

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МАЯТНИКОВОГО ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ДАТЧИКА УРОВНЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПУТИ

А. И. НЕЗНАНОВ, К. В. ПОДМАСТЕРЬЕВ

*Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, 302026, Орел, Россия
E-mail: orelkir18@gmail.com*

Получено дифференциальное уравнение динамики маятникового чувствительного элемента датчика уровня железнодорожного пути, установленного на подвижной платформе, измеряющего неровность пути в динамическом режиме, а также в условиях вибраций, определены выражения для начальных условий. Получено аналитическое решение уравнения динамики маятника для одномерных возмущений вдоль горизонтальной оси, а также численное решение для двумерного возмущения. Представлены результаты аналитических расчетов и имитационного конечно-элементного моделирования, показывающие корректность полученной модели.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальное уравнение, динамика, маятник, движение, датчик, неровность пути, вибрация, конечно-элементное имитационное моделирование

Введение. Маятниковые датчики уровня железнодорожного пути широко применяются в системах управления выправочных машин. Базовой линией в таких приборах является вертикаль физического маятника, совпадающая с направлением ускорения свободного падения. Неровности пути воздействуют на корпус прибора, установленного на машине, их измерение осуществляется относительно вертикали маятника путем измерения угловых рассогласований между корпусом и маятником [1]. В случае если маятник по тем или иным причинам отклоняется от вертикали, возникает ложный угол φ , который представляет собой погрешность измерения отклонения рельсов по уровню. Причины, приводящие к возникновению ложного угла наклона, могут быть разные: неточность изготовления деталей прибора измерения уровня, неточность сборки прибора [2], ложные перемещения деталей вследствие неравенства температурных коэффициентов расширения материалов корпуса прибора, подвеса и самого маятника (более характерно для микромеханических приборов) [3] и др. Среди таких причин также можно выделить отдельную группу, а именно свойства динамики маятникового чувствительного элемента, которые проявляются в возникновении ложного угла поворота маятника прибора относительно вертикали вследствие воздействия на маятник переносных ускорений. Переносные ускорения могут быть вызваны временным изменением неровности при движении машины с установленным на ней прибором по участку пути, а также воздействием вибраций, создаваемых рабочими органами машины. Например, при выправке железнодорожного пути частота изменения измеряемых неровностей при максимальной производительности путевой машины не превышает 1 Гц, а частота вибраций для различных машин составляет от 33 до 45 Гц [4]. Такие погрешности приборов являются динамическими и зависят от параметров маятника, а также амплитуды и частоты измеряемых неровностей и воздействующих ускорений. Следует отметить, что с ростом допустимой скорости движения пассажирских и грузовых поездов повышаются требования к величине неровностей пути, а следовательно, и качеству работы выправочных механизмов, которое зависит от точности приборов измерения уровня пути, встраиваемых в контур автоматики этих механизмов. Этим обуславливается и повышение требований к точности контрольно-измерительных приборов уровня пути.

Для обеспечения требуемой точности динамических измерений неровностей при строительстве и ремонте перспективных высокоскоростных магистралей необходимо иметь более точное математическое описание динамики чувствительного элемента таких приборов в целях оптимизации конструкции маятника, что позволит уменьшить динамическую погрешность прибора.

На сегодняшний день известен ряд моделей динамики чувствительного элемента маятниковых приборов [4—6]. Однако главный недостаток этих моделей заключается в том, что они разработаны для маятников, конструкция которых близка к математическому маятнику, т.е. считается, что масса механического маятникового элемента сосредоточена в одной точке, маятник при этом характеризуется массой и плечом, а масса и геометрические параметры остальной части маятника практически не оказывают влияния на его динамику. В работе [7] учтено влияние демпфирующей среды, в которую погружен маятниковый элемент, на массоинерционные свойства маятника, однако модель самого механического маятника по-прежнему считается близкой к модели математического маятника. Результаты конечно-элементного имитационного моделирования таких маятников показали, что значения частоты собственных колебаний, вычисленные в соответствии с известными моделями, существенно отличаются от результатов имитационного моделирования. Кроме того, в известных работах, при определении начальных условий дифференциального уравнения, начальная скорость центра масс считалась никак не связанной с начальной скоростью прибора, что также плохо согласуется с результатами имитационного моделирования. Это затрудняет описание собственных колебаний маятника при возникновении входного воздействия на прибор, что не позволяет оценить погрешность, обусловленную собственными колебаниями. Таким образом, возникает задача разработки более корректной математической модели динамики чувствительного элемента физического маятника, применяемого в датчиках уровня железнодорожного пути, работающих в динамическом режиме.

