УДК 519.248: 681.5.001.3

С. В. Соколов, П. А. Кучеренко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЯ МИНИМУМА ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ ОЦЕНИВАНИЯ

Рассматривается проблема нелинейной параметрической идентификации стохастических объектов. Предлагается метод решения задачи идентификации параметра дискретного наблюдателя с использованием критерия минимума вероятности ошибки оценивания. Для иллюстрации эффективности предлагаемого подхода рассматривается численный пример.

Ключевые слова: *параметрическая идентификация, ошибка оценивания, минимум критерия, фильтр Калмана.*

Введение. Расширение области практического использования методов и алгоритмов стохастической параметрической идентификации обусловливает устойчивый рост интереса к развитию теории идентификации и разработке новых подходов к решению существующих в данной сфере проблем. Как показывает анализ публикаций, большинство работ посвящено вопросам, связанным с идентификацией параметров модели наблюдаемого стохастического объекта, в то время как вопросы, касающиеся определения параметров измерителя (наблюдателя) вектора состояния объекта, остаются практически не освещенными [1—9]. При этом задачи подобного рода часто возникают в различных областях телекоммуникации и связи, радионавигации, метрологии и др. К числу наиболее распространенных можно отнести задачи определения характеристик тракта передачи (времени распространения сигналов, параметров самой среды передачи и др.), а также определения коэффициентов усиления аппаратуры приемника.

В настоящей статье предлагается метод решения задачи параметрической идентификации, позволяющий, во-первых, освободиться от присущих известным методам ограничений (таких, как линейность модели измерителя относительно параметров, необходимость нормального вида распределения аддитивных шумов объекта и помех наблюдаемых сигналов и пр.), а во-вторых, повысить потенциальную точность процедуры идентификации за счет использования обобщенного вероятностного критерия, зависящего в общем случае нелинейно от апостериорной плотности распределения вероятности вектора состояния.

Следует отметить при этом, что вопросы идентификации по критериям, основанным на минимизации среднеквадратического отклонения ошибки оценивания, рассматривались ранее в работах [3—6]. Однако эти критерии в силу неравенства Чебышева являются (как это будет видно из последующих рассуждений) лишь частными случаями обобщенного нелинейного критерия, составляющего основу предлагаемого в настоящей статье подхода.

Для упрощения изложения остановимся подробнее на скалярных уравнениях, определяющих нелинейную модель наблюдаемого объекта и структуру его измерителя.

Постановка задачи параметрической идентификации. Пусть дискретный объект задан нелинейным разностным уравнением

$$x_k = f(x_{k-1}) + n\,,\ x_1 = x(1)\,, \qquad (1)$$

где n — возмущающее воздействие (шум) с известной функцией плотности распределения вероятности $q(n)$; x_k — переменная состояния объекта в k-й момент времени; f — известная нелинейная функция, x_1 — значение переменной состояния объекта в начальный момент времени.

Наблюдение за переменными состояния в дискретном времени осуществляется измерителем, описываемым также нелинейным (как относительно параметра наблюдателя, так и относительно переменной состояния объекта) уравнением следующего вида:

$$z_k = \chi(c, x_k) + w\,, \qquad (2)$$

где z_k — дискретный отсчет сигнала измерителя; c — искомый параметр измерителя; w — шум измерителя с известной функцией плотности распределения вероятности $g(w)$; χ — известная нелинейная функция наблюдения.

При этом отметим, что идентифицируемость параметров измерителя обеспечивается [10] единственностью апостериорной плотности распределения вероятности (АПРВ) вектора состояния наблюдаемого объекта, содержащей максимально полную информацию о совокупности переменных его состояния и параметрах измерителя.

Для упрощения совокупности дискретных отсчетов сигнала измерителя z_i, i=1…k, обозначим через z_1^k.

В рассматриваемом общем нелинейном стохастическом случае задача идентификации неизвестного параметра c может быть сформулирована как задача нахождения его значения, доставляющего оптимум некоторому обобщенному вероятностному критерию J, зависящему от АПРВ вектора состояния. В качестве условия оптимизации (минимизации) критерия J используем далее условие минимума апостериорной плотности распределения вероятности текущей ошибки оценивания σ переменных состояния объекта на выбранном интервале ее предельно допустимого изменения — от $\sigma_{\min}$ до $\sigma_{\max}$, т.е.

$$\min_c J = \min_c \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \rho(\sigma_k \mid z_1^k) d\sigma_k\,,$$

где $\sigma_k = x_k - \hat{x}_k$ — текущая ошибка оценивания, $\hat{x}_k$ — текущая оценка переменной состояния объекта; $\rho(\sigma_k \mid z_1^k)$ — АПРВ ошибки оценивания.

