

МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНО-ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТОПЫ  
С ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭРМИТА

В. М. МУСАЛИМОВ<sup>1\*</sup>, М. А. ЕРОФЕЕВ<sup>1</sup>, Ю. С. МОНАХОВ<sup>2</sup>, М. С. МАЛОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия  
\*musvm@yandex.ru

<sup>2</sup>Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

**Аннотация.** Исследован ряд основных механизмов формирования реакции опорной поверхности при ходьбе человека. В качестве методологии использовались биомеханический анализ движений с учетом фаз движений стопы. Предложен принципиально новый подход к построению моделей трения стопы с использованием функций Эрмита, позволивший учесть ударные импульсы сил трения и нормального давления для оценок коэффициентов трения скольжения и вращения системы „стопа—опорная поверхность“. Практическая значимость работы определяется ценностью развития экспериментально-аналитических подходов к задачам модернизации ортопедических изделий нижних конечностей (протезов, ортезов, ортопедической обуви и стелек) и их функциональных элементов.

**Ключевые слова:** биомеханический анализ движений, ударно-фрикционное взаимодействие стопы, функция Эрмита, гипотеза Рауса, коэффициенты трения скольжения, коэффициенты трения вращения

**Ссылка для цитирования:** Мусалимов В. М., Ерофеев М. А., Монахов Ю. С., Малов М. С. Моделирование ударно-фрикционного взаимодействия стопы с опорной поверхностью с использованием базиса обобщенных функций Эрмита // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 8. С. 652—659. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-8-652-659.

MODELING SHOCK-FRICTION INTERACTION  
OF THE FOOT WITH THE SUPPORTING SURFACE USING THE BASIS  
OF GENERALIZED HERMITE FUNCTIONS

V. M. Musalimov<sup>1\*</sup>, M. A. Erofeev<sup>1</sup>, Yu. S. Monakhov<sup>2</sup>, M. S. Malov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, St. Petersburg, Russia  
musvm@yandex.ru

<sup>2</sup>ITMO University, St. Petersburg, Russia

**Abstract.** A number of basic mechanisms of formation of the reaction of the supporting surface during human walking are studied. As a methodology, biomechanical analysis of movements is used with the account for the phases of foot movements. A fundamentally new approach to the construction of foot friction models using the Hermite functions is proposed, which enables accounting for the shock impulses of the friction forces and normal pressure for estimating the sliding and spinning friction coefficients of the “foot–support surface” system. The work practical significance is determined by the value of developing experimental and analytical approaches to the problems of modernizing lower limb orthopedic products (prostheses, orthoses, orthopedic shoes and insoles) and their functional elements.

**Keywords:** biomechanical analysis of movement, impact-friction foot-ground interaction, Hermite function, Routh hypothesis, gliding-friction coefficients, friction-rotation coefficients

**For citation:** Musalimov V. M., Erofeev M. A., Monakhov Yu. S., Malov M. S. Modeling shock-friction interaction of the foot with the supporting surface using the basis of generalized Hermite functions. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 8. P. 652—659 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-8-652-659.

**Введение.** При проведении реабилитационных процедур возникает необходимость в управлении медиальным поворотным движением ортезов [1, 2], однако исследованию механики ротационного контакта пятки и носка стопы ранее не уделялось должного внимания. В настоящей статье рассматривается механика ударно-фрикционного взаимодействия пятки и носка стопы с опорной поверхностью, которое описывается финитными функциями Эрмита. При этом справедлива гипотеза Рауса: ударный импульс силы трения связан с ударным импульсом нормальной силы по закону Кулона.

Таким образом, при анализе и обработке экспериментальных данных авторы использовали функции Эрмита [3—5] и подходы Рауса [6] к оценке коэффициентов трения скольжения и верчения пятки/носка с учетом ударных импульсов сил трения скольжения/верчения и ударных импульсов нормального давления. Отметим, что функции Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье [7, 8], а разложение по функциям Эрмита также называют рядами Грам—Чарли [9—11].

