

## ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА СО СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ЧАСТОТЫ

М. М. КОРОТИНА, С. В. АРАНОВСКИЙ, А. А. БОБЦОВ

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: korotina.marina@gmail.com*

Рассмотрена задача оценивания параметров синусоидального сигнала, частота которого изменяется как полиномиальная функция времени. Для решения этой задачи предложена параметризация, позволяющая сформировать уравнения линейной регрессии относительно неизвестных параметров. Оценки формируются с использованием метода динамического расширения регрессора, обеспечивающего монотонность переходных процессов. Работоспособность предложенного подхода проиллюстрирована результатами численного моделирования.

**Ключевые слова:** синусоидальный сигнал, идентификация, нестационарные параметры, метод динамического расширения регрессора, градиентный алгоритм, регрессионная модель

**Введение.** Компенсировать синусоидальные возмущения необходимо при решении различных инженерных задач, таких как активное подавление механических вибраций [1], компенсация качки для повышения точности позиционирования судна [2], обнаружение неисправностей в технических объектах [3], компенсация эха в акустике и многих других [4]. Большинство известных способов компенсации основано на использовании метода внутренней модели, при котором модель возмущения включается в структуру регулятора с использованием, например, параметризации Юлы—Кучеры [5]. Если параметры модели возмущения заранее неизвестны, они определяются в ходе работы системы с использованием адаптивных алгоритмов, описанных, например, в работе [6].

Однако большинство методов оценивания параметров синусоидальных сигналов основано на предположении, что период сигнала является постоянным. Такое предположение может не выполняться в ряде инженерных задач. Например, если источником возмущения является работа электрического привода, частота возмущения пропорциональна скорости вращения электрической машины, и при разгоне или торможении частота возмущения изменяется. Такая ситуация, в частности, описана в работах [7—9] применительно к высокоточному приводу следящего телескопа.

Для преодоления указанной проблемы в работе [7] предложен (и позже улучшен в работе [10]) алгоритм адаптивного оценивания параметров синусоидального сигнала с линейно меняющейся частотой, т.е. когда аргумент синусоидальной функции описывается квадратичным полиномом времени. В настоящей статье предложен алгоритм оценивания параметров синусоидального сигнала, частота которого описывается полиномом времени произвольного порядка  $n > 1$ . К его достоинствам относится то, что порядок не зависит от степени полинома  $n$ .

Свести задачу оценивания параметров сигнала к задаче линейной регрессии позволяет введение специальной параметризации. Затем с применением метода динамического расширения регрессора (ДРР) выполняется поэлементная декомпозиция регрессии, позволяющая получить монотонные переходные процессы оценок параметров.

**Постановка задачи.** Рассмотрим сигнал

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t^n + \varphi), \quad (1)$$

где  $A > 0$ ,  $\omega_0 > 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  — неизвестные параметры. Значение параметра  $n > 1$  полагается известным. Ставится задача построения оценок  $\hat{\omega}_0(t)$  и  $\hat{A}(t)$  неизвестных параметров  $\omega_0$  и  $A$ , таких что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega}_0(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{A}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\tilde{\omega}_0(t) = \hat{\omega}_0(t) - \omega_0$ ,  $\tilde{A}(t) = \hat{A}(t) - A$  — ошибки оценивания параметров  $\omega_0$  и  $A$ .

**Параметризация сигнала.** Свести задачу оценивания параметров сигнала (1) к задаче оценивания линейной регрессии позволяет параметризация. Продифференцируем сигнал  $y(t)$  дважды:

$$\dot{y}(t) = \omega_0 n t^{n-1} A \cos(\omega_0 t^n + \varphi), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= -\omega_0^2 n^2 t^{2n-2} A \sin(\omega_0 t^n + \varphi) + \omega_0 n(n-1)t^{n-2} A \cos(\omega_0 t^n + \varphi) = \\ &= -\left(\omega_0 n t^{n-1}\right)^2 y(t) + \frac{n-1}{t} \dot{y}(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения (3), (4) могут быть представлены нестационарной линейной системой в форме вход—состояние—выход:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{n-1}{t} x_2(t) - \left(n t^{n-1}\right)^2 y(t) x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \omega_0^2 \end{bmatrix}.$$

