

Э. И. ВАТУТИН, И. В. ЗОТОВ, В. С. ТИТОВ

## ВЫЯВЛЕНИЕ ИЗОМОРФНЫХ ВХОЖДЕНИЙ $R$ -ВЫРАЖЕНИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ЛОГИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Представлен алгоритм выяснения отношения изоморфизма  $R$ -выражений (сечений параллельного алгоритма), основанный на ряде их особых свойств и ориентированный на аппаратную реализацию. Приведено описание устройства (акселератора) на его основе, позволяющего проводить проверку отношения изоморфизма за линейное время.

*Ключевые слова:* логический мультиконтроллер, синтез, параллельный алгоритм логического управления, разбиение, оптимизация, ориентированные деревья.

Реализация параллельных управляющих алгоритмов в базисе логических мультиконтроллеров (ЛМК) требует их декомпозиции на множество частных алгоритмов ограниченной сложности [1]. Получение оптимального набора частных алгоритмов (разбиения) — сложная комбинаторная задача. Качество ее решения существенно влияет на аппаратную сложность ЛМК и определяет, в конечном счете, время выполнения алгоритма. Один из наиболее эффективных путей решения данной задачи предлагает развиваемый авторами параллельно-последовательный метод декомпозиции [2—8]. Как было показано в статье [9], он позволяет формировать наиболее близкие к оптимальным варианты разбиения с учетом основных структурных и технологических ограничений базиса ЛМК.

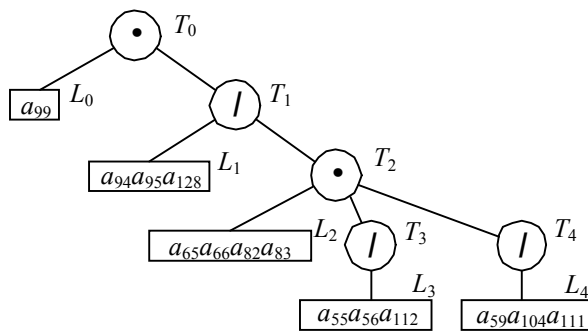
Один из ключевых этапов параллельно-последовательной декомпозиции — построение множества сечений, покрывающего все вершины исходного алгоритма. Формирование сечений осуществляется путем выполнения трудоемких операций подстановки над множеством так называемых  $R$ -выражений, описывающих алгоритм управления. Как показывают исследования, упрощение и ускорение этих операций возможно путем их сведения к действиям над деревьями, в частности, к проверке изоморфизма.

В настоящей статье предложен алгоритм определения изоморфных вхождений  $R$ -выражений, основанный на ряде их специфических свойств, не присущих графам или деревьям общего вида, и обеспечивающий проверку изоморфизма за полиномиальное время. (Как известно [10], для решения задачи распознавания изоморфизма графов общего вида до сих пор не только не придумано эффективного универсального алгоритма, но и не доказана ее принадлежность к классу  $P$  или  $NP$  [11].) Следует отметить, что рассматриваемый вид изоморфизма  $R$ -выражений определяется исходя из возможности проведения операции подстановки [1, 3, 4] и несколько отличается от „классического“ понятия изоморфизма [10], определяемого для графов, ввиду чего далее будем именовать его  $r$ -изоморфизмом.

При практической реализации операций над  $R$ -выражениями удобным является их представление в виде деревьев, допускающее преобразование в табличный вид (рис. 1). Каждый элемент дерева  $X$ , представленного совокупностью наборов листьев  $L_1^X, L_2^X, \dots, L_{n_L(X)}^X$ , узлов  $T_1^X, T_2^X, \dots, T_{n_T(X)}^X$  и связей между ними, кодируется набором полей. С учетом ряда особенностей обработки наборы листьев и узлы дерева кодируются отдельно. Узлы дерева представлены полями:

- 1) типа узла (ТУ) — параллельный или альтернативный;
- 2) ссылки на предка (СП) — номер узла-предка;
- 3) номера соответствия (НС) — номер изоморфного эквивалента в соседнем дереве;
- 4) типа соответствия (ТС) — может принимать значения „0\*“ — соответствие отсутствует, „10“ — неполное (частичное) соответствие, „11“ — полное соответствие.