**Организация эксперимента.** В настоящей работе использованы данные экспериментального исследования кинематики и динамики голеностопного сустава. В эксперименте принимали участие женщины и мужчины без явных нарушений здоровья, без каких-либо травм и хирургических болезней, не являющиеся профессиональными спортсменами. Перед проведением испытаний на динамометрической платформе и кинематических исследований в оптической маркерной системе с каждого испытуемого снимались антропометрические показатели, необходимые в последующих расчетах. Основные параметры: рост, вес, длина бедра, голени, ширина таза и высота тазовых костей, диаметр колен и голени. На динамометрической платформе, включающей систему из сенсоров (четыре датчика на квадратный сантиметр), равномерно распределенных по площади платформы, регистрировались распределения давления на стопу. Испытания проводились на базе лаборатории кинезиологии и биомеханики Тартуского университета (Эстония) для двух темпов ходьбы: нормального и быстрого. Каждый проход повторялся по три раза. Были построены коррелирующие с циклом шага графики реакции опоры: силы на пятке, медиально-латеральной силы, силы в вертикальном направлении.

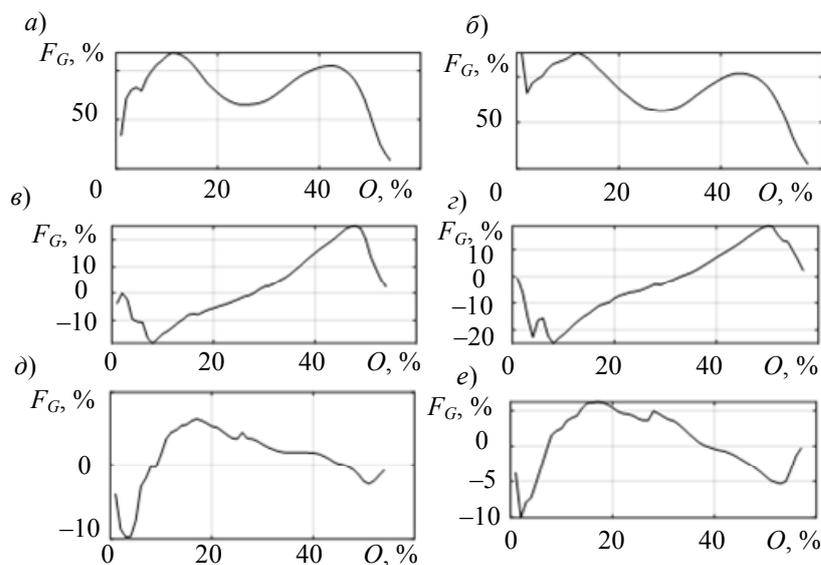


Рис. 1

На рис. 1 представлены экспериментальные данные о составляющих опорных реакций стопы. Отметим, что по оси ординат отложены доли цикла шага  $F_G$  (в случае необходимости можно перейти к пространственному или временному пересчету показателей оси). На оси абсцисс (стандартный формат представления данных) отложен цикл шага  $O$ , выраженный в процентах. Данные контакта стопы с динамометрической платформой являются основой для диагностики и базой при построении моделей. Конкретный вид этих зависимостей имеет достаточно устойчивый характер [12—15].

*Вертикальная составляющая опорных реакций стопы* представлена на рис. 1, *a* — для левой и *б* — для правой ноги. Отметим характерные особенности взаимодействия, согласно [12—15]: оно описывается двугорбой кривой с двумя максимумами и одним минимумом. Оба максимума и минимум приходятся на период одиночного ударного контакта стопы с опорной поверхностью. Минимум вертикальной составляющей реакции опоры приходится точно между фазами подъема и падения, что соответствует  $F_G = 77—80$  %. Величина максимального экстремума вертикальной составляющей опорной реакции стопы (максимума подъема или падения) имеет особое название — динамическая опороспособность конечности. При этом динамическая опороспособность конечности определяется по тому из двух экстремумов, который имеет большее значение в периоде опоры.

*Продольная составляющая опорной реакции стопы* представлена на рис. 1, *в* и *г*. В первой половине периода одиночного ударного контакта стопы с опорной поверхностью вектор силы, приложенной к опоре со стороны конечности, сонаправлен с направлением движения (а вектор реакции опоры направлен в противоположную сторону). В конце периода сила имеет обратное направление, а реакция опоры соответствует направлению движения. Поскольку направление вектора силы меняется на противоположное, то как раз в середине периода одиночного ударного контакта стопы с опорной поверхностью продольная составляющая реакции опоры проходит через нулевое значение. Данная кривая имеет два главных пика. Первый из них отрицательный, второй имеет место при  $F_G = 19—20$  %. Первый максимум продольной составляющей опорной реакции стопы приходится на конец первого периода двойного ударного контакта стопы с опорной поверхностью — это максимум торможения. Второй максимум продольной составляющей реакции опоры имеет место в начале второго периода двойной опоры — это максимум ускорения или отталкивания.

