

А. Н. КИРИЛЛОВ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И РАЗМЕРНОСТЬЮ

Предлагается подход к математическому моделированию сложных динамических систем с переменной структурой и размерностью. Модель задается системами обыкновенных дифференциальных уравнений, количество и вид которых зависят от поведения специальных переменных. Приведен пример использования предложенного подхода в задаче стабилизации системы твердых тел.

Ключевые слова: динамическая система, математическая модель, изменение структуры, переменная размерность, декомпозиция, управление.

Введение. Решение задачи управления техническими системами и технологическими процессами связано с построением сложных математических моделей, что обусловлено, в частности, многочисленными взаимосвязями различных подсистем. Необходимость учета этих взаимосвязей приводит к созданию динамических систем, аналитическое исследование которых весьма затруднительно. К системам, в которых важную роль играют изменяющиеся во времени взаимосвязи образующих их подсистем, можно отнести крупные производственные комплексы, движущиеся объекты с переменным количеством компонентов, роботы-манипуляторы, динамические модели теории метапопуляций. Эти и многие другие аналогичные системы имеют общие свойства: в процессе функционирования их структура изменяется таким образом, что подсистемы, из которых они состоят, могут на различных интервалах времени находиться в пассивном или активном режиме. В настоящей статье для моделирования таких процессов предлагается использовать динамические системы, размерность и структура которых, в зависимости от состояния, может изменяться с течением времени, т.е. происходит динамическая декомпозиция сложной системы [1]. Отметим, что вопросы моделирования сложных систем со структурными изменениями исследовались в работах [2—7]. Настоящая статья развивает это направление.

Пусть некоторая сложная система S состоит из подсистем S_i , $i = 1, \dots, n$, которые в процессе функционирования могут отключаться от нее или, наоборот, подключаться к ней в зависимости от состояния сложной системы. Тем самым структура и, следовательно, размерность S изменяются. Перейдем к формальному описанию. Предположим, что система S

представляет собой совокупность взаимосвязанных подсистем S_i , $i = 1, \dots, n$, причем не все S_i могут входить в состав S одновременно. Итак, $S = \{S_{k_1}, \dots, S_{k_j}, \dots, S_{k_m}\}$, $k_j \in \{1, \dots, n\}$, $j = 1, \dots, m$, $m \leq n$, при этом полагаем, что $k_i \equiv k_i$, $k_i < k(i+1)$.

Определение. Вектором структуры $\gamma \in R^n$ системы S называется вектор $\gamma^T = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, такой что $\gamma_i = 1$, если $S_i \in S$, и $\gamma_i = 0$, если $S_i \notin S$.

Вектор γ будем также называть структурой системы S . Введем вектор $y(t) \in R^n$, $y^T(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, такой что $\gamma_i = 1$, если $y_i(t) > \tilde{y}_i$, и $\gamma_i = 0$, если $y_i(t) < \tilde{y}_i$. Здесь \tilde{y}_i — заданные постоянные (пороговые значения). Если в некоторый момент времени \tilde{t} справедливо равенство $y_i(\tilde{t}) = \tilde{y}_i$, то происходит изменение структуры системы S , а именно: если при $t \in (\tilde{t} - \delta, \tilde{t})$ подсистема S_i входит в состав S , $S_i \subset S$, т.е. $y_i(t) > \tilde{y}_i$, то происходит отключение S_i от S . Если при $t \in (\tilde{t} - \delta, \tilde{t})$ подсистема S_i не входит в состав S , $S_i \not\subset S$, т.е. $y_i(t) < \tilde{y}_i$, то происходит подключение S_i к S . Здесь $\delta > 0$ — заданная постоянная.

З а м е ч а н и е. Вектор $y(t)$ можно назвать многомерным временем эволюции системы в отличие от текущего времени t . Именно изменение компонентов $y_i(t)$ приводит к изменению структуры системы S .