$a_{99} \cdot (a_{94} | a_{95} | a_{128} | (a_{65} \cdot a_{66} \cdot a_{82} \cdot a_{83} \cdot (a_{55} | a_{56} | a_{112}) \cdot (a_{59} | a_{104} | a_{111})))$



Узлы	Т0	Тип узла	Ссылка на предка	Текущее количество узлов ( $N_T$ )
	T0	•	—	5
	T1		T0	
	T2	•	T1	
	T3		T2	
	T4		T2	
T5	—	—	Текущее количество наборов листьев ( $N_L$ )	
...	...	...		5
$N_{L_{max}}$	—	—		

Наборы листьев	№	Множество вершин	Ссылка на предка
	$L_0$	99	$T_0$
	$L_1$	94, 95, 128	$T_1$
	$L_2$	65, 66, 82, 83	$T_2$
	$L_3$	55, 56, 112	$T_3$
	$L_4$	59, 104, 111	$T_4$
	$L_5$	—	—
...	...	...	
$N_{L_{max}}$	—	—	

Рис. 1

Наборам листьев дерева при этом соответствуют поля множества вершин (МВ) — двоичный вектор с единичными битами в позициях, соответствующих номерам присутствующих в наборе вершин, а также поля СП, НС и ТС. Во избежание путаницы при обозначении одноименных полей, соответствующих узлам и наборам листьев, будем обозначать их с указанием принадлежности к элементам дерева (например, СП(у) и СП(нл)).

Краткое описание свойств  $R$ -выражений, гарантирующих наличие единственно возможного изоморфного эквивалента поддерева и позволяющих исключить из рассмотрения проверку соответствия типов узлов деревьев, приведено ниже (ввиду ограниченного объема статьи доказательства лемм и теорем не приведены).

*Необходимое условие 1 отсутствия  $r$ -изоморфизма.* Если в дереве  $A$  найдется набор листьев  $L_i^A$ , не находящийся в отношении эквивалентности, обозначаемом как

$$L_1 [\sim] L_2 \Leftrightarrow (L_1 = L_2) \vee (L_1 \subset L_2) \vee (L_2 \subset L_1),$$

ни с одним набором листьев дерева  $B$ , то дерево  $A$  не является  $r$ -изоморфным дереву  $B$ :

$$\exists L_i^A \in A, \forall L_j^B \in B, L_i^A [\nexists] L_j^B \rightarrow A [\nsubseteq] B.$$

*Необходимое условие 2 отсутствия  $r$ -изоморфизма.* Если в деревьях  $A$  и  $B$  присутствует более одной пары наборов листьев с частичным соответствием ( $L_i^A \subset L_j^B$ , где  $L_i^A$  —  $i$ -й набор листьев дерева  $A$ ), рассматриваемые деревья не  $r$ -изоморфны.

*Аксиома 1.* Невозможно найти такие два набора листьев  $L_i^A$  и  $L_j^A$ , предком которых являлся бы один и тот же узел.

*Аксиома 2.* При движении по узлам любой ветви дерева типы узлов строго чередуются.

*Лемма 1* (об ортогональности наборов листьев в составе дерева). В пределах дерева все наборы листьев ортогональны:  $L_i^A \cap L_j^A = \emptyset, \forall i \neq j$ .

*Лемма 2* (о совпадении типа узлов-предков для вершин в составе различных наборов листьев). Любые две вершины, входящие в состав одного набора листьев  $L_i^X$  дерева  $X$ , могут одновременно войти в состав набора листьев  $L_j^Y$  дерева  $Y$  только в том случае, если тип узла предков наборов листьев  $L_i^X$  и  $L_j^Y$  совпадает.

*Следствие.* У полностью или частично эквивалентных наборов листьев не может быть предков разного типа.

*Теорема 1* (о единственности  $r$ -изоморфной пары наборов листьев). Набору листьев  $L_i^A$  может соответствовать не более одного полностью или частично эквивалентного набора листьев  $L_j^B$ :  $L_i^A [\sim] L_j^B : \exists L_k^B, L_i^A [\sim] L_k^B, k \neq j$ .

*Теорема 2* (о единственности  $r$ -изоморфной пары поддеревьев). В деревьях  $A$  и  $B$  не может быть более одной пары совпадающих поддеревьев.

*Следствие.* Дереву  $A$  может быть изоморфно не более одного поддерева из дерева  $B$ .

Приведенные выше аксиомы, леммы, теоремы и необходимые условия позволяют сформулировать алгоритм выявления  $r$ -изоморфизма пары деревьев  $A$  и  $B$ , ориентированный на параллельную аппаратную реализацию, в следующем виде.