Учитывая линейную зависимость значений ошибки σ_k и переменной состояния x_k, выразим АПРВ ошибки оценивания $\rho(\sigma_k \mid z_1^k)$ через АПРВ переменной состояния $p(x_k \mid z_1^k)$ (выражение для которой будет получено ниже):

$$\rho(\sigma_k \mid z_1^k) = p(\sigma_k + \hat{x}_k \mid z_1^k)\,.$$

В этом случае минимизация критерия может быть представлена следующим образом:

$$\min_c J = \min_c \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \rho(\sigma_k \mid z_1^k) d\sigma_k = \min_c \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} p(\sigma_k + \hat{x}_k \mid z_1^k) d\sigma_k \, . \qquad (3)$$

В результате поставленная задача сводится к нахождению АПРВ $p(\sigma_k + \hat{x}_k \mid z_1^k)$ и последующему определению значения искомого параметра из условия минимума критериального выражения в формуле (3).

Синтез алгоритма нелинейной параметрической идентификации. Для определения АПРВ $p(\sigma_k + \hat{x}_k \mid z_1^k)$ предварительно используем выражение для АПРВ $p(x_k \mid z_1^k)$ с последующей соответствующей заменой переменных.

Известно [11], что АПРВ информационного параметра x для k-го момента времени определяется выражением

$$p(x_k \mid z_1^k) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p(x_{k-1} \mid z_1^{k-1}) p(x_k \mid x_{k-1}) dx_{k-1} p(z_k \mid x_k)}{h}, \qquad (4)$$

где

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{k-1} \mid z_1^{k-1}) p(x_k \mid x_{k-1}) dx_{k-1} p(z_k \mid x_k) dx_k \, .$$

Условная плотность вероятности $p(x_k \mid x_{k-1})$ в формуле (4) может быть определена из уравнения (1) при известном виде плотности распределения вероятности значений шума n (в предположении их взаимной статистической независимости):

$$p(x_k \mid x_{k-1}) = q(x_k - f(x_{k-1})) \, .$$

Аналогичным образом из уравнения (2) можно определить и входящую в формулу (4) функцию правдоподобия:

$$p(z_k \mid x_k) = g(z_k - \chi(c, x_k)) \, .$$

Так как АПРВ $p(x_{k-1} \mid z_1^{k-1})$ в равенстве (4) является известной функцией, рекуррентный алгоритм определения АПРВ переменной состояния для k-го момента времени при наличии дискретных отсчетов сигнала z_1^k принимает следующий вид:

$$p(x_k \mid z_1^k) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p(x_{k-1} \mid z_1^{k-1}) q(x_k - f(x_{k-1})) dx_{k-1} g(z_k - \chi(c, x_k))}{h^*(c)}, \qquad (5)$$

где

$$h^*(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{k-1} \mid z_1^{k-1}) q(x_k - f(x_{k-1})) dx_{k-1} g(z_k - \chi(c, x_k)) dx_k \, .$$

Произведя соответствующую замену переменных в уравнении (5) и обозначив критериальное выражение через $\Omega(c)$, задачу поиска минимума критерия (3) можно представить в следующем виде:

$$\min_c J = \min_c \Omega(c) \, , \qquad (6)$$

где

$$\Omega(c) = \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} p(\sigma_k + \hat{x}_k \mid z_1^k) d\sigma_k =$$

$$= \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} p(x_{k-1} \mid z_1^{k-1}) q((\sigma_k + \hat{x}_k) - f(x_{k-1})) dx_{k-1} g(z_k - \chi(c, \sigma_k + \hat{x}_k))}{h^*(c)} \right) d\sigma_k .$$

Здесь важно отметить, что в общем случае решения поставленной задачи оценка переменной состояния $\hat{x}_k$, входящая в формулу (6), представляет собой некоторый функционал (оператор) L от апостериорной плотности распределения вероятности переменной состояния, т.е. $\hat{x}_k = L\left(p(x_k \mid z_1^k)\right)$, и, следовательно, в силу выражения (1) является нелинейной функцией от искомого параметра c: $\hat{x}_k = U(c)$.