Вывод уравнения динамики маятникового чувствительного элемента. Для решения поставленной задачи рассмотрим систему, состоящую из корпуса прибора 1, в котором на оси 3 подвешен маятниковый чувствительный элемент 2, который может свободно вращаться относительно оси подвеса (рис. 1).

В системе координат $Oxyz$ ось Ox совпадает с направлением движения платформы, на которую установлен прибор, и лежит в плоскости горизонта, ось Oz перпендикулярна оси Ox и также лежит в плоскости горизонта, ось Oy перпендикулярна двум указанным осям и лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости горизонта.

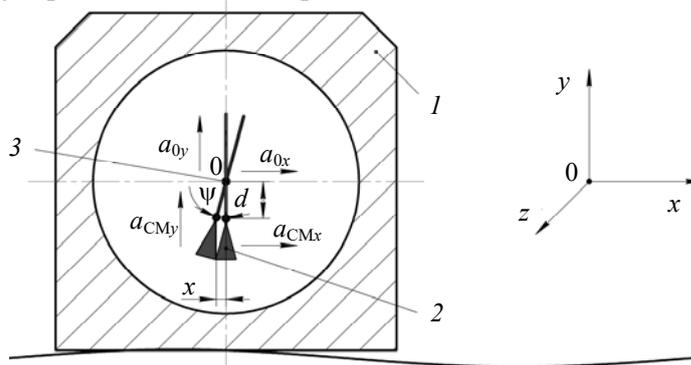


Рис. 1

На корпус прибора и, следовательно, на ось подвеса маятникового чувствительного элемента при прохождении платформой неровностей пути действуют виброускорения [4, 8]:

$$\left. \begin{aligned} a_{0x} &= \ddot{x}_H; \\ a_{0y} &= \ddot{y}_H; \\ a_{0z} &= \ddot{z}_H, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где x_H и z_H — неровности пути в продольном профиле, y_H — неровности пути в поперечном профиле.

При воздействии указанных ускорений (1) на ось подвеса маятника появляются компоненты ускорения его центра масс (СМ), которые в системе координат $Oxyz$ равны $a_{СМx}$, $a_{СMy}$, $a_{СМz}$. Будем считать ось подвеса близкой к идеальной, т.е. маятник имеет только вращательную степень свободы вокруг оси Oz . Такая ось подвеса может быть реализована в виде оси, размещенной на специальных опорах с малыми трением и люфтом. В этом случае можно считать $a_{СМz} = a_{0z}$, следовательно, неровности пути в плане практически не будут оказывать влияния на погрешность прибора.

Используя принцип Даламбера [9], найдем уравнение вынужденных колебаний маятника в угловых координатах:

$$J\ddot{\psi} = mda_{0x} \cos \psi - mda_{0y} \sin \psi - c\dot{\psi} - mgd\psi, \quad (2)$$

где J — момент инерции маятникового чувствительного элемента относительно оси подвеса, равный сумме момента инерции самого механического маятника и присоединенного момента инерции демпфирующей среды, окружающей механический маятник [10]; ψ — угол отклонения маятника от вертикали, равный погрешности измерения; m — масса маятникового чувствительного элемента; d — расстояние между осью подвеса и центром масс маятника; c — абсолютный коэффициент демпфирования; g — ускорение свободного падения.

Угол ψ отклонения маятника от вертикали в произвольный момент времени может быть, с учетом рис. 2, выражен через линейные координаты оси подвеса и центра масс маятника, а также смещение центра масс относительно оси подвеса.

