1) при заданном  $D_m$  и допустимом значении абсолютной погрешности  $\gamma_{\text{доп}}$ , можно найти количество отсчетов мгновенных значений  $M$ , удовлетворяющее условию

$$\gamma_{np}(M, x) \leq \gamma_{\text{доп}}; \quad (34)$$

2) при заданном значении допустимой погрешности  $\gamma_{\text{доп}}$  и количестве отсчетов мгновенных значений  $M$ , можно определить параметр  $D_m$  класса функций, удовлетворяющих условию (34).

Полученные оценки предельной погрешности  $\gamma_{np}(M, x)$  по формуле (31) имеют следующие особенности:

— являются гарантированными оценками для любого множества функции  $x(t)$ , удовлетворяющего (11) и (12), т.е. справедливо неравенство  $|\gamma(M, x)| \leq \gamma_{np}(M, x)$ ;

— учитывают взаимосвязи между степенью гладкости  $x(t)$  и количеством отсчетов  $M$ , а поэтому обладают явно выраженным характером убывания по мере возрастания  $m$  и  $M$ ;

— включают совокупность параметров  $x(t)$  и процесса дискретизации сигналов, поэтому позволяют обеспечить их сбалансированное сочетание в рамках решаемых конкретных измерительных задач.

Отметим, что проведенное исследование позволяет обосновать возможность и целесообразность использования предложенного алгоритма (3) для вычисления комплексных коэффициентов Фурье.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мамедов Н. Я., Абдуллаев Н. Т., Агаева Г. С. Численный алгоритм спектрального анализа измерительных сигналов // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 7. С. 37—41.
2. Мамедов Н. Я., Абдуллаев Н. Т., Агаева Г. С., Джафарова А. Н. Оценка погрешности метода быстрого спектрального анализа // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 6. С. 14—21.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 663 с.
4. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Гостехтеориздат, 1952. 480 с.
5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

#### Сведения об авторах

**Нураддин Ясин Мамедов**

— канд. техн. наук, доцент; Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, кафедра общей и прикладной математики; E-mail: mr.nuraddin47@mail.ru

**Айнур Нураддин Джафарова**

— канд. техн. наук, доцент; Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, кафедра физики; E-mail: aymin@mail.ru

Поступила в редакцию  
20.09.17 г.

**Ссылка для цитирования:** Мамедов Н. Я., Джафарова А. Н. Оценивание погрешности коэффициентов Фурье при использовании метода быстрого спектрального анализа // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 3. С. 249—256.

#### ESTIMATION OF FOURIER COEFFICIENTS ERRORS WHEN USING THE QUICK SPECTRAL ANALYSIS METHOD

**N. Ya. Mammadov, A. N. Jafarova**

*Azerbaijan State University of Oil and Industry,  
AZ1010, Baku, Azerbaijan  
E-mail: mr.nuraddin47@mail.ru*

An algorithm of spectral analysis of measuring signals allowing for signal processing within the interval of observation is proposed. Effectiveness of the algorithm application is confirmed by presented estimates of the error in numerical determination of the Fourier coefficients. With the use of Bernoulli polynomials, the exact upper bound of error of the algorithm is evaluated. The obtained generalized expression for the error depending on the differential and spectral properties of the signal, as well as the acceptable error values allow for determining the parameters of the signal sampling.

**Keywords:** spectral analysis, complex Fourier coefficients, error of digital integration, exact upper bound of error, spectral and differential properties of signal

**Data on authors**

- Nuraddin Ya. Mammadov** — PhD, Associate Professor; Azerbaijan State University of Oil and Industry, Department of General and Applied Mathematics; E-mail: mr.nuraddin47@mail.ru
- Aynur N. Jafarova** — PhD, Associate Professor; Azerbaijan State University of Oil and Industry, Department of Physics; E-mail: aymin@mail.ru

**For citation:** Mammadov N. Ya., Jafarova A. N. Estimation of Fourier coefficients errors when using the quick spectral analysis method. *Journal of Instrument Engineering*. 2018. Vol. 61, N 3. P. 249—256 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-3-249-256