Тогда критериальное выражение в уравнении (6) окончательно можно представить в следующем обобщенном виде:

$$\Omega(c) = \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} p(x_{k-1} \mid z_1^{k-1}) q\left((\sigma_k + U(c)) - f(x_{k-1})\right) dx_{k-1} g\left(z_k - \chi\left(c, \sigma_k + U(c)\right)\right)}{h^*(c)} \right) d\sigma_k . \quad (7)$$

Идентификация параметра, удовлетворяющего условию минимума критерия (6), предполагает минимизацию полученного критериального выражения (7). Для этой цели в зависимости от конкретного вида получаемой функции $\Omega(c)$ можно использовать известные и широко применяемые методы оптимизации: градиентный, метод Ньютона, метод сопряженных направлений, различные прямые методы и др. Выбор метода определяется особенностями наблюдаемого объекта и его измерителя.

Многомерный метод нелинейной параметрической идентификации. Минимизацию критерия (6) можно легко обобщить для многомерного случая, когда уравнения объекта и наблюдателя описываются следующими векторными уравнениями:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{n} ; \ \mathbf{z}_k = \chi(\mathbf{C}, \mathbf{x}_k) + \mathbf{w} ,$$

где $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{x}_{k-1}$ — n-мерные векторы переменных состояния в k-й и $(k-1)$-й моменты времени (шаги) соответственно; $\mathbf{z}_k$ — m-мерный вектор сигналов измерителя; $\mathbf{n}$ — n-мерный вектор шума с известной n-мерной функцией плотности распределения вероятности $q(\mathbf{n})$; $\mathbf{C}$ — вектор (или матрица) параметров наблюдателя; $\mathbf{w}$ — m-мерный вектор шума с известной m-мерной функцией плотности распределения вероятности $g(\mathbf{w})$.

Поскольку методика синтеза алгоритмов, соответствующих многомерному случаю, является полностью аналогичной изложенной выше для скалярного случая, приведем окончательную форму критериального выражения для рассматриваемого векторного случая:

$$\Omega(\mathbf{C}) = \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \ldots \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} p(\boldsymbol{\sigma}_k + \hat{\mathbf{x}}_k \mid \mathbf{z}_1^k) d\boldsymbol{\sigma}_k =$$

$$= \int\limits_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \ldots \int\limits_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \left(\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1} \mid \mathbf{z}_1^{k-1}) q((\boldsymbol{\sigma}_k + \hat{\mathbf{x}}_k) - f(\mathbf{x}_{k-1})) d\mathbf{x}_{k-1} g(\mathbf{z}_k - \chi(\mathbf{C}, \boldsymbol{\sigma}_k + \hat{\mathbf{x}}_k))}{h^*(\mathbf{C})} \right) d\boldsymbol{\sigma}_k;$$

$$h^*(\mathbf{C}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1} \mid \mathbf{z}_1^{k-1}) q((\boldsymbol{\sigma}_k + \hat{\mathbf{x}}_k) - f(\mathbf{x}_{k-1})) d\mathbf{x}_{k-1} g(\mathbf{z}_k - \chi(\mathbf{C}, \boldsymbol{\sigma}_k + \hat{\mathbf{x}}_k)) \right) d\mathbf{x}_k,$$

где $\hat{\mathbf{x}}_k$ — вектор оценок переменных состояния; $\mathbf{z}_1^k$ — совокупность векторов сигналов $\mathbf{z}_i$, i=1...k; $\boldsymbol{\sigma}_k$ — вектор ошибки оценивания.

Эффективность использования предложенного подхода проиллюстрируем на следующем примере.

Пример. Рассмотрим стохастический дискретный объект, заданный нелинейным разностным уравнением

$$x_k = 3x_{k-1} - (x_{k-1})^2 + n, \ x_1 = 1, \tag{8}$$

где n — белый гауссов шум с дисперсией $D_n = 0,02$ и нулевым средним.

Наблюдение за переменными состояния объекта осуществляется измерителем, описываемым следующим нелинейным уравнением:

$$z_k = c(2x_k - 0,5(x_k)^2) + w, \tag{9}$$

где c — искомый параметр наблюдателя (для рассматриваемого примера выберем исходное значение этого параметра $c = 1{,}5$); w — белый гауссов шум с нулевым средним и дисперсией $D_w = 0,25$.

Определение оценок произведем с использованием рекуррентного алгоритма калмановской фильтрации. Линеаризованные уравнения (8) и (9) принимают при этом следующий вид:

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k + n, \ x_1 = 1; \quad z_k = c(E_k x_k + P_k) + w,$$

где $A_k = 3 - 2\hat{x}_{k-1}$, $B_k = (\hat{x}_{k-1})^2$, $E_k = 2 - \hat{x}_{k-1}$, $P_k = 0,5(\hat{x}_{k-1})^2$ — коэффициенты, полученные в результате линеаризации функций $f(x_{k-1})$ и $\chi(c, x_k)$ в окрестностях оценок переменной состояния объекта для (k –1)-го шага.