*Поперечная составляющая опорной реакции стопы* (рис. 1, *д*, *е*) — это наименьшая по амплитуде составляющая реакции опоры. Для периода одиночного ударного контакта стопы с опорной поверхностью характерны два экстремума с амплитудой  $F_G = 4—5$  и  $3—4$  %.

Работы [12—15] позволяют уточнить характер взаимодействия стопы с опорной поверхностью как ударный с учетом малого периода фаз контакта стопы с опорной поверхностью. Для этого выделяются критические точки составляющей опорной реакции стопы, которые совпадают с точками пиков продольных реакций. А это означает, что критическая точка характерна для пары сил в опорной плоскости, которая реализует процесс трения верчения.

В задачу исследования входили анализ изменений сил трения скольжения и сил трения верчения-скольжения за цикл шага, а также сопоставление их отношений.

**Анализ ударно-фрикционного взаимодействия стопы с опорной поверхностью.** Перейдем к анализу данных с помощью локализованных на конечных отрезках функций Эрмита. При этом локализацию будем согласовывать с реальными отрезками контакта пятки и носка. Отметим, что эти функции ортогональны и нормированы на всей прямой. Каждая из функций (рис. 2) определяет характер фрикционного взаимодействия:  $\Phi_0(x)$  локально характеризует как трение скольжения, так и нормальную реакцию, а  $\Phi_1(x)$  — трение верчения. Вычисленные импульсы реактивных сил позволяют связать коэффициенты трения скольжения с коэффициентами трения верчения систем „пятка/носок—опорная плоскость“.

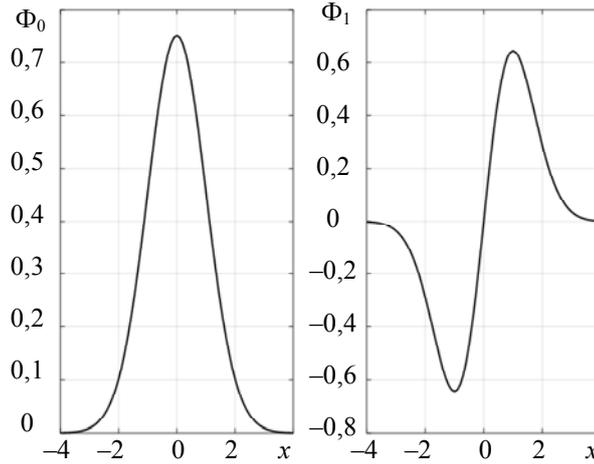


Рис. 2

Функции Эрмита могут быть представлены с помощью рекуррентных соотношений [3]:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad \Phi_1(x) = x \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right); \quad (1)$$

$$\Phi_n(x) = x \sqrt{\frac{2}{n}} \Phi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \Phi_{n-2}(x), \quad n \geq 2.$$

**Трение верчения.** Во время ходьбы формируются ударные моменты пар сил трения на пятках и носках, которые будем моделировать обобщенными функциями Эрмита, построенными на базе функций (1):

$$E_0(x) = h_0 \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{D}\right), \quad E_1(x) = h_1(x-m) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{D}\right), \quad (2)$$

где  $h_0 = \frac{C_0}{\sqrt{2\pi D}}$ ,  $h_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2\pi D}}$ ;  $C, m, D$  — числовые параметры.

Введем обозначения:  $F_h, F_t$  — экспериментально получаемые данные для фаз „пятка—носок“ шага. Далее осуществим аппроксимацию этих данных обобщенными функциями Эрмита  $E_1$ . Так как эта функция нечетна, импульсы поперечных сил будем вычислять, принимая пределы интегрирования на полусегменте носителя финитной функции Эрмита  $E_1$ :

$$0,5(t_2 - t_1) = t_m, \quad (3)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_m} E_1 dt$$

Соответственно моменты пар ударных импульсов (кинетических моментов) составят:

$$L = lS, \quad (4)$$

$l$  — плечо.