Так как система (5) нестационарна и не определена при  $t = 0$ , то в дальнейшем будем полагать, что измерения и оценивание проводятся для  $t \geq t_0 > 0$ . Тогда начальные условия в системе (5) будут

$$x(t_0) = x_0 = \begin{bmatrix} A \sin(\omega_0 t_0^n + \varphi) \\ \omega_0 n t_0^{n-1} A \cos(\omega_0 t_0^n + \varphi) \\ \omega_0^2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Систему (5) можно переписать в матричном виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t), \\ y(t) &= C^T x(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{t} & -\left(n t^{n-1}\right)^2 y(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Введем дополнительно матрицу  $\Phi(t)$ :

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \Phi(t_0) = I, \quad (8)$$

где  $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  — единичная матрица. Так как заданная таким образом  $\Phi(t)$  является фундаментальной матрицей системы (7), то для всех моментов времени  $t \geq t_0$

$$x(t) = \Phi(t)x_0.$$

Тогда для выхода системы (7) можно записать

$$y(t) = C^T x(t) = C^T \Phi(t)x_0,$$

что позволяет сформировать уравнение линейной регрессии вида

$$z(t) = m^T(t)\theta, \quad (9)$$

где  $z(t) = y(t)$  и  $m(t) = \Phi^T(t)C$  — измеряемые сигналы, а вектор неизвестных постоянных параметров  $\theta$  совпадает с неизвестными начальными условиями,  $\theta = x_0$  ( $x_0$  определен в (6)).

Отметим, что для начальных условий (6) справедливо

$$\omega_0 = \sqrt{x_{0,3}},$$

$$A^2 = x_{0,1}^2 + \frac{x_{0,2}^2}{n^2 t_0^{2n-2} x_{0,3}},$$

где  $x_{0,i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  —  $i$ -й компонент вектора  $x_0$ . Тогда задача оценивания параметров сигнала (1) может быть сведена к задаче оценивания  $\theta$  в модели линейной регрессии (9), а именно к построению такой оценки  $\hat{\theta}(t)$ , что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\theta}(t) - \theta| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| = 0. \quad (10)$$

Тогда параметр  $\omega_0$  сигнала (1) может быть найден как

$$\hat{\omega}_0(t) = \sqrt{|\hat{\theta}_3(t)|}, \quad (11)$$

а амплитуда  $A$  оценена

$$\hat{A}(t) = \sqrt{\hat{\theta}_1^2(t) + \frac{\hat{\theta}_2^2(t)}{n^2 t_0^{2n-2} \hat{\theta}_3(t)}}. \quad (12)$$

Тогда при выполнении (10) оценки (11) и (12) обеспечат достижение цели (2).

Отметим, что при формировании оценки  $\hat{A}(t)$  используется деление на  $\hat{\theta}_3(t)$ . Для избежания возможного деления на нуль может использоваться оператор проекции. В этом случае оценка  $\hat{\theta}_3(t)$  в (12) заменяется проекцией с оператором

$$\text{proj}(\hat{\theta}_3(t)) = \max(\omega_{\min}^2, \hat{\theta}_3(t)),$$

$\omega_{\min}$  — минимально возможное значение параметра  $\omega_0$ . Недостатком такого подхода является необходимость наличия априорной информации о величине  $\omega_{\min}$ .

С другой стороны, оценка  $\hat{A}(t)$  может быть сформирована без использования оператора проекции (и соответственно без знания величины  $\omega_{\min}$ ), если обеспечивается монотонность переходных процессов оценки  $\hat{\theta}_3(t)$ . Действительно, так как истинное значение  $\theta_3$  заведомо положительное, то при выборе произвольного положительного начального условия  $\hat{\theta}_3(t_0) > 0$  и монотонности переходных процессов для всех  $t \geq t_0$  будет выполняться

$$\hat{\theta}_3(t) \geq \min(\hat{\theta}_3(t_0), \theta_3).$$

В этом случае деление на нуль в (12) заведомо исключено.