Для определения текущего значения оценки переменной состояния объекта использовался оптимальный фильтр Калмана [11], который в рассматриваемом случае определяется как

$$\hat{x}_k = U(c) = A_k \hat{x}_{k-1} + B_k + K_k \left(z_k - c(E_k(A_k \hat{x}_{k-1} + B_k) + P_k) \right), \ \hat{x}_1 = 0{,}5;$$

$$K_k = c\frac{R_k}{D_w}, \ R_k = \left(\frac{1}{R_{k-1} + D_n} + \frac{c^2}{D_w} \right)^{-1}, \ R_1 = 0,5.$$

Критериальное выражение $\Omega(c)$ на k-м шаге алгоритма для данного примера примет вид

$$\Omega(c) = \int\limits_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} p(\sigma_k + \hat{x}_k \mid z_1^k) d\sigma_k = \int\limits_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \left(\frac{\frac{1}{D_n D_w 2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_{k-1} \mid z_1^{k-1}) e^{-\frac{\tau^2}{2D_n}} dx_{k-1} e^{-\frac{\upsilon^2}{2D_w}}}{h^*(c)} \right) d\sigma_k, \tag{10}$$

$$\tau = \sigma_k + \hat{x}_k - 3x_{k-1} + (x_{k-1})^2, \ \upsilon = z_k - c(2(\sigma_k + \hat{x}_k) - 0,5(\sigma_k + \hat{x}_k)^2).$$

АПРВ для первой итерации алгоритма выберем нормальной с дисперсией $D_0 = 0{,}5$ и нулевым математическим ожиданием. При этом отклонение среднего значения апостериорной плотности от начального значения переменной состояния не оказывает в дальнейшем существенного влияния на качество процедуры идентификации.

На рис. 1 представлен полученный в результате моделирования график входящей в формулу (10) АПРВ текущей ошибки оценивания для k-го шага алгоритма (k=50), которая, являясь функцией текущей ошибки σ_k, зависит также и от значений искомого параметра c:

$$(\, p(\sigma_k + \hat{x}_k \mid z_1^k) = p(\sigma_k + U(c) \mid z_1^k) = V(c, \sigma_k)\,).$$

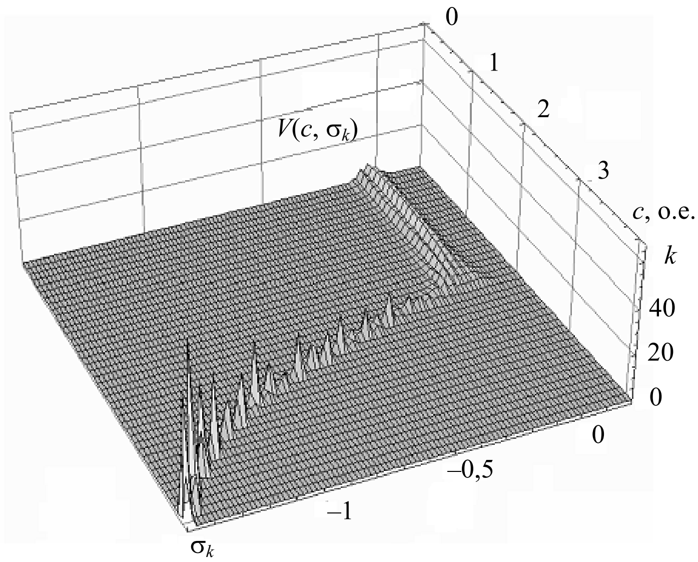

Рис. 1

Определение интегралов в выражении (10) производилось численно с использованием квадратурных формул с шагом $\Delta = 0{,}03$. Бесконечные пределы интегрирования по переменной состояния x были заменены на конечные значения, удовлетворяющие точностным требованиям к алгоритму оценки ($x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 4$).

На рис. 2 приведен график зависимости функции критериального выражения $\Omega(c)$ от искомого параметра при k=50. Границы интервала интегрирования по текущей ошибке оценивания также выбирались исходя из требований, обеспечивающих необходимую точность алгоритма оценки ($\sigma_{\min} = -1{,}5$, $\sigma_{\max} = 0{,}2$).