Далее на полном сегменте вычисляется ударный импульс нормальной реакции

$$S_N = \int_{t_1}^{t_2} E_0 dt, \quad (5)$$

после чего по определению вычисляется коэффициент трения верчения, имеющий размерность [м]:

$$f_q = \frac{L}{S_N} = \frac{S}{S_N} l. \quad (6)$$

Здесь безразмерный сомножитель определяет трение скольжения при верчении, связывая таким образом модели трения скольжения и верчения. Отметим отличие предложенного подхода от подхода к моделированию связанных моделей Галина и Герца в работах [16, 17]. При анализе ходьбы используются экспериментальные данные с распределением контактных сил реакций, ха-

рактерных для финитных функций, являющимся особенностью ударно-фрикционного взаимодействия стопы с опорной поверхностью. Поэтому авторы остановили выбор при моделировании на функциях Эрмита. Вычисленные импульсы реактивных сил для случая ударного контакта пятки с опорной поверхностью обозначим  $S_h$ , а ударного контакта носка с опорной поверхностью —  $S_t$ . При этом коэффициенты трения скольжения при верчении определяются так:

— коэффициент трения поперечного скольжения системы „пятка—поверхность“

$$\eta = \frac{S_h}{S_N}; \quad (7)$$

— коэффициент трения поперечного скольжения системы „носок—поверхность“

$$\tau = \frac{S_t}{S_N}. \quad (8)$$

**Трение скольжения.** Для моделирования трения продольного скольжения воспользуемся четной функцией  $E_0$ . При этом при расчете импульсов пределы интегрирования будут определяться разными значениями  $t \in [t_1, t_2]$  для случая ударного контакта пятки с опорной поверхностью  $S_1$  и ударного контакта носка с опорной поверхностью  $S_2$ . Обозначим общий случай как

$$S_f = \int_{t_1}^{t_2} E_{0f} dt, \quad (9)$$

где  $E_{0f}$  — функция Эрмита, используемая для моделирования трения продольного скольжения. Далее вычисляется коэффициент продольного трения скольжения:

$$f = \frac{S_f}{S_N}. \quad (10)$$

**Примеры расчета и обсуждение результатов.** В примере использованы данные (табл. 1):  $r$  — длина стопы;  $v$  — скорость движения испытуемого;  $s$  — длина шага;  $t$  — время цикла шага. Величина  $t$  позволяет от меры цикла шага переходить к мере времени. Так, например, для левой ноги доле цикла шага соответствует величина, равная отношению  $t=0,49/100$ , а для правой ноги эта мера равна отношению  $t = 0,44/100$ .

Таблица 1

Нога	$r$ , м	$v$ , м/с	$s$ , м	$t$ , с
Левая	0,2	1,38	0,68	0,49
Правая	0,2	1,45	0,65	0,44

И далее будут использоваться индексы 1 и 2 для параметров обобщенных функций Эрмита и вычисляемых механических характеристик: 1 соответствует пятке, а 2 — носку. Так, на сегменте  $[0, 20]$  обобщенную функцию Эрмита  $E_1$  с параметрами  $[m_{q1}, D_{q1}, C_{q1}, S_{q1}]$  обозначим как  $f_{q1}$ ; а на сегменте  $[40, 54]$  обобщенную функцию Эрмита  $E_1$  с параметрами  $[m_{q2}, D_{q2}, C_{q2}, S_{q2}]$  — как  $f_{q2}$ . При расчете параметров обобщенной функции Эрмита  $E_0$  используется индекс  $f$  для характеристики продольной силы трения и  $v$  — для характеристики нормальной силы. Вычисленные при аппроксимации на Matlab значения этих параметров представлены в табл. 2 ( $m$  — значения критических точек (согласно [18], это матожидание),  $D$  — дисперсия распределения).