1. Установить значения полей ТС всех наборов листьев дерева  $A$  в „00“ (соответствия нет), значения полей НС всех наборов листьев дерева  $A$  в „11...1“ (ссылка на несуществующий элемент дерева  $B$ ), значения полей ТС всех узлов дерева  $A$  в „11“ (полное соответствие), значения полей НС всех узлов дерева  $A$  в „11...1“.

2. Если  $n_L(A) > n_L(B)$  (количество наборов листьев в подставляемом дереве больше количества наборов листьев в объемлющем), установить признак  $\varphi = 0$  отсутствия изоморфного дереву  $A$  поддерева в составе дерева  $B$ . Перейти к п. 7.

3. Поочередно выбирать все наборы листьев дерева  $B$ . Для выбранного набора листьев  $L_j^B$  дерева  $B$  осуществить параллельное во времени сравнение поля МВ с полями МВ всех наборов листьев дерева  $A$ , сформировать признаки полного  $\delta^+ = (L_i^A = L_j^B)$  и частичного  $\delta^- = (L_i^A \subseteq L_j^B)$  соответствия наборов листьев с их последующим сохранением в поле ТС набора листьев  $L_i^A$  в формате  $[\delta^- | \delta^+]$  (на позиции старшего бита — признак  $\delta^-$ , младшего —  $\delta^+$ ) и в поле ТС предка набора листьев  $L_i^A$ . В случае полного или частичного соответствия между наборами листьев  $L_i^A$  и  $L_j^B$  сохранить номер  $j$ , соответствующий предположительно изоморфному эквиваленту  $L_i^A$  в составе дерева  $B$ , в поле НС набора листьев  $L_i^A$ , а также значение

поля СП набора листьев  $L_j^B$  в поле НС предка набора листьев  $L_i^A$  (предположительно изоморфный эквивалент предка набора листьев  $L_i^A$ ).

4. Если хотя бы для одного набора листьев дерева  $A$  не нашлось полностью или частично эквивалентного предположительно изоморфного набора листьев в составе дерева  $B$ , т.е.

$$\left( \exists L_k^A : \delta_k^- = 0 \Leftrightarrow \lambda = \bigwedge_{i=0, N_L(A)-1} \delta^-(L_i^A) \neq 1 \right),$$

установить признак  $\varphi = 0$  отсутствия изоморфного дерева  $A$  поддерева в дереве  $B$ . Перейти к п. 7.

5. Просмотреть все узлы дерева  $A$ , кроме корня, в направлении от узлов с большим номером к узлам с меньшим номером. Откорректировать значения поля ТС предка каждого  $i$ -го узла как  $ТС^{\uparrow'} = f(ТС^{\downarrow}, ТС^{\uparrow})$  в случае наличия предка у предположительно изоморфного эквивалента текущего узла ( $\tilde{\gamma} = 0$ ), установить  $ТС^{\uparrow'} = 00$  в противном случае ( $\gamma = 1$ ). (Здесь  $f(x, y)$  — функция корректировки значения поля ТС узла-предка,  $x$  — значение поля ТС узла-предка,  $y$  — узла-потомка, эквивалентная функции минимума двух аргументов для всех случаев, кроме  $f(10, 10) = f(10, 11) = 00$ .) Задать значения поля НС предка рассматриваемого узла  $a[i]$  как  $НС^{\uparrow} = b[a[i].НС].СП$ , где  $НС^{\uparrow}$  — значение поля НС узла-предка текущего узла.

Если поля ТС всех узлов дерева  $A$  имеют значение „11“ или „10“, т.е.

$$\left( \varphi_0 = \bigwedge_{i=0, N_T(A)-1} \delta^-(T_i^A) = 1 \right),$$

в дереве  $B$  есть поддерево, изоморфное дереву  $A$ , причем подстановка изоморфизма определяется значениями полей НС ( $i$ -му элементу дерева  $A$  соответствует изоморфный эквивалент  $a[i].НС$  в дереве  $B$ ). В противном случае в составе дерева  $B$  нет поддерева, изоморфного дереву  $A$ . Установить признак  $\varphi = \varphi_0$ .

7. Конец алгоритма.

Рассмотрим пример работы описанного алгоритма. В качестве объемлющего дерева  $B$  возьмем дерево, приведенное на рис. 1. Пример (см. таблицу) показывает, что в состав дерева  $B$  (рис. 1) входит поддерево,  $r$ -изоморфное изображенному на рис. 2 дереву  $A$ .