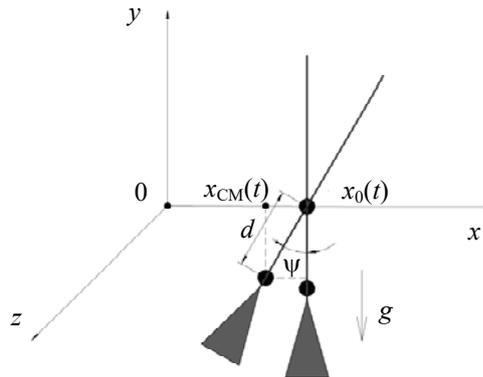


Рис. 2

Отклонение маятника от вертикали составляет

$$\psi(t) = \arcsin \left(\frac{x_0(t) - x_{CM}(t)}{d} \right), \quad (3)$$

где $x_0(t)$ — линейная координата оси подвеса по оси Ox в момент времени t , для которого определяется угол ψ ; $x_{CM}(t)$ — линейная координата центра масс маятника по оси Ox в момент времени t .

Для малых значений угла его синус можно приблизительно принять равным углу, поэтому с учетом того, что неровность пути не превышает 1° , а на поворотах — 8° , будем считать, что

$$\psi(t) = \frac{x_0(t) - x_{CM}(t)}{d}. \quad (4)$$

С учетом (4), а также допуская, что $\cos \psi \approx 1$ и $\sin \psi \approx \psi$, уравнение (2) может быть представлено в следующем виде:

$$J(\ddot{x}_0 - \ddot{x}_{\text{CM}}) + c(\dot{x}_0 - \dot{x}_{\text{CM}}) + mgd(x_0 - x_{\text{CM}}) = md^2 a_{0x} - md(x_0 - x_{\text{CM}}) a_{0y}. \quad (5)$$

В начальный момент времени выполняются условия

$$\left. \begin{aligned} \psi(0) &= 0, \\ J\ddot{\psi} &= mda_{0x}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Учитывая, что $\ddot{\psi} = \frac{a_{0x} - a_{\text{CM}x}}{d}$, условия (6) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0; \\ a_{\text{CM}x} &= a_{0x}(1 - \mu), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $\mu = \frac{md^2}{J}$ — коэффициент, учитывающий параметры конструкции маятника: массу, плечо и момент инерции относительно оси подвеса.

В начальный момент времени бесконечно малому приращению времени Δt соответствует бесконечно малое приращение скорости центра масс маятника $v_{\text{CM}x} = a_{\text{CM}x} \Delta t$, поэтому начальные условия дифференциального уравнения (6) с учетом (7) можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0; \\ v_{\text{CM}x} &= v_{0x}(1 - \mu), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $v_{0x} = x_0'$ — виброскорость прибора по оси $0x$ в начальный момент времени.

Линейная координата центра масс маятника может быть связана с координатой оси подвеса выражением

$$x_{\text{CM}}(t) = x_0(t) - X(t), \quad (9)$$

где $X(t)$ — линейное смещение центра масс маятника прибора относительно вертикали.

Тогда уравнение движения маятникового чувствительного элемента датчика уровня железнодорожного пути может быть упрощено к виду

$$J\ddot{X} + c\dot{X} + mgdX = md^2 a_{0x} - mdXa_{0y}. \quad (10)$$

Начальные условия уравнения (10) могут быть получены из начальных условий (8):

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= 0, \\ \dot{X} &= v_{0x}\mu. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Решение уравнения динамики маятникового чувствительного элемента. Рассмотрим вначале решение уравнения (10) с начальными условиями (11) для одномерного случая, когда виброускорение, вызванное временным изменением неровности, т.е. обусловленное движением измерительного прибора по участку пути с периодической неровностью, действует только в направлении $0x$ ($a_{0y} = 0$):

$$\ddot{X}_H = -Aw^2 \sin(wt),$$

где A — амплитуда неровности вдоль направления $0x$; w — частота изменения неровности вдоль направления $0x$.

Для указанного случая решение уравнения (10) может быть представлено в виде суммы четырех слагаемых:

$$\begin{aligned}
 X_1(t) &= A\mu w \cdot \frac{w(w^2 - \Omega^2)}{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2 w^2} \sin(wt); \\
 X_2(t) &= 2A\mu\xi w \frac{w^2 \Omega}{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2 w^2} \cos(wt); \\
 X_3(t) &= -A \frac{\mu}{\sqrt{1-\xi^2}} w \frac{\Omega w^2 (1-\xi^2) - \Omega^3}{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2 w^2} e^{-\xi\Omega t} \sin(\Omega\sqrt{1-\xi^2}t); \\
 X_4(t) &= -2A\mu\xi w \frac{w^2 \Omega}{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2 w^2} e^{-\xi\Omega t} \cos(\Omega\sqrt{1-\xi^2}t),
 \end{aligned}$$

где $\Omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}$ — собственная частота маятника относительно оси подвеса; $\xi = \frac{c}{2J\Omega}$ — относительный коэффициент демпфирования.