Таблица 2

Процесс	$m$ , м	$D$ , м <sup>2</sup>	$C$ , %	$S$ , %
Верчение	$m_{q1} = 9,01$	$D_{q1} = 64$	$C_{q1} = 3$	$S_{q1} = 71,21$
	$m_{q2} = 45,51$	$D_{q2} = 64$	$C_{q2} = 0,7$	$S_{q2} = 15,95$
Скольжение	$m_{f1} = 8,22$	$D_{f1} = 4,5$	$C_{f1} = 16,03$	$S_{f1} = 257,42$
	$m_{f2} = 45,20$	$D_{f2} = 8,3$	$C_{f2} = 23,5$	$S_{f2} = 299,46$
Давление	$m_{v1} = 14,12$	$D_{v1} = 13,87$	$C_{v1} = 106,8$	$S_{v1} = 1666,22$
	$m_{v2} = 42,61$	$D_{v2} = 12,78$	$C_{v2} = 108,3$	$S_{v2} = 1361,23$

Для каждой из троек критических точек имеем:

— для пятки

$$m_{q1} = m_{f1} = m_{v1} \quad (11)$$

— для носка

$$m_{q2} = m_{f2} = m_{v2} \quad (12)$$

потому что эти точки определяют критические значения как данных эксперимента, так и обобщенных функций Эрмита. Их различие в эксперименте говорит о недостатках программного обеспечения динамометрических платформ. Для представленных на рис. 1 экспериментальных данных по формулам (7), (8), (10) рассчитаны коэффициенты трения: поперечное скольжение — пятка  $\eta = 0,0427$ , носок  $\tau = 0,0111$ ; продольное скольжение — пятка  $f_1 = 0,1545$ , носок  $f_2 = 0,2202$ . Заметно отличие коэффициентов трения скольжения при поперечном скольжении от продольного. Это наблюдение является общим для процесса ходьбы. Именно в силу этого при моделировании ходьбы не следует пренебрегать поперечной составляющей трения скольжения, потому что она естественно характеризует процесс трения вращения и с необходимостью приводит к построению уравнения для кинетического момента:

$$L = J\omega, \quad (13)$$

где  $J$  — момент инерции стопы относительно оси [19],  $\omega$  — псевдовектор угловой скорости, который с учетом (4) может быть вычислен следующим образом:

$$\omega = \frac{IS}{J}. \quad (14)$$

На рис. 3 и 4 представлены экспериментальные графики ударно-фрикционного взаимодействия систем „пятка—опорная поверхность“  $F_h$  и „носок—опорная поверхность“  $F_t$ , сопоставленные с функциями Эрмита  $E_1$ .

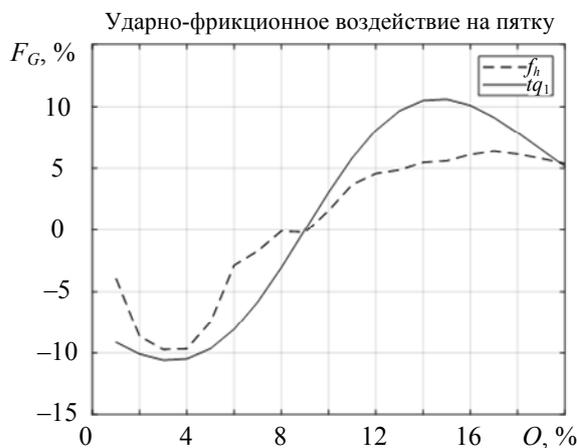


Рис. 3

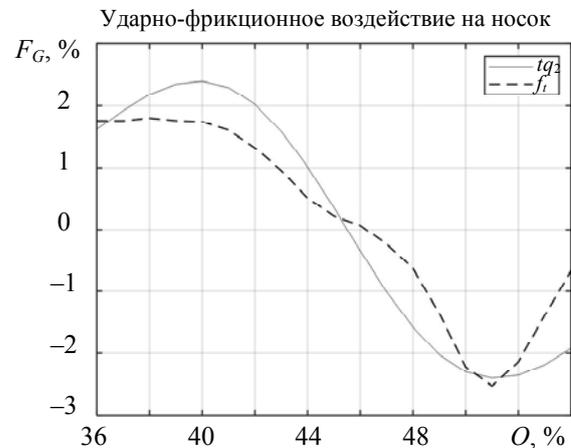


Рис. 4

Здесь для обобщенной функции Эрмита использованы значения из первой строки „вращение“ табл. 2, на рис. 4 — из второй.

Процесс вращения, представленный рис. 4, по сравнению с рис. 3, характеризуется сменой знака псевдовектора угловой скорости и соответственно кинетического момента (т.е. пятка и носок вращаются в противофазе). Известно, что при моделировании ходьбы эти закономерности не принимались в расчет. Модели ходьбы, например в [20, 21], ограничивались классическим подходом к моделированию.