Перейдем к описанию динамики системы S . При этом рассмотрим два варианта: разрывное (скачкообразное) и непрерывное изменения структуры.

Разрывное изменение структуры. Отключение S_{k_j} . Пусть в некоторый момент времени t в состав S входят подсистемы S_{k_i} : $S = \{S_{k_1}, \dots, S_{k_m}\}$, т.е. $y_{k_i}(t) > \tilde{y}_{k_i}$. Введем векторы состояний $\mathbf{X}_{k_i} \in R^{(k_i)}$ подсистем S_{k_i} , где (k_i) — размерность вектора \mathbf{X}_{k_i} . Тогда полагаем, что динамика системы S в момент времени t описывается системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{k_i} &= f_{k_1, \dots, k_m}^{k_i}(\mathbf{X}_{k_1}, \dots, \mathbf{X}_{k_i}, \dots, \mathbf{X}_{k_m}), \quad i = 1, \dots, m; \\ \dot{y}_l &= g_{k_1, \dots, k_m}^l(\mathbf{X}_{k_1}, \dots, \mathbf{X}_{k_i}, \dots, \mathbf{X}_{k_m}), \quad l = 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $f_{k_1, \dots, k_m}^{k_i} : R^{(k_1) + \dots + (k_m)} \rightarrow R^{(k_i)}$; $g_{k_1, \dots, k_m}^l : R^{(k_1) + \dots + (k_m)} \rightarrow R$, причем правые части обеспечивают существование и единственность решения системы (1).

Пусть в некоторый первый момент времени $t = t_{k_j}^-$ переменная $y_{k_j}(t)$ принимает значение \tilde{y}_{k_j} : $y_{k_j}(t_{k_j}^-) = \tilde{y}_{k_j}$. Введем отключающее подсистему S_{k_j} непрерывное отображение $\Phi_{k_j}^- : R^{(k_1) + \dots + (k_m) + n + 1} \rightarrow R^{(k_1) + \dots + (k_m) + n + 1}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{k_j}^-(\mathbf{X}_{k_1}(t_{k_j}^-), \dots, \mathbf{X}_{k_j}(t_{k_j}^-), \dots, \mathbf{X}_{k_m}(t_{k_j}^-), y_1(t_{k_j}^-), \dots, \tilde{y}_{k_j}, \dots, y_n(t_{k_j}^-), t_{k_j}^-) = \\ = (\mathbf{X}_{k_1}^{(-k_j)}, \dots, \mathbf{0}^{(k_j)}, \dots, \mathbf{X}_{k_m}^{(-k_j)}, y_1^{(-k_j)}, \dots, \tilde{y}_{k_j} - \delta_{k_j}^-, \dots, y_n^{(-k_j)}, \tilde{t}_{k_j}^-), \end{aligned}$$

где $\mathbf{0}^{(k_j)}$ — нулевой вектор, $\mathbf{0}^{(k_j)} \in R^{(k_j)}$, причем $\mathbf{0}^{(k_j)}$ находится на j -м месте; постоянная $\delta_{k_j}^- > 0$; постоянная $\tilde{y}_{k_j} - \delta_{k_j}^-$ находится на $(m+j)$ -м месте; $t_{k_j}^- \leq \tilde{t}_{k_j}^-$ — заданный момент времени; $\mathbf{X}_{k_i}^{(-k_j)}$, $y_l^{(-k_j)}$ — заданные векторы и постоянные, $l = 1, \dots, n$, $l \neq k_j$, $i = 1, \dots, m$, $i \neq j$, $\mathbf{X}_{k_i}^{(-k_j)} \in R^{k_i}$. При этом полагаем

$$(y_l(t_{k_j}^-) - \tilde{y}_l)(y_l^{(-k_j)} - \tilde{y}_l) > 0, \quad l = 1, \dots, n, \quad l \neq k_j,$$

т.е. положение постоянных $y_l(t_{kj}^-)$ по отношению к пороговым значениям \tilde{y}_l после скачка не изменяется. Тогда отображение перехода φ_{kj}^- , понижающее размерность системы S , не влияет мгновенно на отключение или подключение других подсистем S_{ki} .