Результирующее отклонение маятника относительно вертикали равно

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) + X_4(t).$$

Спустя время $\tau \geq 3/\Omega\xi$ после появления входного воздействия, можно считать, что собственные колебания практически полностью затухают и остаются только вынужденные, а колебания маятника описываются только вынужденными составляющими решения $X_1(t)$ и $X_2(t)$. Поскольку эти составляющие имеют одну частоту, то их сумма может быть представлена в виде одной функции вынужденных колебаний маятника:

$$X_B(t) = X_1(t) + X_2(t) = X_m \sin(\omega t + \gamma),$$

где X_m — амплитуда отклонений маятника относительно положения равновесия; γ — фаза функции колебаний маятника относительно функции входного воздействия (временной функции изменения неровности пути).

Будем считать угол поворота датчика по часовой стрелке положительным. Поскольку подсистема съема информации генерирует сигнал, пропорциональный разности угла поворота прибора и угла поворота маятника относительно вертикали, то поворот маятника по часовой стрелке приводит к уменьшению выходного сигнала датчика. Таким образом, временная зависимость $\varphi(t)$ погрешности прибора, вызванной отклонением маятникового чувствительного элемента от вертикали, может быть определена выражением

$$\varphi(t) = -\psi(t) = -\frac{X(t)}{d} \frac{180}{\pi}.$$

Временные зависимости угла отклонения маятника прибора от вертикали, полученные на основе аналитического и численного решений уравнения (10) для прибора с параметрами маятника $J = 2,04 \cdot 10^{-6}$ кг·м², $m = 3 \cdot 10^{-2}$ кг, $d = 3,73 \cdot 10^{-3}$ м, $\Omega = 23,2$ рад, $\xi = 0,32$ и параметрами одномерной вибрации $A = 0,092$ мм, $f = 37$ Гц, представлены на рис. 3, а, а для прибора с теми же параметрами маятника, но с коэффициентом $\xi = 0,01$ и параметрами одномерной

вибрации $A = 0,18$ мм, $f = 1,5$ Гц — на рис. 3, б (здесь — — аналитическая зависимость, \dots — численное решение).

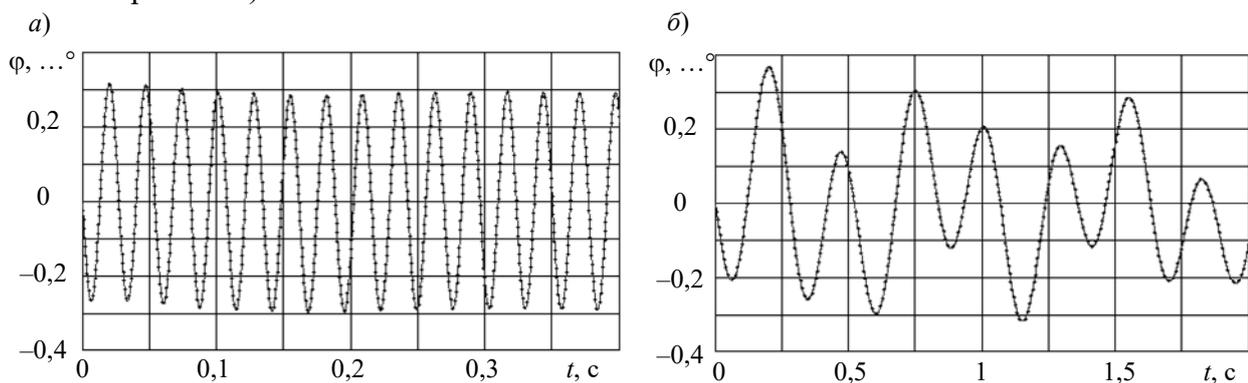


Рис. 3

С целью верификации полученной модели был проведен анализ динамики маятникового чувствительного элемента в системе конечно-элементного имитационного моделирования. Результаты моделирования и расчетов по аналитической зависимости представлены на рис. 4: а — $v_{0x} = 0,03$ м/с, $\xi = 0,3$; б — $v_{0x} = 0,0028 \cos(2\pi \cdot 0,75t)$ м/с, $\xi = 0,3$; в — $v_{0x} = 0,021 \cos(2\pi \cdot 37t)$ м/с, $\xi = 0,02$; г — $v_{0x} = 0,021 \cos(2\pi \cdot 37t)$ м/с, $\xi = 0,3$ (здесь — — аналитическая зависимость, \dots — результат конечно-элементного моделирования).