**Оценивание параметров с использованием процедуры динамического расширения регрессора.** Процедура динамического расширения регрессора была предложена в [11] и позже расширена в [12], а ее связь с функциональными наблюдателями для линейных систем была рассмотрена в [13]. Процедура ДРР представляет собой нелинейную динамическую трансформацию, позволяющую провести декомпозицию уравнения линейной регрессии и свести задачу оценивания  $n$ -мерного вектора неизвестных параметров к  $n$  одномерным задачам оценивания скалярного неизвестного параметра. Как показано в работе [12], такая трансформация позволяет обеспечить монотонность переходных процессов оценок параметров. Процедура ДРР хорошо зарекомендовала себя при решении широкого круга инженерных задач, например при управлении солнечными батареями [14].

В настоящем разделе процедура ДРР будет использоваться для оценивания вектора параметров  $\theta$  в модели (9). Для динамического расширения будем использовать схему Крейсельмейера, анализ которой приведен в [15]. Введем в рассмотрение вектор  $h(t)$  и матрицу  $\Psi(t)$ , заданные как решения дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= -ah(t) + m(t)z(t), h(t_0) = 0, \\ \dot{\Psi}(t) &= -a\Psi(t) + m(t)m^T(t), \Psi(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $a > 0$  — настраиваемый параметр. Обозначим союзную матрицу к матрице  $\Psi(t)$  как  $\text{adj}(\Psi(t))$ . Тогда результатом применения процедуры ДРР будут три скалярных уравнения линейной регрессии вида

$$\psi_i(t) = \Delta(t)\theta_i, \quad (14)$$

где  $i = 1, 2, 3$ ,  $\psi(t) = \text{adj}(\Psi(t))h(t)$  и  $\Delta(t) = \det(\Psi(t))$ , а  $\theta_i$  — компоненты вектора неизвестных параметров  $\theta$  в (9).

Для оценивания параметров  $\theta_i$  в линейной регрессии (14) используется градиентный алгоритм вида

$$\dot{\hat{\theta}}_i(t) = \gamma_i \Delta(t) (\psi_i(t) - \Delta(t)\hat{\theta}_i(t)), \quad (15)$$

где  $\gamma_i > 0$  — настраиваемый параметр. Как показано в [12, 15], алгоритм оценивания (15) параметра  $\theta_i$  линейной регрессии (14), полученной с использованием динамического расширения регрессора вида (13), обеспечивает монотонность переходного процесса в оценке  $\hat{\theta}_i(t)$ . Более того, оценка  $\hat{\theta}_i(t)$  экспоненциально сходится к истинному значению  $\theta_i$ , если сигнал  $m(t)$  соответствует условию неисчезающего возбуждения [15]. Выполнение этого условия может быть проверено численно при нахождении  $\Phi(t)$  как решение (8).

Таким образом, алгоритм оценивания параметров сигнала (1) описывается уравнениями (8), (11)—(13), (15), сигналы  $z(t)$ ,  $m(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $\Delta(t)$  определены в (9) и (14).

**Моделирование.** Для моделирования сигнала (1) в среде Matlab выбраны значения параметров  $n = 3$ ,  $A = 1,5$ ,  $\omega_0 = 2,1$ ,  $\varphi = 0$ , настраиваемый коэффициент динамического расширения системы (13) —  $a = 0,5$ , коэффициенты адаптации (15) —  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 3,5$ . Начальное время моделирования  $t_0 = 1$  с.

На рис. 1 приведен исходный сигнал  $y(t)$  с нарастающей частотой. На рис. 2 невязка параметров  $\tilde{\theta}$  с течением времени стремится к нулю, таким образом предложенный алгоритм оценивания обеспечивает выполнение условия (10). Графики сходимости оценок неизвестных параметров  $\tilde{A}$  и  $\tilde{\omega}_0$  к истинным значениям  $A$  и  $\omega_0$  представлены на рис. 3 и 4.