Далее, при $t \geq \tilde{t}_{kj}^-$ динамика системы S задается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{ki} &= f_{k1, \dots, \hat{k}_j, \dots, km}^{ki}(\mathbf{X}_{k1}, \dots, \hat{\mathbf{X}}_{ki}, \dots, \mathbf{X}_{km}), \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq j; \\ \dot{\mathbf{X}}_{kj} &= \mathbf{0}^{(kj)}; \\ \dot{y}_l &= g_{k1, \dots, \hat{k}_j, \dots, km}^l(\mathbf{X}_{k1}, \dots, \hat{\mathbf{X}}_{kj}, \dots, \mathbf{X}_{km}), \quad l = 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{X}_{ki}(\tilde{t}_{kj}^-) = \mathbf{X}_{ki}^{(-kj)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq j; \quad \mathbf{X}_{kj}(\tilde{t}_{kj}^-) = \mathbf{0}^{(kj)}; \quad (3)$$

$$y_l(\tilde{t}_{kj}^-) = y_l^{(-kj)}, \quad l = 1, \dots, n, \quad l \neq kj, \quad y_{kj}(\tilde{t}_{kj}^-) = \tilde{y}_{kj} - \delta_{kj}^-. \quad (4)$$

Здесь символом $\hat{\mathbf{X}}_{ki}$ обозначен отсутствующий вектор. В силу второго уравнения системы (2) и начального условия (3) $\mathbf{X}_{kj}(t) \equiv \mathbf{0}^{(kj)}$ при $t \geq \tilde{t}_{kj}^-$. Это означает, что переменной $\mathbf{X}_{kj}(t)$ можно пренебречь. Тогда будем полагать, что при $t \geq \tilde{t}_{kj}^-$ динамика системы S задается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{ki} &= f_{k1, \dots, kj-1, kj+1, \dots, km}^{ki}(\mathbf{X}_{k1}, \dots, \mathbf{X}_{kj-1}, \mathbf{X}_{kj+1}, \dots, \mathbf{X}_{km}), \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq j; \\ \dot{y}_l &= g_{k1, \dots, kj-1, kj+1, \dots, km}^l(\mathbf{X}_{k1}, \dots, \mathbf{X}_{kj-1}, \mathbf{X}_{kj+1}, \dots, \mathbf{X}_{km}), \quad l = 1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Таким образом, произошло отключение подсистемы S_{kj} . В результате динамика системы S описывается уравнениями (5) с начальными условиями (3), (4).

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что отображение φ_{kj}^- позволяет системе S совершить временной скачок длительностью $\tilde{t}_{kj}^- - t_{kj} \geq 0$.

Подключение S_{kj} . Пусть динамика системы S задается уравнениями (5). Предположим, что в некоторый момент времени $t = t_{kj}^+$ переменная $y_{kj}(t)$ принимает значение \tilde{y}_{kj} : $y_{kj}(t_{kj}^+) = \tilde{y}_{kj}$. Отсутствие в составе S подсистемы S_{kj} при $t < t_{kj}^+$ означает, что при этом выполняется условие $y_{kj}(t) < \tilde{y}_{kj}$. Введем подключающие подсистему S_{kj} отображения $\varphi_{kj}^+ : R^{(k1)+\dots+(kj-1)+(kj+1)+\dots+(km)+n+1} \rightarrow R^{(k1)+\dots+(km)+n+1}$, так что