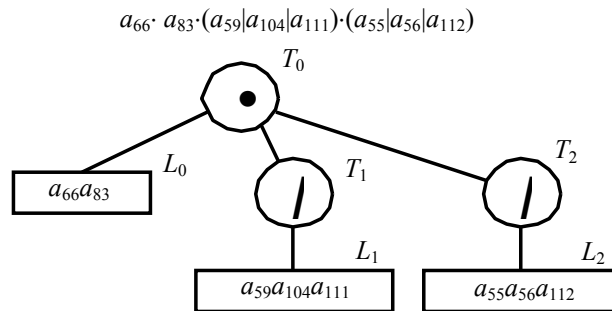


Рис. 2

Пример определения  $r$ -изоморфизма

№ итерации	Пояснение к действию	Значения полей элементов дерева $A$																	
		$L_0$			$L_1$			$L_2$			$T_0$			$T_1$			$T_2$		
		С	НС	ТС	НС	ТС	НС	ТС	НС	ТС	НС	ТС	НС	ТС	НС	ТС	НС	ТС	НС
1	-	00	-1	00	-1	00	-1	00	-1	11	-1	11	-1	11	-1	11	-1	11	-1
2	$N_L(A) = 3, N_L(B) = 5, n_L(A) \leq n_L(B)$	00	-1	00	-1	00	-1	00	-1	11	-1	11	-1	11	-1	11	-1	11	-1
3.1	$j = 0, B.L_0.MB = a_{99}$	00	-1	00	-1	00	-1	00	-1	11	-1	11	-1	11	-1	11	-1	11	-1
3.2	$j = 1, B.L_1.MB = a_{94}a_{95}a_{128}$	00	1	00	-1	00	-1	00	1	11	-1	11	-1	11	-1	11	-1	11	-1
3.3	$j = 2, B.L_2.MB = a_{65}a_{66}a_{82}a_{83}, i = 0, A : L_0 \rightarrow T_0, B : L_2 \rightarrow T_2$	10	2	00	-1	00	-1	00	1	10	2	10	2	11	-1	11	-1	11	-1
3.4	$j = 3, B.L_3.MB = a_{55}a_{56}a_{112}, i = 2, A : L_2 \rightarrow T_2, B : L_3 \rightarrow T_3$	10	2	00	-1	11	3	10	2	11	3	10	2	11	-1	11	-1	11	3
3.5	$j = 4, B.L_4.MB = a_{59}a_{104}a_{111}, i = 1, A : L_1 \rightarrow T_1, B : L_4 \rightarrow T_4$	10	2	11	4	11	3	10	2	11	4	11	3	10	2	11	4	11	3
4	$\lambda = 1 \& 1 = 1$	10	2	11	4	11	3	10	2	11	4	11	3	10	2	11	4	11	3
5.1	$i = 2, A : T_2 \rightarrow T_0, AT_2[\sim]BT_3$ $B : T_3 \rightarrow T_2, \gamma = 0, T_0.TC = f(11, 10) = 10$	10	2	11	4	11	3	10	2	11	4	11	3	10	2	11	4	11	3
5.2	$i = 1, A : T_1 \rightarrow y_0, AT_1[\sim]BT_4$ $B : T_4 \rightarrow T_2, \gamma = 0, T_0.TC = f(11, 10) = 10$	10	2	11	4	11	3	10	2	11	4	11	3	10	2	11	4	11	3
6	$\varphi = 1 \& 1 = 1$	10	2	11	4	11	3	10	2	11	4	11	3	10	2	11	4	11	3

