УДК 681.514
DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-6-485-489

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПУАССОНОВСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

А. М. Водовозов

Вологодский государственный университет, 160000, Вологда, Россия
E-mail: am.vodovozov@gmail.com

Рассмотрены стохастические системы управления при импульсных входных воздействиях, образующих пуассоновские потоки событий, такие как приборы с использованием ионизирующих излучений, системы массового обслуживания и т.д. Синтезирован заданный нелинейный функционал от интенсивности пуассоновского потока при ограничении времени. В основе предлагаемого метода лежит использование вероятностной формы математического описания пуассоновского процесса. При вычислениях нелинейных функционалов в качестве аргумента используется оценка интенсивности потока, основанная на подсчете случайного числа событий за фиксированный интервал квантования. Представлено аналитическое решение задачи настройки вычислительного устройства с учетом пуассоновского распределения входного сигнала. Приведены расчетные формулы, позволяющие найти конкретное решение задачи для целого ряда типовых нелинейностей. Результаты подтверждены моделированием процесса формирования нелинейного функционала, описываемого полиномом третьего порядка в пакете прикладных математических программ Scilab. Предложенный алгоритм расчета функции настройки вычислительного устройства при воспроизведении заданного аналитически нелинейного функционала может быть использован при решении практических задач в стохастических системах с пуассоновским входным сигналом.

Ключевые слова: *задача синтеза, пуассоновский процесс, интенсивность, нелинейный функционал, стохастическая система, функция настройки*

Стохастические системы с пуассоновской составляющей позволяют отображать информационные процессы в целом ряде технических приложений: приборах, использующих ионизирующие излучения, системах массового обслуживания, задачах оценки надежности оборудования [1—6]. Общей особенностью рассматриваемых систем является использование математического описания входного сигнала, несущего информацию о реальных физических явлениях, как одномерного пуассоновского процесса (пуассоновского потока событий). Информативным параметром пуассоновского потока считается его изменяющаяся во времени интенсивность (скорость счета) $\lambda(t)$, и в зависимости от значения интенсивности в системе выполняются все вычисления и принимаются решения. Реализуемый в системах функционал в общем случае является нелинейным и инерционным; результат вычислений для текущего интервала времени определяется некоторой нелинейной операцией от количества зафиксированных в этот интервал событий и значений, полученных на множестве предыдущих интервалов [7—9]. Однако в большинстве случаев инерционностью процессов на интервале квантования возможно пренебречь, и задача сводится к выполнению безынерционного нелинейного преобразования потока с последующей линейной фильтрацией результатов. Такой подход позволяет обеспечить паритет статистических и динамических погрешностей и считается пригодным для решения многих практических задач [10—12].

Выходная переменная нелинейного функционала при безынерционных преобразованиях на текущем интервале наблюдения определяется значением входной переменной на том же интервале. Поэтому соотношение выходной переменной вычислительного устройства

$F = F(t)$ и входной $\lambda = \lambda(t)$ преобразуется к функции $F(\lambda)$, задающей нелинейный функционал преобразования. Поскольку даже для безынерционных нелинейных преобразований нет обобщенных методик расчета спектрально-вероятностных характеристик входных сигналов, то и в каждом конкретном случае результат определяется свойствами пуассоновского процесса и описанием конкретной нелинейности.

В реальной стохастической системе с пуассоновской составляющей при вычислениях нелинейных функционалов в качестве аргумента используется оценка интенсивности потока λ, получаемая путем подсчета случайного числа событий N за фиксированный интервал квантования T. Вероятность появления ровно N импульсов входного сигнала за время T определяется законом распределения Пуассона [13]:

$$p(N,T) = \frac{(\lambda T)^N}{N!} e^{-\lambda T}. \qquad (1)$$

Поскольку любое нелинейное преобразование случайного сигнала всегда сопровождается явлением статистической линеаризации, то результирующий нелинейный функционал вычислительного устройства в функции λ не совпадает с вычисляемой функцией от случайной переменной N.

Задачей, решаемой в статье, является разработка алгоритмов настройки вычислительного устройства стохастической системы, обеспечивающих воспроизведение заданного нелинейного функционала в функции интенсивности пуассоновского потока λ.

Предположим, что при известном интервале квантования T существует некоторая функция $\varphi(N,T)$, для которой соответствующий функционал равен $F(\lambda)$ при $\lambda \ge 0$. Будем считать $\varphi(N,T)$ функцией настройки вычислительного устройства:

$$\sum_{N=0}^{\infty} [p(N,T)\,\varphi(N,T)] = F(\lambda), \qquad (2)$$

это соотношение определяет математическое ожидание выходного сигнала.