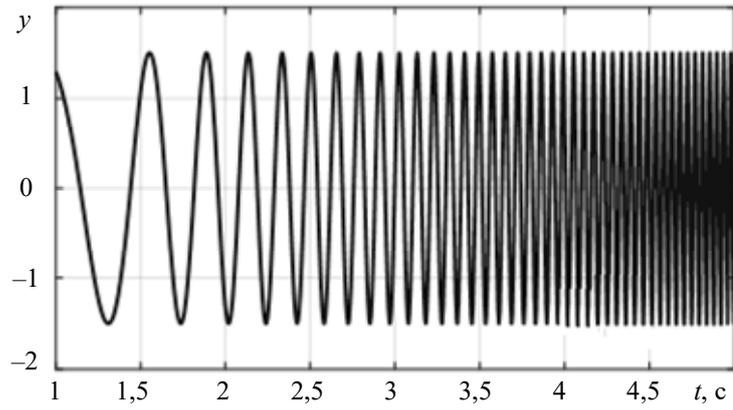


Рис. 1

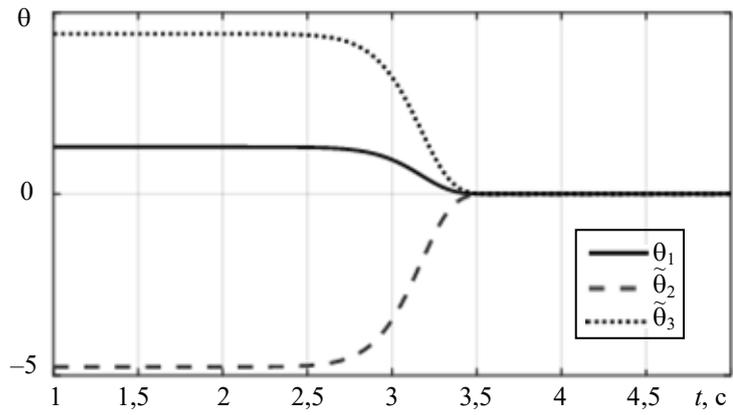


Рис. 2

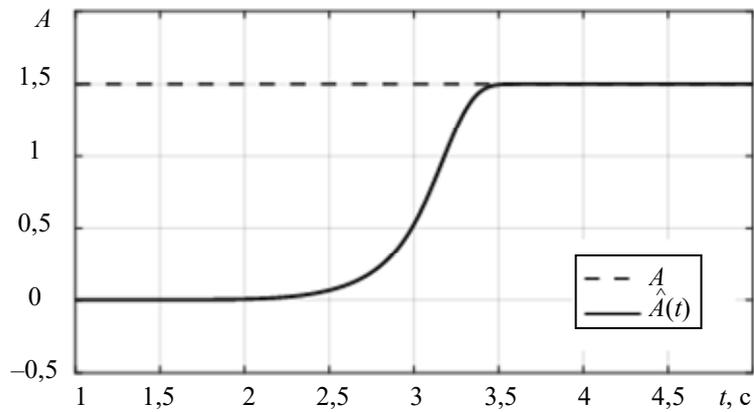


Рис. 3

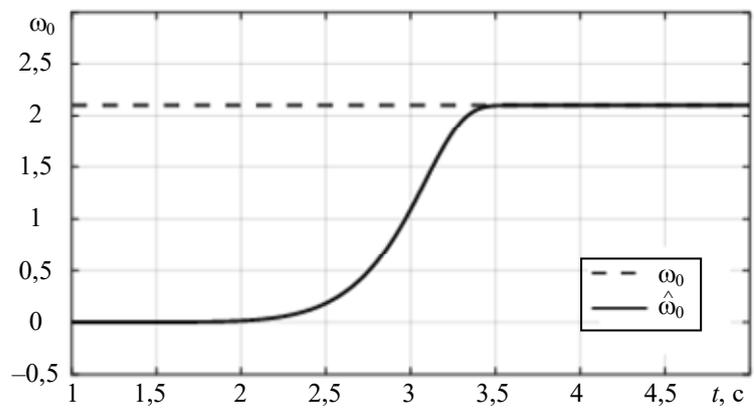


Рис. 4

**Заключение.** В настоящей статье предложен алгоритм идентификации нестационарной частоты синусоидального сигнала (1), обеспечивающий выполнение условия сходимости (10) полученных оценок к истинным значениям. Компьютерное моделирование наглядно проиллюстрировало работу алгоритма оценивания, описанного уравнениями (8), (11)—(13), (15). Применение метода динамического расширения регрессора (13) позволяет получить монотонный переходный процесс сходимости (10), что является качественным улучшением по сравнению со стандартными алгоритмами идентификации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen X. and Tomizuka M. A. Minimum Parameter Adaptive Approach for Rejecting Multiple NarrowBand Disturbances with Application to Hard Disk Drives // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 2012. Vol. 20, N 2. P. 408—415.*
2. *Veremey E. and Sotnikova M. Optimal Filtering Correction for Marine Dynamical Positioning Control System // J. Mar. Sci. Appl. 2016. Vol. 15, N 4. P. 452—462.*
3. *Alcorta-Garcia E., Zolghadri A., and Goupil P. A Nonlinear Observer-Based Strategy for Aircraft Oscillatory Failure Detection: A380 Case Study // IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst. 2011. Vol. 47, N 4. P. 2792—2806.*
4. *Landau I., Alma M., Constantinescu A., Martinez J., and No-e M. Adaptive Regulation-Rejection of Unknown Multiple Narrow Band Disturbances (A Review on Algorithms and Applications) // Control Eng. Practice. 2011. Vol. 19, N 10. P. 1168—1181.*
5. *Ван Цзянь, Арановский С. В., Бобцов А. А., Пыркин А. А. Компенсация мультисинусоидального возмущения на основе параметризации Юлы–Кучеры // Автоматика и телемеханика. 2017. № 9. С. 19—33.*
6. *Aranovskiy S. V. et al. Adaptive filters cascade applied to a frequency identification improvement problem // Intern. Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2016. Vol. 30, N 5. P. 677—689.*