$$\begin{aligned} &\varphi_{kj}^+(\mathbf{X}_{k1}(t_{kj}^+), \dots, \mathbf{X}_{k(j-1)}(t_{kj}^+), \mathbf{X}_{k(j+1)}(t_{kj}^+), \dots, \mathbf{X}_{km}(t_{kj}^+), y_1(t_{kj}^+), \dots, y_n(t_{kj}^+), t_{kj}^+) = \\ &= (\mathbf{X}_{k1}^{(+kj)}, \dots, \mathbf{X}_{k(j-1)}^{(+kj)}, \mathbf{X}_{kj}^{(+kj)}, \mathbf{X}_{k(j+1)}^{(+kj)}, \dots, \mathbf{X}_{km}^{(+kj)}, y_1^{(+kj)}, \dots, y_{k(j-1)}^{(+kj)}, \tilde{y}_{kj} + \delta_{kj}^+, y_{k(j+1)}^{(+kj)}, \dots, y_n^{(+kj)}, \tilde{t}_{kj}^+), \end{aligned}$$

где δ_{kj}^+ , \tilde{t}_{kj}^+ , $y_i^{(+kj)}$ — заданные постоянные, $\delta_{kj}^+ > 0$, $\tilde{t}_{kj}^+ \geq t_{kj}^+$; $\mathbf{X}_{ki}^{(+kj)}$ — заданные векторы, $\mathbf{X}_{ki}^{(+kj)} \in R^{(ki)}$, $i = 1, \dots, m$; при этом полагаем, что $(y_l(t_{kj}^+) - \tilde{y}_l)(y_l^{(+kj)} - \tilde{y}_l) > 0$, $l = 1, \dots, n$,

$l \neq kj$, т.е. положение постоянных $y_l(t_{kj}^+)$ не изменяется по отношению к пороговым значениям \tilde{y}_l после скачка, иными словами, отображение Φ_{kj}^+ , повышающее размерность системы, не влияет мгновенно на отключение или подключение других подсистем S_{ki} .

Далее, при $t \geq \tilde{t}_{kj}^+$ динамика системы S задается уравнениями (1) с начальными условиями $\mathbf{X}_{ki}(\tilde{t}_{kj}^+) = \mathbf{X}_{ki}^{(+kj)}$, $y_l(\tilde{t}_{kj}^+) = y_l^{(+kj)}$, $y_{kj}(\tilde{t}_{kj}^+) = \tilde{y}_{kj} + \delta_{kj}^+$, $l = 1, \dots, n$, $l \neq kj$, $i = 1, \dots, m$.

Непрерывное изменение структуры. Отключение S_{kj} . Предположим, что при $t < t_{kj}^-$ динамика системы S задается уравнениями (1). Пусть $y_{kj}(t_{kj}^-) = \tilde{y}_{kj}$.

Также полагаем, что $g_{k1, \dots, km}^{kj}(\mathbf{X}_{k1}(t_{kj}^-), \dots, \mathbf{X}_{km}(t_{kj}^-)) < 0$. Пусть при $t \geq t_{kj}^-$, $\mathbf{X}_{kj}(t) \neq 0$ динамика системы S задается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{ki} &= f_{k1, \dots, km}^{-ki}(\mathbf{X}_{k1}, \dots, \mathbf{X}_{ki}, \dots, \mathbf{X}_{km}), \quad i = 1, \dots, m; \\ \dot{y}_l &= g_{k1, \dots, km}^{-l}(\mathbf{X}_{k1}, \dots, \mathbf{X}_{kj}, \dots, \mathbf{X}_{km}), \quad l = 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где функции $f_{k1, \dots, km}^{-ki}$, $g_{k1, \dots, km}^{-l}$ обеспечивают существование и единственность решений системы (6). При этом полагаем, что в области $\{\|\mathbf{X}_{kj}\| \leq \|\mathbf{X}_{kj}(t_{kj}^-)\|\}$

$$f_{k1, \dots, km}^{-kj}(\mathbf{X}_{k1}, \dots, \mathbf{X}_{kj}, \dots, \mathbf{X}_{km}) < -\alpha_{kj}^- < 0, \quad (7)$$

