ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.51
DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-4-304-308

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СПОСОБ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ПРИ СИНТЕЗЕ ЗАКОНА ФИНИТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

К. А. Зименко[1], А. Е. Поляков[1,2], Д. В. Ефимов[1,2], А. С. Кремлев[1]

[1]*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия*
E-mail: kostyazimenko@gmail.com

[2]*Государственный институт исследований в информатике и автоматике, 59650, Вильнёв-д'Аск, Франция*

Представлен модифицированный способ оценки параметров, используемых при синтезе закона финитного управления. Объект управления представляет собой цепь последовательно соединенных интеграторов в условиях наличия внешних возмущающих воздействий и параметрических неопределенностей. Предполагается, что вектор состояния доступен для измерения. Развиты результаты, представленные в предыдущих работах авторов. Полученный способ не требует выполнения дополнительных вычислительных процедур, как, например, поиск параметров на некоторой числовой сетке, а позволяет получить оценки необходимых параметров аналитически. Таким образом, представленный способ оценки позволяет значительно упростить синтез финитного регулятора.

Ключевые слова: *оценка параметров регулятора, финитная устойчивость, управление по вектору состояний*

Задача разработки финитных (гарантирующих выполнение всех переходных процессов на конечном интервале времени) алгоритмов управления с каждым годом становится все более актуальной, о чем свидетельствует рост числа публикаций по этой тематике (см., например, [1—4]). В работах [5, 6] представлен алгоритм финитной стабилизации цепи последовательно соединенных интеграторов в условиях внешних возмущающих воздействий и параметрических неопределенностей системы. В настоящей работе приводится модифицированный способ оценки параметров закона управления, позволяющий значительно упростить синтез регулятора.

Для начала рассмотрим систему, описывающую цепь интеграторов

$$\dot{x} = Ax + bu + d(t, x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния объекта, $u \in R$ — управляющее воздействие, функция $d(t, x)$ представляет внешние возмущающие воздействия и параметрические возмущения системы,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для обобщенно однородной функции Ляпунова V со степенью однородности m существуют такие положительные константы c_1 и c_2, при которых выполняется следующее неравенство [7, 8]:

$$c_1\|x\|_r^m \le V(x) \le c_2\|x\|_r^m, \tag{2}$$

где $\|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{\frac{\rho}{r_i}}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ — однородная норма, $r = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n\end{pmatrix}^T$ — вектор весов $r_i > 0$, $\rho \ge \max_i r_i$, $i = \overline{1,n}$. Легко заметить, что однородная норма является обобщенно однородной функцией со степенью однородности 1, т.е. $\|D(\lambda)x\|_r = \lambda\|x\|_r$.

Приведем закон управления, представленный в работе [5] для $d(t,x) = 0$. Введем неявную функцию Ляпунова в виде

$$Q(V,x) = x^T D(V^{-1})PD(V^{-1})x - 1, \tag{3}$$

где $D(\lambda) = \operatorname{diag}\{\lambda^{1+(n-i)\mu}\}_{i=1}^n$ — диагональная матрица, $\mu \in (0,1]$, $P = P^T \in R^{n\times n}$ — симметричная положительно определенная матрица.

Согласно теореме 3 [5], если разрешима система линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} AX + XA^T + by + y^T b^T + \alpha X + \beta \mathrm{I}_n \le 0, \\ \begin{pmatrix} \gamma & y \\ y^T & X \end{pmatrix} \ge 0, \quad \begin{pmatrix} X & \mathrm{I}_n - H(C) \\ \mathrm{I}_n - H(C) & \beta \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \ge 0, \\ XH_\mu + H_\mu X < 0, \quad X > 0, \quad \beta \mathrm{I}_n \ge \gamma X \end{cases}$$

(I_n — единичная матрица) для $H_\mu = \operatorname{diag}\{-1-(n-i)\mu\}_{i=1}^n$, $H(\lambda) = \operatorname{diag}\{\lambda^{(n+1-i)\mu}\}_{i=1}^n$, $\mu \in (0,1]$, $\alpha, \beta, \gamma, C \in R_+$: $\alpha > \beta$, $X \in R^{n\times n}$, $y \in R^{1\times n}$ и существует такое значение c_u, которое удовлетворяет одному из следующих неравенств:

$$\frac{c_1}{c} \ge c_u \ge c_2, \tag{4}$$

$$c_1 \ge c_u \ge \frac{c_2}{c}, \tag{5}$$

при этом коэффициенты c_1 и c_2 удовлетворяют неравенству (2), тогда закон управления

$$u(x) = \left(c_u\|x\|_r\right)^{1-\mu} kD\left(\left(c_u\|x\|_r\right)^{-1}\right)x, \tag{6}$$

где $k = yX^{-1}$ стабилизирует систему (1) на конечном интервале времени. Робастность этого закона управления к внешним возмущениям и наличию параметрических неопределенностей проанализирована в работе [6].