7. *Арановский С. В., Бобцов А. А., Пыркин А. А. Идентификация линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 1 (77). С. 28—32.*
8. *Васильев В. Н., Томасов В. С., Шаргородский В. А., Садовников М. А. Состояние и перспективы развития прецизионных электроприводов комплексов высокоточных наблюдений // Изв. вузов. Приборостроение. 2008. Т. 51, № 6. С. 5—12.*
9. *Erm T., Sandrock S. Adaptive correction of periodic errors improves telescope performance // Proc. American Control Conference. Portland, USA, 2005. Vol. 6. P. 3776—3777. DOI: 10.1109/acc.20.*
10. *Tuan L. V., Bobtsov A., and Pyrkin A. New algorithm for identification of non-stationary parameters for a linear regression model // Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics. 2017. Vol. 17, N 5. P. 952—955.*
11. *Aranovskiy S. et al. Parameters estimation via dynamic regressor extension and mixing // 2016 IEEE American Control Conference (ACC). 2016. P. 6971—6976.*
12. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., and Pyrkin A. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. 62, N 7. P. 3546—3550.*
13. *Ortega R. et al. On dynamic regressor extension and mixing parameter estimators: Two Luenberger observers interpretations // Automatica. 2018. Vol. 95. P. 548—551.*
14. *Pyrkin A. et al. Identification of photovoltaic arrays' maximum power extraction point via dynamic regressor extension and mixing // Intern. Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2017. Vol. 31, N 9. P. 1337—1349.*
15. *Korotina M., Aranovskiy S., Ushirobira R., Vedyakov A. On parameter tuning and convergence properties of the DREM procedure // 2020 European Control Conference (ECC). 2020. P. 53—58.*

#### Сведения об авторах

Марина Михайловна Коротина

— Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; инженер; E-mail: korotina.marina@gmail.com

- Станислав Владимирович Арановский** — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; профессор; E-mail: s.aranovskiy@gmail.com
- Алексей Алексеевич Бобцов** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; мегафакультет компьютерных технологий и управления; директор; E-mail: bobtsov@mail.ru

Поступила в редакцию  
12.03.2020 г.