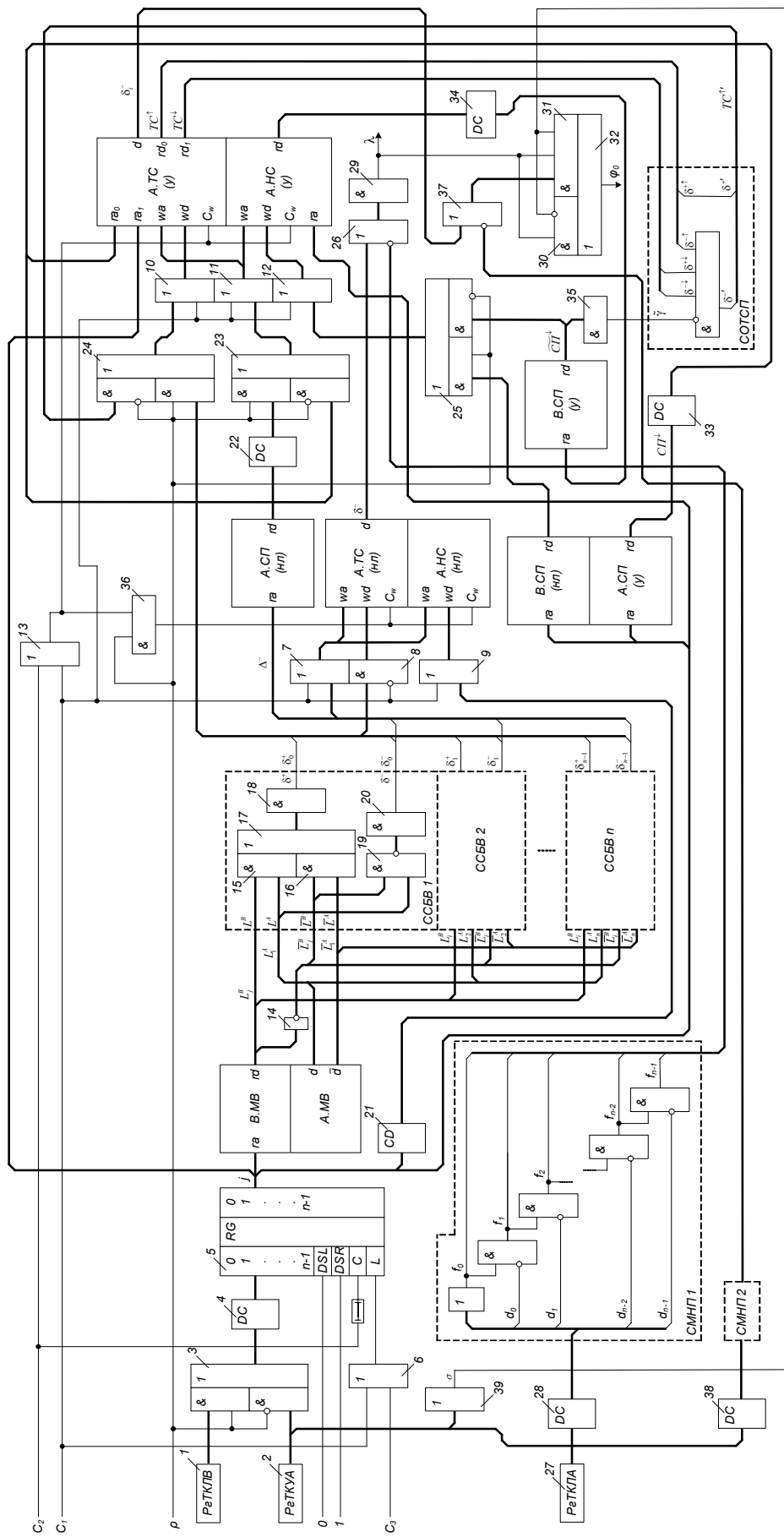


Рис. 3

На основании приведенного выше алгоритма синтезировано специализированное устройство, функциональная схема которого представлена на рис. 3. Регистры 1, 2 и 27 предназначены для хранения значений  $n_L(B)$ ,  $n_T(A)$  и  $n_L(A)$  соответственно, при этом значения полей обрабатываемых деревьев хранятся в элементах однородной среды электронной модели дерева (ОСЭМД) [12] В.МВ, А.МВ, А.СП(нл), А.ТС(нл), А.НС(нл), В.СП(нл), А.СП(у), В.СП(у), А.ТС(у) и А.НС(у), схема ячейки которой приведена на рис. 4.