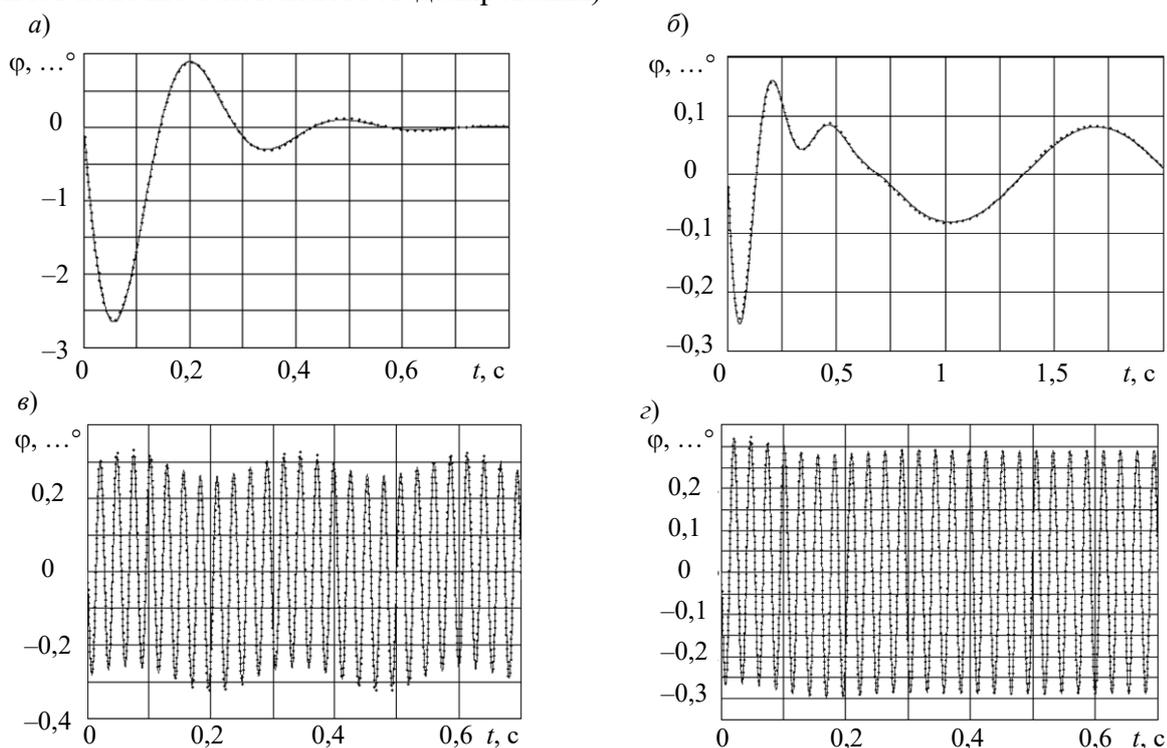


Рис. 4

Представленные графики показывают хорошую сходимость результатов аналитического решения уравнения динамики маятника и имитационного моделирования его движения под действием перемещений, действующих на корпус прибора. Отклонение расчетной собственной частоты от полученной в результате моделирования не превышает 0,01 Гц, расхождение по амплитуде не превышает 1 %. Также можно сделать вывод, что если скорость прибора постоянна во времени ($v_{0x}(t) = \text{const}$), то имеют место лишь свободные колебания маятника, возникающие при выводе прибора из состояния покоя, которые затем затухают. Параметры

свободных колебаний (амплитуда и частота) при этом полностью согласуются с уравнением (10) и начальными условиями (11).

Для случая двумерной вибрации уравнение (10) также может быть решено численно. При указанных выше параметрах маятника временная зависимость отклонения его от вертикали для двумерной вибрации с параметрами $A=0,092$ мм, $f=37$ Гц представлена на рис. 5, а, а с параметрами $A=0,092$ мм, $f=1,5$ Гц — на рис. 5, б; $\xi=0,32$ в обоих случаях (здесь — — одномерная вибрация, \cdots — двумерная вибрация).