Для пуассоновского распределения (1) в рассматриваемом случае

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda T)^N}{N!} e^{-\lambda T}\ \varphi(N,T) \right] = F(\lambda),$$

обозначим $x = \lambda T$, тогда

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left[\frac{x^N}{N!} \varphi(N,T) \right] = F\left(\frac{x}{T}\right) e^x.$$

Левая часть выражения является бесконечным степенным рядом, поэтому значения $\varphi(N,T)$ могут быть найдены разложением правой части в степенной ряд. Коэффициенты $\varphi(N,T)$ определим по формуле Маклорена [14] как производную порядка N функции $F\left(\frac{x}{T}\right) e^x$ точке x=0:

$$\varphi(N,T) = \left[F\left(\frac{x}{T}\right) e^x \right]^{(N)} \Bigg|_{\text{при } x=0}.$$

Дифференцируя правую часть уравнения, находим:

$$\varphi(0,T) = F(0),$$

$$\varphi(1,T) = F(0) + T^{-1} F'(0),$$

$$\varphi(2,T) = F(0) + 2T^{-1} F'(0) + T^{-2} F''(0),$$

$$\varphi(3,T) = F(0) + 3T^{-1} F'(0) + 3T^{-2} F''(0) + T^{-3} F'''(0),$$

$$\varphi(4,T) = F(0) + 4T^{-1}F'(0) + 6T^{-2}F''(0) + 4T^{-3}F'''(0) + T^{-4}F''''(0).$$

В общем случае

$$\varphi(N,T) = \sum_{j=0}^{N}\left[\binom{N}{j}T^{-j}F^{(j)}(0)\right], \qquad (3)$$

где $\binom{N}{j} = \dfrac{N!}{j!(N-j)!}$ — биноминальные коэффициенты.

В результате получаем функцию настройки нелинейного преобразователя по заданному аналитическому выражению функционала $F(\lambda)$ при условии существования всех производных функции $F(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$. Этому условию, в частности, удовлетворяют экспоненциальные функции, алгебраические и тригонометрические многочлены.

Например, для элементарной степенной функции $F(\lambda) = \lambda^k$

$$F(\lambda)^{(j)} = \frac{k!}{(k-j)!}\lambda^{k-j}.$$

При $\lambda = 0$ имеем $F(\lambda)^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ k! & \text{при } j = k. \end{cases}$

Тогда, в соответствии с (3), $\varphi(N,T) = T^{-k}\dfrac{N!}{(N-k)!}$.

В более общем случае для воспроизведения алгебраического многочлена степени m вида $F(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k\lambda^k$ имеем

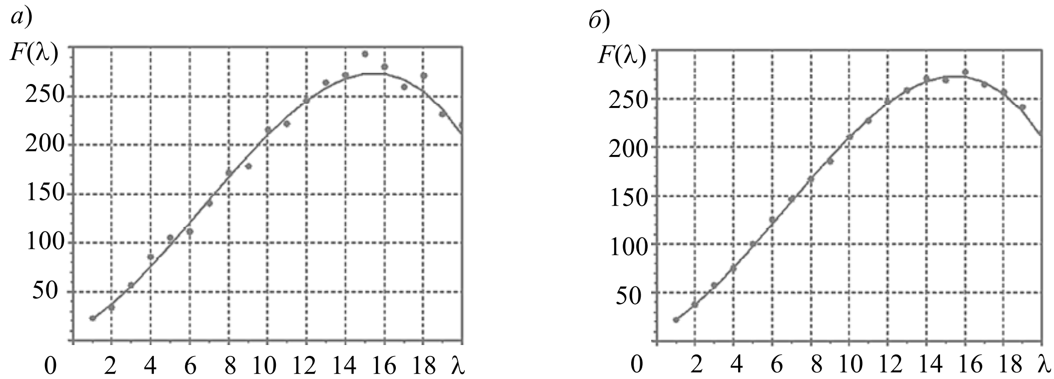
$$\varphi(N,T) = \sum_{k=0}^{m} a_k T^{-k}\frac{N!}{(N-k)!}. \qquad (4)$$

Полученные результаты проверены моделированием в пакете прикладных математических программ Scilab, содержащем достаточный набор инструментов для статистического моделирования [15]. В качестве примера приведены результаты моделирования процесса воспроизведения произвольно заданного нелинейного функционала третьего порядка $F(\lambda) = 10 + 10\lambda + 2\lambda^2 - 0{,}1\lambda^3$ в диапазоне изменения интенсивности потока $\lambda = 1$—20.

В соответствии с (4) функция настройки вычислительного устройства для воспроизведения такого функционала имеет вид

$$\varphi(N,T) = 10 + 10T^{-1}N + 2T^{-2}N(N-1) + 0{,}1\,T^{-3}N(N-1)(N-2).$$

На рисунке показаны результаты моделирования при разном количестве испытаний (*а* — 200, *б* — 1000).



В обоих случаях заданная функциональная зависимость воспроизводится довольно точно в пределах допустимой статистической погрешности, уменьшающейся с ростом количества испытаний.