Поскольку для практической реализации предлагаемого алгоритма управления требуется выполнение неравенства (4) или (5), необходимо произвести оценку параметров c_1 и c_2. В работе [5] предлагалось численно оценивать параметры c_1 и c_2 на некоторой сетке, такой подход требует дополнительных вычислительных процедур, что усложняет синтез регулятора. Предложенный в настоящей работе аналитический способ оценки данных параметров позволяет значительно упростить синтез регулятора (6).

Заметим, что неявно обозначенная выражением (3) функция Ляпунова $V(x)$ является обобщенно однородной со степенью, равной единице. Действительно, так как $Q(V, D(\lambda)x) = Q(\lambda^{-1}V, x)$, получим $V(D(\lambda)x) = \lambda V(x)$. В таком случае неравенство (2) можно представить следующим образом: $c_1\|x\|_r \le V(x) \le c_2\|x\|_r$. Поскольку V и $\|x\|_r$ однородны со степенью 1 и $c_1\|D(\lambda)x\|_r \le V(D(\lambda)x) \le c_2\|D(\lambda)x\|_r \Rightarrow \lambda c_1\|x\|_r \le \lambda V(x) \le \lambda c_2\|x\|_r \Rightarrow c_1\|x\|_r \le V(x) \le c_2\|x\|_r$, то для того чтобы найти c_1 и c_2, достаточно рассмотреть неравенство (2) на некотором множестве $M = \left\{x \in \Re^n \mid V(x) = 1\right\}$. Тогда из выражения (3) можно получить следующее неравенство:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}, \qquad (7)$$

где $\lambda_{\min}(P)$ и $\lambda_{\max}(P)$ — наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы P, откуда $|x_i| \le \frac{1}{\lambda_{\min}^{1/2}(P)}$.

Тогда при $P \ge I$ (т.е. $\lambda_{\min}(P) \ge 1$) справедливо неравенство

$$\|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\rho/r_i}\right)^{1/\rho} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{\min}^{\frac{\rho}{2r_i}}(P)}\right)^{1/\rho} \le \left(\frac{n}{\lambda_{\min}^{\frac{\rho}{2r_{\max}}}(P)}\right)^{1/\rho}, \qquad (8)$$

а при $\lambda_{\min}(P) < 1$ получим:

$$\|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\rho/r_i}\right)^{1/\rho} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{\min}^{\frac{\rho}{2r_i}}(P)}\right)^{1/\rho} \le \left(\frac{n}{\lambda_{\min}^{\frac{\rho}{2r_{\min}}}(P)}\right)^{1/\rho}. \qquad (9)$$

С другой стороны, так как функция Ляпунова является обобщенно однородной с показателем однородности 1 при векторе весов $\left(1+(n-1)\mu \;\; 1+(n-2)\mu \;\; \cdots \;\; 1\right)^T$, можно переписать выражение (2) для множества M как

$$c_1\|x\|_r \le 1 \le c_2\|x\|_r. \qquad (10)$$

Основываясь на выражениях (8) и (9), оценку параметра c_1 проведем следующим образом:

$$c_1 = \min\left\{\frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2r_{\max}}}(P)}{n^{1/\rho}}, \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2r_{\min}}}(P)}{n^{1/\rho}}\right\}. \qquad (11)$$

Для получения оценки параметра c_2 воспользуемся неравенством

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} \|x\|_r^{2r_i} \le n \begin{cases} \|x\|_r^{2r_{\min}}, & \text{если } \|x\|_r < 1, \\ \|x\|_r^{2r_{\max}}, & \text{если } \|x\|_r \ge 1, \end{cases}$$

и, используя неравенство (10), получим следующую оценку:

$$c_2 = \max\left\{\left(n\lambda_{\max}(P)\right)^{\frac{1}{2r_{\max}}}, \left(n\lambda_{\max}(P)\right)^{\frac{1}{2r_{\min}}}\right\}. \qquad (12)$$