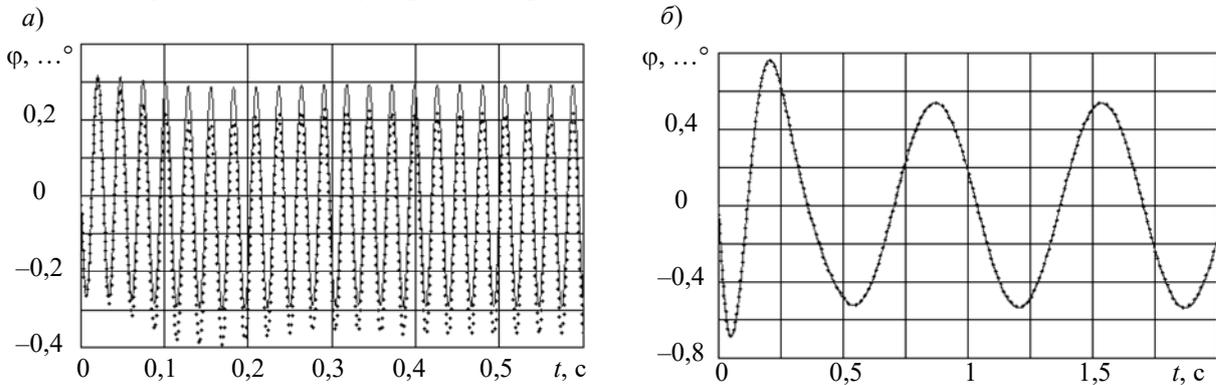


Рис. 5

Анализ приведенных зависимостей показывает, что высокочастотная двумерная вибрация приводит к погрешности, проявляющейся в смещении нуля маятникового прибора, и необходимо принимать меры по ее уменьшению.

Заключение. Полученное дифференциальное уравнение динамики, а также выражения для начальных условий позволяют описывать входное воздействие и отклик на него маятникового чувствительного элемента датчика уровня в одних (линейных) переменных, а также при необходимости переходить к угловым величинам. Также полученное уравнение динамики маятника позволяет описывать единым образом динамическую погрешность прибора, обусловленную изменением измеряемой величины во времени и вибрациями, вызванными другими причинами, и оценивать результирующую погрешность. Получено обобщенное уравнение, позволяющее описывать динамику маятника прибора в условиях двумерной вибрации, получено аналитическое решение уравнения для случая продольных неровностей и вибраций, проанализировано численное решение для случая двумерных неровностей и вибраций. Представлены результаты имитационного моделирования движения маятникового чувствительного элемента прибора при воздействии неровности пути на его корпус, подтверждающие корректность разработанной модели и полученных решений для случая одномерной вибрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Распопов В. Я., Иванов Ю. В., Зотов С. А. Датчики уровня систем управления выправочных железнодорожных машин // Датчики и системы. 1999. № 4. С. 40—43.
2. Есипов В. Н., Есипов А. В. Метрологические характеристики гидроакустических датчиков негоризонтальности // Датчики и системы. 2003. № 5. С. 27—30.
3. ADXL103/ADXL203 Precision ± 1.7 g Single/Dual Axis Accelerometer [Электронный ресурс]: <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXL103_203.pdf>, 01.07.2019.
4. Распопов В. Я., Иванов Ю. В. Датчики уровня систем управления железнодорожных машин. Тула: Тул. гос. ун-т, 2000.
5. Есипов В. Н., Есипов А. В. Математическое моделирование гидроакустических датчиков негоризонтальности // Датчики и системы. 2004. № 1. С. 15—17.
6. Analysis of MEMS accelerometer for optimized sensitivity / K. N. Khamil, K. S. Leong, N. B. Mohamad, N. Soin, N. Saba // Intern. Journal of Engineering and Technology (IJET). 2015. Vol. 6, N 6. P. 2705—2711.