Следовательно, предложенный алгоритм настройки вычислительного устройства для воспроизведения заданного аналитически нелинейного функционала может быть использован при решении практических задач в стохастических системах с пуассоновским входным сигналом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rashid R., Hoseini S. F., Gholamian M. R., Feizabadi M.* Application of queuing theory in production-inventory optimization // J. of Industrial Engineering International. 2015. Vol. 11, N 4. P. 485—494. DOI:10.1007/s40092-015-0115-9.
2. *Miller B. M., Avrachenkov K. E., Stepanyan K. V., Miller G. B.* Flow Control as a Stochastic Optimal Control Problem with Incomplete Information // Problems of Information Transmission. 2005. Vol. 41, N 2. P. 150—170. DOI:10.1007/s11122-005-0020-8.
3. *Водовозов А. М., Полянский А. В.* Линеаризация характеристик сцинтилляционных датчиков // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 1978. Т. 21, № 8. С. 17—20.
4. *Bukhalev V. A., Skrynnikov A. A., Fedotov A. Y.* Analyzing queuing systems by methods of theory of systems with random jump structure // J. of Computer and Systems Sciences International. 2013. Vol. 52, N 4. P. 599—607. DOI:10.1134/S1064230713030040.
5. *Сучкова Л. И., Юрченко А. В.* Моделирование нештатных ситуаций в распределенных системах технологического контроля // Контроль. Диагностика. 2012. № 13. С. 136—140.
6. *Poloskov I., Malanin V.* A scheme for study of linear stochastic time-delay dynamical systems under continuous and impulsive fluctuations // Intern. J. of Dynamics and Control. 2016. Vol. 4, N 2. P. 195—203. DOI:10.1007/s40435-015-0172-3.
7. *Зольников В. К., Сафонов А. В.* Метод вычисления оптимальной пропускной способности для маршрутизатора // Программные продукты и системы. 2011. № 3. С. 47.
8. *Арсеньев В. Н., Силантьев С. Б., Ядренкин А. А.* Использование априорной информации для коррекции модели потока событий в сложной системе // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 5. С. 391—397. DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-5-391-397.
9. *Левкина С. В.* Математическая модель входного потока в информационно-аналитическую систему // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 2. С. 132—135. DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-2-132-135.
10. *Григорьев Ю. А., Плужников В. Л.* Модель обработки запросов в параллельной системе баз данных // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2010. № 4. С. 78—90.
11. *Рыбаков К. А.* Вероятностный анализ стохастических систем с пуассоновской составляющей // Науч. вестн. Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2013. № 194. С. 55—62.
12. *Соболев В. И.* О паритете динамических и статических погрешностей в информационно-измерительных системах // Измерительная техника. 2014. Т. 57, № 3. С. 15—20. DOI:10.1007/s11018-014-0440-1.
13. *Кингман Д.* Пуассоновские процессы / Под ред. *А. М. Вершика*. М.: МЦНМО, 2007. 136 с.
14. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
15. *Schuster M., Unbehauen R.* Analysis of nonlinear electric networks by means of differential algebraic equations solvers // Electrical Engineering. 2006. Vol. 88, N 3. P. 229—239. DOI:10.1007/s00202-004-0278-7.

Сведения об авторе

Александр Михайлович Водовозов — канд. техн. наук, профессор; Вологодский государственный университет, кафедра управляющих и вычислительных систем; заведующий кафедрой; E-mail: am.vodovozov@gmail.com

Поступила в редакцию
06.02.18 г.

Ссылка для цитирования: *Водовозов А. М.* Синтез нелинейных функционалов стохастических систем с пуассоновской составляющей // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 6. С. 485—489.

SYNTHESIS OF NONLINEAR FUNCTIONALS OF STOCHASTIC SYSTEMS WITH THE POISSON COMPONENT

A. M. Vodovozov

Vologda State University, 160000, Vologda, Russia
E-mail: am.vodovozov@gmail.com

Stochastic control systems are considered under pulsed input entrance influence generated Poisson streams of events; examples are systems such as devices using ionizing radiation, the systems of mass service etc. A given nonlinear functional of the Poisson flow intensity with time limitation is synthesized. The proposed method employs a probabilistic form of the mathematical description of Poisson process. Calculations of nonlinear functionals use an estimate of stream intensity as an argument, the estimate is based on calculation of random number of events for the fixed quantization interval. An analytical solution of the problem of setting calculating device with the account for Poisson distribution of input signal is presented. Calculation formulas are given that make it possible to find a concrete solution of the problem for several typical nonlinearities. The results are confirmed by modeling the process of formation of a nonlinear functional described by a third order polynomial using the applied mathematical programs package Scilab. It is anticipated that the proposed algorithm for calculating the tuning function of a computing device for reproducing a given analytically nonlinear functional can be used to solve practical problems in stochastic systems with Poisson input signal.

Keywords: problem of synthesis, Poisson process, intensity, nonlinear functionality, stochastic system, control function

Data on author

Alexander M. Vodovozov — PhD, Professor, Vologda State University, Department of Control and Computer Systems; Head of the Department; E-mail: am.vodovozov@gmail.com

For citation: Vodovozov A. M. Synthesis of nonlinear functionals of stochastic systems with the Poisson component. *Journal of Instrument Engineering*. 2018. Vol. 61, N 6. P. 485—489 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-6-485-489