где α_{kj}^- — заданная постоянная, кроме того,

$$g_{k1, \dots, km}^{-kj}(\mathbf{X}_{k1}(t_{kj}^-), \dots, \mathbf{X}_{kj}(t_{kj}^-), \dots, \mathbf{X}_{km}(t_{kj}^-)) < 0.$$

Далее, наличие условия (7) позволяет определить момент времени \hat{t}_{kj} , такой что $\mathbf{X}_{kj}(\hat{t}_{kj}) = 0$. При этом возможны два случая: 1) траектория системы (6), находясь в области, для которой $y_{kj} < \tilde{y}_{kj}$, попадает на множество $\mathbf{X}_{kj} = 0$; 2) траектория системы (6) сначала при $t = \tilde{t}_{kj} < \hat{t}_{kj}$ попадает на плоскость $y_{kj} = \tilde{y}_{kj}$.

Рассмотрим оба случая:

1) с момента попадания траектории на множество $\mathbf{X}_{kj} = 0$ динамика системы S задается уравнениями (5); таким образом, происходит отключение подсистемы S_{kj} ;

2) после попадания траектории на плоскость $y_{kj} = \tilde{y}_{kj}$ из области $y_{kj} < \tilde{y}_{kj}$ полагаем, что динамика системы S задается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{ki} &= f_{k1, \dots, km}^{+ki}(\mathbf{X}_{k1}, \dots, \mathbf{X}_{ki}, \dots, \mathbf{X}_{km}), \quad i = 1, \dots, m; \\ \dot{y}_l &= g_{k1, \dots, km}^{+l}(\mathbf{X}_{k1}, \dots, \mathbf{X}_{kj}, \dots, \mathbf{X}_{km}), \quad l = 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где функции $f_{k1, \dots, km}^{+ki}$, $g_{k1, \dots, km}^{+l}$ обеспечивают существование и единственность решения.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} g_{k1, \dots, km}^{+kj}(\mathbf{X}_{k1}(\tilde{t}_{kj}), \dots, \mathbf{X}_{kj}(\tilde{t}_{kj}), \dots, \mathbf{X}_{km}(\tilde{t}_{kj})) &\geq 0, \\ g_{k1, \dots, km}^{-kj}(\mathbf{X}_{k1}(\tilde{t}_{kj}), \dots, \mathbf{X}_{kj}(\tilde{t}_{kj}), \dots, \mathbf{X}_{km}(\tilde{t}_{kj})) &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При этом функции $g_{k1,\dots,km}^{+kj}$ обладают свойством положительного скачка: гарантируют попадание траектории на плоскость $y_{kj} = \tilde{y}_{kj} + \delta_{kj}^+$, после чего динамика системы S задается уравнениями (1). Это означает, что отключения подсистемы S_{kj} не произошло („ложная тревога“).

Подключение S_{kj} . Пусть динамика S задается системой (5), и в некоторый момент времени t_{kj}^+ имеем $y_{kj}(t_{kj}^+) = \tilde{y}_{kj}$. При этом полагаем

$$g_{k1,\dots,k(j-1),k(j+1),\dots,km}^{kj}(\mathbf{X}_{k1}(t_{kj}^+), \dots, \mathbf{X}_{k(j-1)}(t_{kj}^+), \mathbf{X}_{k(j+1)}(t_{kj}^+), \dots, \mathbf{X}_{km}(t_{kj}^+)) > 0.$$

Далее, при $t \geq t_{kj}^+$ динамика S задается системой (8), для которой, помимо условия (9) и свойства положительного скачка для $g_{k1,\dots,km}^{+kj}$, до момента попадания траектории на плоскость $y_{kj} = \tilde{y}_{kj} + \delta_{kj}^+$ выполняется условие

$$|f_{k1,\dots,km}^{+kj}(\mathbf{X}_{k1}, \dots, \mathbf{X}_{kj}, \dots, \mathbf{X}_{km})| > \alpha_{kj}^+ > 0,$$

где α_{kj}^+ — заданная постоянная.

В результате динамика S задается системой (1). Происходит подключение подсистемы S_{kj} .