**Заключение.** При анализе процессов трения в фазах ходьбы 1 (пятка) и 2 (носок) систематически использовались обобщенные функции Эрмита. Этот подход позволил ввести параметры аппроксимации, имеющие однозначную физическую интерпретацию. Обработка данных эксперимента с учетом гипотезы Рауса об ударных импульсах показала, что переход

от фазы к фазе при ходьбе играет ключевую роль для построения ее модели и здесь необходимо учитывать: циклическое изменение коэффициентов трения при переходе от фазы к фазе; циклическое изменение знака кинетического момента; условия для троек критических точек.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmidt R., Komistek R. D., Blaha I. D., Penenberg B. L., Maloney W. J. Fluoroscopic analyses of cruciate-retaining and medial pivot knee plants // *Clinical Orthopedics and Related Research*. 2003. Vol. 410. P. 139—147.
2. Blaha J. D. The rationale for a total knee implant that confers anteroposterior stability throughout range of motion // *J. of Arthroplasty*. 2004. Vol. 19. Suppl. 1. P. 22—26.
3. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 2005. 480 с.
4. Павельева Е. А. Обработка и анализ изображений на основе использования информации о фазе // *Компьютерная оптика*. 2018. Т. 42, № 6. С. 1022—1034.
5. Романов В. А., Рыбаков К. А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // *Электронный журнал „Труды МАИ“*. 2010. Вып. 39. С. 1—30.
6. Карпова Н. В. Классическая теория удара и ее применение к решению прикладных задач. СПб: ОМ-Пресс, 2003. 184 с.
7. Szego G. Orthogonal Polynomials // *American Mathematical Society Colloquium Publications*. 1959. Vol. 23.
8. Jackson D. Fourier Series and Orthogonal Polynomials // *Carus Mathematical Monographs*. Chicago, 1941. N 6.
9. Martens J.-B. The Hermite Transform – Theory // *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1990. Vol. 38. P. 1595—1606.
10. Martens J.-B. The Hermite Transform – Applications // *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1990. Vol. 38. P. 1607—1618.
11. Krylov A. and Liakishev A. Numerical Projection Method for Inverse Fourier Transform and its Application // *Numerical Functional Analysis and optimization*. 2007. Vol. 21, N 1. P. 205—216. DOI: 10.1080/01630560008816949.
12. Бернштейн Н. А. Исследование по биодинамике локомоций. Книга первая. М.: Изд-во ВИЭМ, 1935. 244 с.
13. Витензон А. С. Закономерности нормальной и патологической ходьбы человека. М.: Зеркало, 1998. 271 с.
14. Нарушение походки (дисбазия) [Электронный ресурс]: <<http://ilive.com.ua>>. (дата обращения 06.05.2016)
15. Скворцов Д. В. Диагностика двигательной патологии инструментальными методами: анализ походки, стабилотрия. М., 2007. 617 с.
16. Киреенков А. А., Семендяев С. В. Связанные модели трения скольжения и верчения: от теории к эксперименту // *Труды МФТИ*. 2010. Т. 2, № 3. С. 174—181.
17. Журавлев В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // *Прикладная математика и механика*. 1998. Т. 62, вып. 5. С. 762—767.
18. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. школа, 2001.
19. Мусалимов В. М., Перепелкина С. Ю. Построение зависимостей между параметрами динамических моделей на основе анализа кинематики ходьбы // Тез. докл. на XIII Всерос. съезде по теоретической и прикладной механике. СПб, 2023.
20. Белецкий В. В. Двухногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 288 с.
21. Мусалимов В. М., Паасуке М., Ганеева Е., Ерелине Я., Ерофеев М. А. Моделирование динамики опорно-двигательной системы // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2017. Т. 17, № 6. С. 1159—1166.

**Сведения об авторах****Виктор Михайлович Мусалимов**

— д-р техн. наук, профессор; Институт проблем машиноведения РАН, лаборатория трения и износа; гл. научный сотрудник;  
E-mail: musvm@yandex.ru

- Михаил Александрович Ерофеев** — аспирант; Институт проблем машиноведения РАН, лаборатория трения и износа; E-mail: mr.mikhail-erofeev@ya.ru
- Юрий Сергеевич Монахов** — канд. техн. наук; Университет ИТМО, факультет цифровых трансформаций; заместитель декана; E-mail: monakhov@itmo.ru
- Михаил Сергеевич Малов** — аспирант; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: ms.malov21@gmail.ru

Поступила в редакцию 27.03.23; одобрена после рецензирования 07.04.23; принята к публикации 22.06.23.