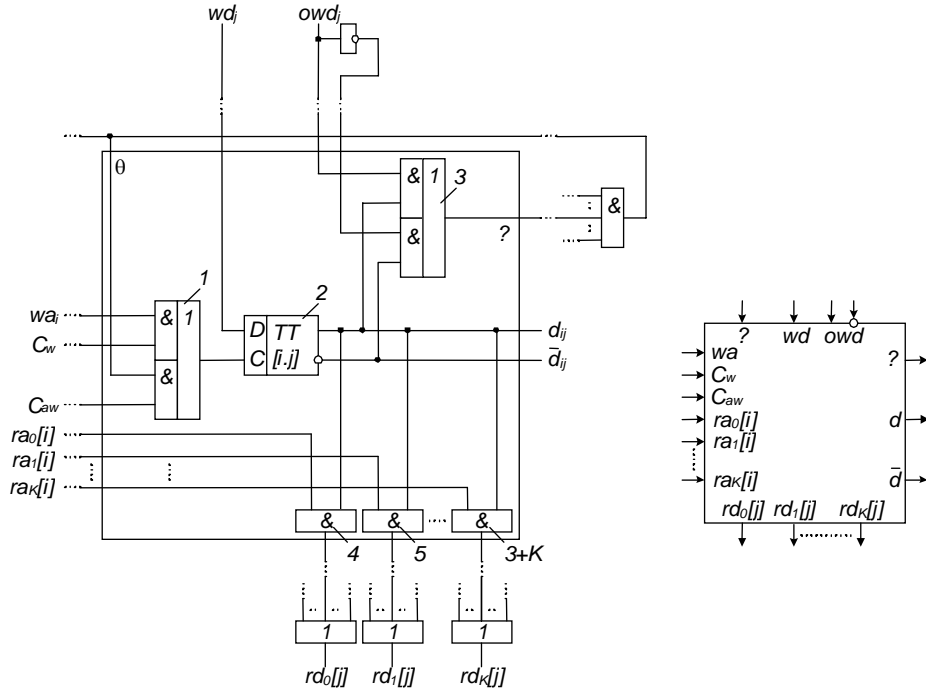


Рис. 4

Коммутаторы 3, 23—25 управляются сигналом  $\rho$  и предназначены для коммутации значений на разных этапах работы алгоритма. Дешифраторы 4, 22, 28, 33, 34, 38 используются для преобразования номеров позиций элементов дерева в табличном представлении из двоичного кода в унитарный, используемый на входах  $ra$  (сокр. от „read address“ — адрес чтения) элементов ОСЭМД. Шифратор 21 используется для обратного преобразования. Сдвиговый регистр 5 используется для поочередного выбора элементов обрабатываемых деревьев. Блоки элементов ИЛИ 7, запрета 8, ИЛИ 9—12 используются для формирования начальных значений полей на этапе инициализации. Элементы ИЛИ 6, ИЛИ 13 и И 36 используются для коммутации синхросигналов. Блок элементов запрета 26 в совокупности с элементом И 29 и схемой маскировки неиспользуемых позиций (СМНП) 1 используется для формирования значения признака  $\lambda$ . Схема СМНП 2 в совокупности с блоком элементов запрета 37, элементом ИЛИ 39, запрета 30, блоком элементов И 31 и элементом ИЛИ 32 используется для формирования результирующего признака  $r$ -изоморфизма  $\phi$ , при этом на выходе элемента ИЛИ 39 формируется значение признака  $\sigma$  отсутствия узлов у дерева  $A$ . Элемент И 35, на выходе которого формируется значение признака  $\tilde{\gamma}$ , в совокупности со схемой определения типа соответствия предка (СОТСП) отвечает за формирование обновленного значения поля типа соответствия узла-предка (фактически схема СОТСП реализует рассмотренную выше функцию  $f$ ). Блок элементов НЕ 14 в совокупности со схемами сравнения битовых векторов (ССБВ) 1— $n$ , образованными блоками элементов И 15 и 16, ИЛИ 17, И-НЕ 19 и элементами И 18 и 20, используется для формирования признаков  $\delta_i^+$  и  $\delta_i^-$  полного и частичного соответствия наборов листьев. Элемент задержки предназначен для задержки синхросигнала сдвига

содержимого регистра 5 на время, достаточное для формирования и записи обновленных значений полей на предыдущей итерации алгоритма.

По сравнению с программной реализацией предлагаемого алгоритма выигрыш в скорости достигается за счет параллельной инициализации значений полей ТС и НС узлов и наборов листьев дерева  $A$ ; параллельного сравнения выбранного  $j$ -го набора листьев дерева  $B$  со всеми наборами листьев дерева  $A$ ; параллельного сравнения компонентов битовых векторов, соответствующих наборам листьев; параллельного чтения и записи значений различных полей ( $A$ .ТС(нл),  $A$ .НС(нл),  $A$ .НС(у) и т.д.) из/в разные элементы ОСЭМД.