**Ссылка для цитирования:** Коротина М. М., Арановский С. В., Бобцов А. А. Оценивание параметров синусоидального сигнала со степенной функцией частоты // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 6. С. 507—514.

### PARAMETERS ESTIMATION OF SINUSOIDAL SIGNAL WITH POWER-LAW FREQUENCY DEPENDENCE

M. M. Korotina, S. V. Aranovskiy, A. A. Bobtsov

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia  
E-mail: korotina.marina@gmail.com

The problem of estimating parameters of sinusoidal signal whose frequency varying as a polynomial function in time is considered. To solve this problem, a parameterization is proposed that allows formation of linear regression equations with respect to unknown parameters. The desired estimates are obtained using the method of dynamic expansion of the regressor, which ensures the monotony of transient processes. Efficiency of the proposed approach is illustrated by presented results of numerical modeling.

**Keywords:** sinusoidal signal, identification, non-stationary parameters, dynamic regressor extension and mixing, gradient algorithm, regression model

#### REFERENCES

1. Chen X. and Tomizuka M.A. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2012, no. 2(20), pp. 408–415.
2. Veremey E. and Sotnikova M. *J. Mar. Sci. Appl.*, 2016, no. 4(15), pp. 452–462.
3. Alcorta-Garcia E., Zolghadri A., and Goupil P. *IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst.*, 2011, no. 4(47), pp. 2792–2806.
4. Landau I., Alma M., Constantinescu A., Martinez J., and No-e M. *Control Eng. Practice*, 2011, no. 10(19), pp. 1168–1181.
5. Wang J., Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. *Automation and Remote Control*, 2017, no. 9(78), pp. 1559–1571.
6. Aranovskiy S.V. et al. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2016, no. 5(30), pp. 677–689.
7. Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 1(77), pp. 28–32. (in Russ.)
8. Vasil'yev V.N., Tomasov V.S., Shargorodskiy V.A., Sadovnikov M.A. *Journal of Instrument Engineering*, 2008, no. 6(51), pp. 5–12. (in Russ.)
9. Erm T., Sandrock S. *Proc. American Control Conference*, Portland, USA, 2005, vol. 6, pp. 3776–3777, DOI: 10.1109/acc.20.
10. Tuan L.V., Bobtsov A., and Pyrkin A. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, no. 5(17), pp. 952–955.
11. Aranovskiy S. et al. *IEEE American Control Conference (ACC)*, 2016, pp. 6971–6976.
12. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., and Pyrkin A. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, no. 7(62), pp. 3546–3550.
13. Ortega R. et al. *Automatica*, 2018, vol. 95, pp. 548–551.
14. Pyrkin A. et al. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2017, no. 9(31), pp. 1337–1349.
15. Korotina M., Aranovskiy S., Ushirobira R., Vedyakov A. *European Control Conference (ECC)*. 2020. pp. 53–58.

#### Data on authors

- Marina M. Korotina** — ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; инженер; E-mail: korotina.marina@gmail.com
- Stanislav V. Aranovskiy** — Dr. Sci., Associate Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Leading Researcher; E-mail: s.aranovskiy@gmail.com

**Alexey A. Bobtsov**

— Dr. Sci., Professor; ITMO University, School of Computer Technologies and Control; Head of the School; E-mail: bobtsov@mail.ru

**For citation:** Korotina M. M., Aranovskiy S. V., Bobtsov A. A. Parameters estimation of sinusoidal signal with power-law frequency dependence. *Journal of Instrument Engineering*. 2020. Vol. 63, N 6. P. 507—514 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2020-63-6-507-514