О п р е д е л е н и е. Будем называть построенную выше математическую модель системой с переменной размерностью (СПР) с разрывным или непрерывным изменением структуры.

Траектория СПР состоит из участков, соответствующих временным интервалам, на которых структура системы не изменяется. При этом каждый участок траектории порождает последовательность структур $\gamma^{(k)}$, т.е. структурную траекторию. Задача стабилизации заданной структуры в случае линейной системы решается в работе [8].

Пример. Рассмотрим систему m связанных между собой твердых тел P_k , уравнения движения которых имеют вид: $f_k(\omega_k, \dot{\omega}_k, v_k, \dot{v}_k, u_k) = 0$, где ω_k, v_k — абсолютные угловая скорость k -го тела и скорость относительно неподвижной точки O_k ; u_k — управляющий момент сил, приложенных к k -му телу. Пусть в каждом теле выделен орт \mathbf{r}_k , а в пространстве задана совокупность ортов \mathbf{d}_k . Задача состоит в стабилизации системы тел, т.е. в построении управлений u_k , при которых $\mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{d}_k$ при $t \rightarrow \infty$. Введем дополнительное не прямое управление w , такое что $\dot{w} = M - (|u_1| + \dots + |u_m|)$, где $M = M(t)$ — пороговая кусочно-постоянная функция, $|u_k|$ — модуль вектора u_k . Пусть задана бесконечная совокупность постоянных $w_i : w_i < w_{i+1}, i = 1, 2, \dots$. Будем полагать, что при $w \in (w_k, w_{k+1})$ в состав системы входят тела P_1, \dots, P_k . При достижении переменной значения w_k происходит отключение тела P_k , а при достижении значения w_{k+1} — подключение тела P_{k+1} . Переменная w характеризует запас энергии, имеющейся в распоряжении управляющего органа системы и затрачиваемой на стабилизацию. Если этот запас достаточно велик, то подключается дополнительный объект, в противном случае отключается один из объектов. Таким образом, построена саморазвивающаяся механическая система с двухуровневым управлением: посредством управления u_k решается задача стабилизации, а посредством параметра w изменяется структура системы в зависимости от наличия энергии, значение которой может регулироваться изменением функции M , зависящей, в свою очередь, от параметров, характеризующих движение системы.

Предложенный подход, который можно назвать методом динамической декомпозиции, позволяет аналитически исследовать сложные системы с переменной структурой и размерностью, используя на различных стадиях их функционирования более простые, по сравнению с исходной, модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллов А. Н. Динамическая декомпозиция и устойчивость структур // Математический анализ и его приложения: Сб. / Под ред. В. В. Мазалова. Чита: Изд-во Читинск. пед. ин-та, 1996. Вып. 2. С. 20—24.
2. Шильяк Д. Децентрализованное управление сложными системами. М.: Мир, 1994. 576 с.
3. Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Киев: Наукова думка, 1984. 473 с.
4. Матросов В. М., Маликов А. И. Вектор-функции Ляпунова в анализе динамических систем со структурными изменениями // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 1998. Вып. 2. С. 47—54.
5. Охтилев М. Ю., Соколов Б. В., Юсупов Р. М. Интеллектуальные технологии мониторинга и управление структурной динамикой сложных динамических объектов. М.: Наука, 2006. 410 с.
6. Москвин Б. В., Михайлов Е. П., Павлов А. Н., Соколов Б. В. Комбинированные модели управления структурной динамикой информационных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2006. Т. 49, № 11. С. 7—12.
7. Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967. 336 с.
8. Кириллов А. Н. Управление многостадийными технологическими процессами // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. 2006. Вып. 4. С. 127—131.

Сведения об авторе

Александр Николаевич Кириллов — канд. физ.-мат. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, кафедра высшей математики; E-mail: krlivaleksandr@rambler.ru

Рекомендована кафедрой
высшей математики

Поступила в редакцию
18.09.08 г.