При программной реализации [3, 5, 6] имеют место дополнительные затраты на организацию стека возвратов при рекуррентном сравнении деревьев, сканирование наборов листьев при этом фактически является условием завершения рекурсии: обработка элементов наборов листьев производится последовательно. Просмотр узлов деревьев как при программной, так и при аппаратной реализации осуществляется последовательно.

Последовательная программная реализация предложенного в статье алгоритма проверки  $r$ -изоморфизма предполагает попарное сравнение наборов листьев деревьев  $A$  и  $B$  (каждое сравнение наборов листьев требует  $O(L_{\max})$  действий) с последующим просмотром узлов дерева  $A$  снизу вверх. Ее асимптотическая временная сложность составляет

$$O(N_{L_{\max}}^2 L_{\max} + N_T) \approx O(L_{\max}^3),$$

где  $N_{L_{\max}}$  — максимально возможное число наборов листьев в дереве,  $L_{\max}$  — размерность битовых векторов МВ наборов листьев (фактически число вершин в алгоритме управления). Предложенное аппаратное решение обладает асимптотической временной сложностью

$$O(N_{L_{\max}} + N_{T_{\max}}) \approx O(L_{\max}),$$

где  $N_{T_{\max}}$  — максимально возможное число узлов в дереве.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Организация и синтез микропрограммных мультимикроконтроллеров / И. В. Зотов, В. А. Колосков, В. С. Тутов и др. Курск: КурскГТУ, 1999. 368 с.
2. Зотов И. В., Колосков В. А., Тутов В. С. Выбор оптимальных разбиений алгоритмов при проектировании микроконтроллерных сетей // Автоматика и вычислительная техника. 1997. № 5. С. 5162.
3. Поиск базового сечения в задаче разбиения параллельных алгоритмов / Э. И. Ватутин, И. В. Зотов. Курск: КурскГТУ. 2003. 30 с.
4. Ватутин Э. И., Зотов И. В., Тутов В. С. Построение множества сечений в задаче оптимального разбиения параллельных управляющих алгоритмов // Изв. ТулГУ. Вычислительная техника. Информационные технологии. Системы управления. Тула: ТулГУ, 2003. Т. 1, вып. 2. С. 70—77.
5. Ватутин Э. И., Зотов И. В. Метод формирования субоптимальных разбиений параллельных управляющих алгоритмов // Параллельные вычисления и задачи управления (РАСО'04). М.: ИПУ РАН, 2004. С. 884—917.
6. Ватутин Э. И., Зотов И. В. Параллельно-последовательный метод формирования субоптимальных разбиений параллельных управляющих алгоритмов. Свид-во об офиц. регистрации программы для ЭВМ № 2005613091 от 28.11.05.
7. Ватутин Э. И., Зотов И. В. Программная система для построения разбиений параллельных управляющих алгоритмов // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO'06). М.: ИПУ РАН, 2006. С. 2239—2250.
8. Ватутин Э. И., Зотов И. В. Визуальная среда синтеза разбиений параллельных алгоритмов логического управления. Свид-во об офиц. регистрации программы для ЭВМ № 2007613222 от 30.07.07.
9. Ватутин Э. И., Волобуев С. В., Зотов И. В. Комплексная сравнительная оценка методов выбора разбиений при проектировании логических мультимикроконтроллеров // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO'08). М.: ИПУ РАН, 2008. С. 1917—1940.



10. Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 381 с.
11. Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений: Пер. с англ. М.: Вильямс, 2002. 528 с.
12. Ватутин Э. И. Однородная среда электронной модели дерева для аппаратно-ориентированной обработки R-выражений // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символической информации (Распознавание — 2008). Ч. 1. Курск: КурскГТУ, 2008. С. 90—92.

**Сведения об авторах**

- Эдуард Игоревич Ватутин** — аспирант; Курский государственный технический университет, кафедра вычислительной техники; E-mail: evatutin@rambler.ru
- Игорь Валерьевич Зотов** — д-р техн. наук, профессор; Курский государственный технический университет, кафедра вычислительной техники; E-mail: zotovigor@yandex.ru
- Виталий Семенович Титов** — д-р техн. наук, профессор; Курский государственный технический университет, кафедра вычислительной техники; зав. кафедрой; E-mail: titov@vt.kstu.kursk.ru

Рекомендована кафедрой  
вычислительной техники

Поступила в редакцию  
12.09.08 г.