УДК 519.1

В. Т. Доможиров

МЕТОД УПОРЯДОЧЕНИЯ СОЧЕТАНИЙ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧАХ СТРУКТУРНОЙ ДИНАМИКИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается проблема упорядочения основных объектов комбинаторного анализа. Приводится метод упорядочения сочетаний.

Ключевые слова: *сочетание, порядковый номер сочетания, позиция элемента сочетания.*

Введение. Изучение структурной динамики технических и организационных систем во взаимосвязи с изменениями их свойств базируется на упорядочении структур системы. Упорядочение осуществляется по различным признакам применительно к контексту решаемых задач. Вместе с тем упорядочение структуры системы реализуется на основе знаний об ее элементах и связях между ними вне зависимости от прикладного назначения системы. Такое упорядочение может быть осуществлено с применением метода упорядочения сочетаний, рассматривающего структуры в качестве объекта комбинаторики. Среди проблем комбинаторного анализа подобные задачи не обозначены [1—6]. Проблема упорядочения множества перестановок, размещений, сочетаний и иных комбинаторных конструкций является актуальной не только для исследований структур технических систем, но и для изучения многопараметрических зависимостей и множественных отношений других объектов дискретной природы.

Упорядочение сочетаний на основе определения их порядкового номера. Рассмотрим сочетания из m элементов по k. Общее число сочетаний без повторений определяется известной формулой [1]

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}. \qquad (1)$$

Поставим задачу упорядочения сочетаний, число которых определяется соотношением (1). При этом в качестве результата упорядочения сочетаний будем рассматривать их последовательность, построенную в виде возрастания порядковых номеров сочетаний.

Рассмотрим некоторое множество из m элементов, представляющих собой позиции для размещения на них k объектов, обращая внимание при этом только на то, какие из позиций в рассматриваемом сочетании заняты объектами, и имея в виду, что на одной позиции может находиться не более одного из k объектов и все объекты размещены.

Присвоим позициям порядковые номера. Упорядочим позиции в соответствии с последовательностью их порядковых номеров. Обозначим сочетание последовательностью номеров позиций объектов. Тогда в качестве элементов, образующих сочетание, выступают номера позиций, занятых объектами, а обозначение, например, сочетания из трех объектов последовательностью (3, 6, 12) соответствует тому, что один объект находится на третьей позиции, один — на шестой, и еще один объект — на двенадцатой позиции. Таким образом, все сочетания различаются хотя бы одним из номеров позиций объектов, и если удастся определить номера сочетаний по номерам позиций образующих их объектов, то поставленная задача будет решена.

Формально поставленная задача заключается в построении отображения множества k-элементных подмножеств на множество натуральных чисел.

Примем, что каждое из m чисел соответствует некоторой позиции, которую может занять один из k объектов.

Введем следующие обозначения: $I=\{i \mid i = 1{:}k\}$ — множество индексов, $I \subset N$, N — множество натуральных чисел; $B = \{ b_i \}$ — множество позиций, $B \subset N$; $b_i = (1,m)$, $i =(1,k)$, $m = |B|$ — число позиций, которые могут быть заняты элементами сочетания, k — число элементов сочетания; $\mathrm{st} = (b_1, b_2,\ldots, b_i, \ldots, b_k)$ — последовательность k элементов сочетания. Примем, что $b_i < b_j\ \forall\, i, j \in I{:}\ i < j,\ b_i , b_j \in B$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. $\forall\ I = \{ i \}\ |I| = k\ B = \{ b_i \}\ |B| = m,\ k \le m$, таких что $b_i < b_j$, если $i < j$, где $b_i, b_j \in B,\ i, j \in I$, существует отображение

$$\psi{:}\ \mathrm{St} \rightarrow N_{\mathrm{St}},$$

где $N_{\mathrm{St}} \in N$, $\mathrm{st} \in \mathrm{St} \subset \beta(B)$, $\beta(B)$ — булеан множества B, St — множество подмножеств мощности k множества B, и это отображение задается формулой

$$N_{\mathrm{St}} = 1 + \sum_{i=1}^{k} C_{b_i - 1}^{i}\,. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим комбинаторное равенство [1, 4]

$$C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}. \tag{3}$$

Рекурсивно применяя это равенство к последнему слагаемому в правой части, получаем представление равенства (3) в виде суммы $k + 1$ слагаемых:

$$C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-2}^{k-1} + \ldots + C_{m-k-1}^0\,. \tag{4}$$