7. Незнанов А. И., Есипов В. Н. Динамические характеристики гидроакустического датчика неровности железнодорожного пути с маятниковым механическим чувствительным элементом // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2015. № 3. С. 112—116.
8. Grassie S. L. Measurement of railhead longitudinal profiles: a comparison of different techniques // *Wear*. 1996. Vol. 191, iss. 1—2. P. 245—251.
9. Анпель П. Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика: Пер. с франц. М.: Физматгиз, 1960.
10. Незнанов А. И., Есипов В. Н. Методика определения параметров движения маятникового элемента датчика уровня железнодорожного пути, обусловленных влиянием жидкости // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2018. № 5. С. 123—129.

Сведения об авторах

Александр Иванович Незнанов

— канд. техн. наук; Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, кафедра приборостроения, метрологии и сертификации; ст. преподаватель;
E-mail: orelkir18@gmail.com

Константин Валентинович Подмастерьев

— д-р. техн. наук, профессор; Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, институт приборостроения, автоматизации и информационных технологий; директор; E-mail: asms-orel@mail.ru

Поступила в редакцию
20.04.2020 г.

Ссылка для цитирования: Незнанов А. И., Подмастерьев К. В. Математическая модель динамики маятникового чувствительного элемента датчика уровня железнодорожного пути // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2020. Т. 63, № 7. С. 611—619.

MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF THE PENDULUM SENSING ELEMENT OF THE RAILWAY TRACK LEVEL DETECTOR

A. I. Neznanov, K. V. Podmaster'ev

I.S. Turgenev Orel State University, 302026, Orel, Russia
E-mail: orelkir18@gmail.com

The dynamics of the pendulum sensitive element of the railway track level detector mounted on a moving platform is considered. A differential equation is derived to describe the element dynamics under the effect of the track roughness as well as vibration, expressions for initial conditions are defined. An analytical solution is obtained for the equation of the pendulum dynamics in the case of one-dimensional vibrations along the horizontal axis. The equation for two-dimensional vibrations is solved numerically. Presented results of analytical calculations and simulation using the finite element method confirm the developed model adequacy.

Keywords: mathematical model, differential equation, dynamics, pendulum, motion, sensor, rail track roughness, vibration, finite element simulation

REFERENCES

1. Raspopov V.Ya., Ivanov Yu.V., Zotov S.A. *Datchiki & Systemi* (Sensors & Systems), 1999, no. 4, pp. 40—43. (in Russ.)
2. Esipov V.N., Esipov A.V. *Datchiki & Systemi* (Sensors & Systems), 2003, no. 5, pp. 27—30. (in Russ.)
3. https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXL103_203.pdf. (in Russ.)
4. Raspopov V.Ya., Ivanov Yu.V. *Datchiki urovnya sistem upravleniya zheleznodorozhnykh mashin* (Level Sensors for Control Systems of Railway Vehicles), Tula, 2000. (in Russ.)
5. Esipov V.N., Esipov A.V. *Datchiki & Systemi* (Sensors & Systems), 2004, no. 1, pp. 15—17. (in Russ.)
6. Khamil K.N., Leong K.S., Mohamad N.B., Soin N., Saba N. *International Journal of Engineering and Technology (IJET)*, 2015, no. 6(6), pp. 2705—2711.
7. Neznanov A.I., Esipov V.N. *Fundamental and Applied Problems of Technics and Technology*, 2015, no. 3, pp. 112—116. (in Russ.)
8. Grassie S.L. *Wear*, 1996, no. 1—2(191), pp. 245—251.
9. Appell P.E. *Traité de mécanique rationnelle*, 1904, Tome II, 562 p.

10. Neznanov A.I., Esipov V.N. *Fundamental and Applied Problems of Technics and Technology*, 2018, no. 5, pp. 123–129. (in Russ.)

Alexander I. Neznanov

Konstantin V. Podmaster'yev

Data on authors

- PhD; I.S. Turgenev Orel State University, Department of Instrument Engineering, Metrology and Certification; Senior Lecturer; E-mail: orelkir18@gmail.com
- Dr. Sci., Professor, I.S. Turgenev Orel State University, Institute of Instrument Engineering, Automation and Information Technologies; Director of the Institute; E-mail: asms-orel@mail.ru

For citation: Neznanov A. I., Podmaster'ev K. V. Mathematical model of dynamics of the pendulum sensing element of the railway track level detector. *Journal of Instrument Engineering*. 2020. Vol. 63, N 7. P. 611—619 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2020-63-7-611-619