Таким образом, использование полученных оценок (11) и (12) в неравенствах (4) и (5) позволяет упростить процедуру синтеза финитного регулятора (6) для системы вида (1) благодаря тому, что получение данных оценок не требует выполнения дополнительных вычислительных процедур в сравнении с ранее предложенными методами; оценки (11) и (12) позволяют проверить выполнение неравенств (4) и (5) аналитически, основываясь на значениях собственных чисел матрицы P.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-19-01422) в Университете ИТМО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Orlov Y.* Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems // SIAM J. of Control and Optimization. 2004. Vol. 43, N 4. P. 1253—1271.
2. *Levant A.* On fixed and finite time stability in sliding mode control // IEEE 52nd Annual Conf. on Decision and Control (CDC). 2013. P. 4260—4265.
3. *Oza H. B., Orlov Y. V., Spurgeon S. K.* Robust finite time stability and stabilisation: A survey of continuous and discontinuous paradigms // 13th Intern. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). 2014. P. 1—7.
4. *Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W.* Finite-time stabilization using implicit lyapunov function technique // Proc. of 9th Symposium on Nonlinear Control Systems. 2013. P. 140—145.
5. *Зименко К. А., Поляков А. Е., Ефимов Д. В., Кремлев А. С.* Устойчивость системы последовательно соединенных интеграторов на конечном интервале времени // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 9. С. 681—686.
6. *Zimenko K. A., Polyakov A. E., Efimov D. V.* Stabilization of Chain of Integrators with Arbitrary Order in Finite-time // Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). 2016. P. 4637—4641.
7. *Зубов В. И.* О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенно-однородными правыми частями // Изв. вузов. Математика. 1958. № 1. С. 80—88.
8. *Bacciotti A., Rosier L.* Lyapunov Functions and Stability in Control Theory. Springer, 2005. 237 p.

Сведения об авторах

Константин Александрович Зименко — аспирант; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: kostyazimenko@gmail.com

Андрей Евгеньевич Поляков — PhD; Государственный институт исследований в информатике и автоматике, кафедра Non-A INRIA – LNE; E-mail: andrey.polyakov@inria.fr

Денис Валентинович Ефимов — PhD; Государственный институт исследований в информатике и автоматике, кафедра Non-A INRIA – LNE; E-mail: Denis.Efimov@inria.fr

Артем Сергеевич Кремлев — канд. техн. наук; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: kremlev_artem@mail.ru

Поступила в редакцию
20.10.17 г.

Ссылка для цитирования: *Зименко К. А., Поляков А. Е., Ефимов Д. В., Кремлев А. С.* Модифицированный способ оценки параметров при синтезе закона финитного управления // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 4. С. 304—308.

MODIFIED METHOD FOR PARAMETERS ESTIMATING IN FINITE-TIME CONTROL SYNTHESIS

K. A. Zimenko[1], A. E. Polyakov[1,2], D. V. Efimov[1,2], A. S. Kremlev[1]

[1]*ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia*
E-mail: kostyazimenko@gmail.com

[2] *Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique (INRIA), 59650, Villeneuve-d'Ascq, France*

A modified method for estimating parameters used in finite-time control synthesis is proposed. The object under the control is a chain of consecutively connected integrators in the presence of external disturbances and parametric uncertainties. It is assumed that the state vector is available for measurement. Results presented in the previous papers of the authors are extended. The developed method does not require the execution of additional computational procedures, such as the search for parameters on a certain numerical grid and allows to obtain the estimates of the necessary parameters analytically. Thus, the presented method is reported to simplify considerably the synthesis of a finite-time regulator.

Keywords: control parameters estimation, finite-time stability, state feedback control

Data on authors

Konstantin A. Zimenko	—	Post-Graduate Student; ITMO University, Department of Control Systems and Informatics; E-mail: kostyazimenko@gmail.com
Andrey E. Polyakov	—	PhD; Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique (INRIA), Department Non-A INRIA – LNE; E-mail: adrey.polyakov@inria.fr
Denis V. Efimov	—	PhD; Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique (INRIA), Department Non-A INRIA – LNE; E-mail: Denis.Efimov@inria.fr
Artem S. Kremlev	—	PhD; ITMO University, Department of Control Systems and Informatics; E-mail: kremlev_artem@mail.ru

For citation: Zimenko K. A., Polyakov A. E., Efimov D. V., Kremlev A. S. Modified method for parameters estimating in finite-time control synthesis. *Journal of Instrument Engineering*. 2018. Vol. 61, N 4. P. 304—308 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-4-304-308