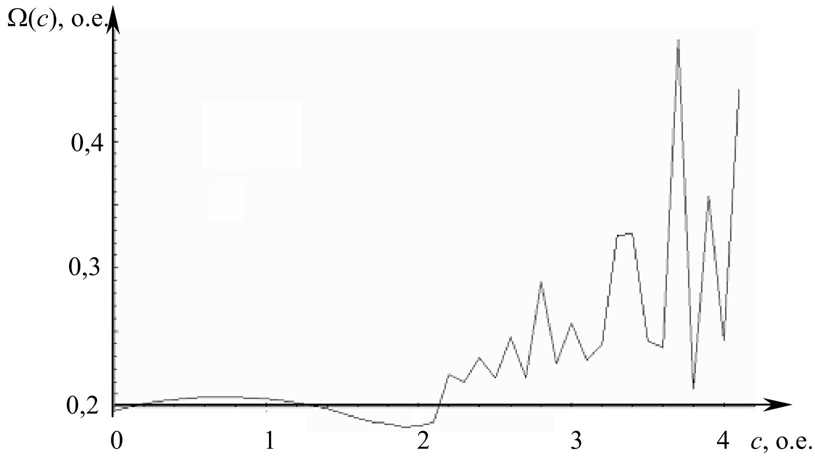

Рис. 2.

Как показали результаты моделирования, вид приведенной на рис. 2 зависимости является характерным для критериальных выражений, получаемых на различных итерациях алгоритма (7).

Здесь важно отметить, что, являясь многоэкстремальными, критериальные выражения на различных шагах алгоритма (см. рис. 2) принимают наименьшие значения при $c = 2$.

Для минимизации функции критериального выражения на очередном шаге алгоритма, т.е. для однозначного определения численного значения текущей оценки искомого параметра, целесообразно, задав некоторый интервал возможных значений параметра c (в рассмотренном примере $0 \le c \le 5$), применить один из методов прямой минимизации. В данном случае использовался модифицированный симплексный метод прямой минимизации Нелдера — Мида — метод Бокса, обладающий достаточной вычислительной эффективностью и удобной программной реализацией [12].

Результаты компьютерного моделирования процедуры нелинейной параметрической идентификации показали, что если количество дискретных значений сигнала измерителя больше 250, то отклонение оценки параметра наблюдателя от его истинного значения $c = 2$ не превышает 9,7 %.

Таким образом, результаты проведенных исследований подтверждают принципиальную возможность эффективной реализации метода нелинейной параметрической идентификации с использованием критерия минимума АПРВ текущей ошибки оценивания. При этом важно отметить, что упомянутые выше методы параметрической идентификации [3—6] в изложенной постановке рассмотренную задачу решить не позволяют.

Заключение. Полученное выражение (7) определяет самый общий вид алгоритма нелинейной параметрической идентификации, обладающего рядом принципиально новых свойств. К их числу следует отнести:

— более высокий по сравнению с традиционными методами уровень потенциальной точности процесса идентификации благодаря использованию обобщенных вероятностных критериев, зависящих в общем случае нелинейно от апостериорной плотности распределения вероятности вектора состояния объекта;

— инвариантность к виду плотности распределения вероятности шума как объекта, так и измерителя;

— возможность применения метода для нелинейных объектов и наблюдателей, в том числе, при нелинейной зависимости функции наблюдения от искомого параметра.

Таким образом, предложенный метод нелинейной параметрической идентификации на основе обобщенных вероятностных критериев может быть весьма эффективно использован в различных областях связи, управления, метрологии и т.п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гроп Д.* Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979.
2. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
3. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
4. *Сейдж Э., Мелса Дж.* Идентификация систем управления. М.: Мир, 1974.
5. *Пугачев В. С., Казаков И. Е., Евланов Л. Г.* Основы статистической теории автоматических систем. М.: Машиностроение, 1974.
6. *Пащенко Ф. Ф.* Введение в состоятельные методы моделирования систем. Идентификация нелинейных систем. М.: Финансы и статистика, 2007.
7. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Гольденблат И. И., Ульянов С. В.* Теория моделей в процессах управления. М.: Наука, 1978.
8. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *А. А. Красовского.* М.: Наука, 1987.
9. *Штейнберг Ш. Е.* Идентификация в системах управления. М.: Энергоатмоиздат, 1987.
10. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.

11. *Тихонов В. И., Харисов В. Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.

12. *Банди Б.* Методы оптимизации: Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988.

Сведения об авторах

Сергей Викторович Соколов — д-р техн. наук, профессор; Ростовский государственный университет путей сообщения, кафедра автоматики и телемеханики на ж.-д. транспорте, Ростов-на-Дону

Павел Александрович Кучеренко — аспирант; Ростовский государственный университет путей сообщения, кафедра автоматики и телемеханики на ж.-д. транспорте, Ростов-на-Дону; E-mail: pavelpost83@mail.ru

Рекомендована кафедрой
автоматики и телемеханики
на ж.-д. транспорте

Поступила в редакцию
21.05.08 г.