## REFERENCES

- Schmidt R., Komistek R.D., Blaha I.D., Penenberg B.L., Maloney W.J. *Clinical Orthopedics and Related Research*, 2003, vol. 410, pp. 139–147.
- Blaha J.D. *Journal of Arthroplasty*, 2004, vol. 19, suppl. 1, pp. 22–26.
- Suetin P.K. *Klassicheskiye ortogonal'nyye mnogochleny* (Classical Orthogonal Polynomials), Moscow, 2005, 480 p. (in Russ.)
- Pavelyeva E.A. *Computer Optics*, 2018, no. 6(42), pp. 1022–1034. (in Russ.)
- Romanov V.A., Rybakov K.A. *Elektronnyy zhurnal „Trudy MAI“*, 2010, no. 39, pp. 1–30. (in Russ.)
- Karpova N.V. *Klassicheskaya teoriya udara i yeye primeneniye k resheniyu prikladnykh zadach* (Classical Impact Theory and Its Application to Solving Applied Problems), St. Petersburg, 2003, 184 c. (in Russ.)
- Szego G, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, 1959, vol. 23.
- Jeckson D. *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, Carus Mathematical Monographs, Chicago, 1941, no. 6.
- Martens J.-B. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1990, vol. 38, pp. 1595–1606.
- Martens J.-B. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1990, vol. 38, p. 1607–1618.
- Krylov A. and Liakishv A. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2007, no. 1(21), pp. 205–216, DOI:10.1080/01630560008816949.
- Bernshteyn N.A. *Issledovaniye po biodinamike lokomotsiy. Kniga pervaya* (Research on the Biodynamics of Locomotion. Book One), (in Russ.), 1935, 244 p. (in Russ.)
- Vitenzon A.S. *Zakonomernosti normal'noy i patologicheskoy khod'by cheloveka* (Patterns of Normal and Pathological Human Walking), Moscow, 1998, 271 p. (in Russ.)
- <http://ilive.com.ua>. (in Russ.)
- Skvortsov D.V. *Diagnostika dvigatel'noy patologii instrumental'nymi metodami: analiz pokhodki, stabilometriya* (Diagnostics of Movement Pathology with Instrumental Methods: an Analysis of Gait, Stabilometry), Moscow, 2007, 617 p. (in Russ.)
- Kireenkov A.A., Semendyaev S.V. *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*, 2010, no. 3(2), pp. 174–181. (in Russ.)
- Zhuravlev V.F. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, no. 5(62), pp. 762–767. (in Russ.)
- Gmurman V.E. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* (Theory of Probability and Mathematical Statistics), Moscow, 2001. (in Russ.)
- Musalimov V.M., Perepelkina S.Yu. *Tezisy докладов na XIII Vserossiyskom s"yezde po teoreticheskoy i prikladnoy mekhanike* (Abstracts of Reports at the XIII All-Russian Congress on Theoretical and Applied Mechanics), St. Petersburg, 2023. (in Russ.)
- Beletsky V.V. *Dvunogaya khod'ba: model'nyye zadachi dinamiki i upravleniya* (Bipedal Walking: Model Problems of Dynamics and Control), Moscow, 1984, 288 p. (in Russ.)
- Musalimov V.M., Paasuke M., Gapeeva E., Erelina Ya., Erofeev M.A. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, no. 6(17), pp. 1159–1166. (in Russ.)

## Data on authors

- Viktor M. Musalimov** — Dr. Sci., Professor; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, Laboratory of Friction and Wear; Principal Researcher; E-mail: musvm@yandex.ru
- Mikhail A. Erofeev** — Post-Graduate Student; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, Laboratory of Friction and Wear; E-mail: mr.mikhail-erofeev@ya.ru
- Yury S. Monakhov** — PhD; ITMO University, Faculty of Digital Transformations; Deputy Dean; E-mail: monakhov@itmo.ru
- Mikhail S. Malov** — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: ms.malov21@gmail.ru

Received 27.03.23; approved after reviewing 07.04.23; accepted for publication 22.06.23.