Обозначим $b_k = m$, $b_{k-1} = m-1$, …, $b_1 = m-k+1$, $b_0 = m-k$.

Перепишем равенство (4) в новых обозначениях:

$$C_{b_k}^k = C_{b_k-1}^k + C_{b_{k-1}-1}^{k-1} + \ldots + C_{b_0-1}^0\,. \tag{5}$$

С учетом того, что для любых $m > 0$, $k > 0$: $m \ge k$, $C_{b_k}^k = n$, где $n \in N$, и того, что $C_{b_0-1}^0 = 1$, равенство (5) записывается в виде

$$N_{\mathrm{St}} = 1 + \sum_{i=1}^{k} C_{b_i - 1}^{i}\,. \tag{6} \ \blacksquare$$

Приведем без доказательства основные из следствий утверждения 1.

1. В силу произвольности значений m и k (по условиям утверждения 1) порядковый номер может быть определен для всякого сочетания с произвольным числом элементов, удовлетворяющим условиям утверждения.

2. Номера k-элементных сочетаний, полученные при меньших значениях m, не изменяются с увеличением общего числа элементов m, на которых рассматриваются k-элементные сочетания.

3. Если $\forall\ k{:}\ b_k = k$, то $N_{\mathrm{St}} = 1$.

4. Равенство (2) определяет правила построения сочетаний в последовательности их порядковых номеров. Основные правила построения последовательности k-элементных сочетаний:

— в исходном состоянии элементы сочетания размещены на позициях с номерами 1, 2, ..., k;

— для любого сочетания номерá позиций его элементов различны и упорядочены в порядке возрастания;

— очередное сочетание получается из текущего увеличением на единицу номера позиции одного из элементов;

— номер позиции данного элемента сочетания увеличивается на единицу с образованием очередного сочетания, если на множестве позиций с номерами, не превосходящими номера позиции данного элемента, не существует пары соседних элементов, номера позиций которых отличаются больше, чем на единицу; при этом увеличение номера позиции элемента на единицу сопровождается возвращением всех элементов с меньшими номерами позиций в исходное состояние.

Изложенные правила позволяют строить бесконечную последовательность k-элементных сочетаний, номера которых удовлетворяют равенству (2).

Определение позиций элементов сочетания по его порядковому номеру. Рассмотрим обратную задачу: по порядковому номеру N_{St} сочетания найти позиции b_i, занимаемые каждым i-м элементом из k элементов сочетания.

Решение обратной задачи основывается на следующем утверждении.

Утверждение 2.

Для любых натуральных чисел N_{St}, b_k , m, k, таких что $N_{\mathrm{St}} > 1$, $k > 0$, $b_k \geq k$, $m \geq k$, справедливо равенство

$$b_k = \left[\sqrt[k]{k!(N_{\mathrm{St}}-1)} + r(b_k, k)\right], \tag{7}$$

где $r(b_k, k) > 0$ при $k > 1$, $r(b_k, k) = 0$ при $k=1$, [ ] — символ округления.

Доказательство. Чтобы подчеркнуть тот факт, что значение b_k определено по значению N_{St} для k-элементного сочетания, обозначим $N_{\mathrm{St}} = N_{\mathrm{St}}(b_k, k)$.

Предположим, что имеет место равенство

$$N_{\mathrm{St}}(b_k, k) = 1 + \sum_{i=1}^{k} C_{b_i-1}^{i}. \tag{8}$$

В силу равенства (2)

$$\sum_{i=1}^{k} C_{b_i-1}^{i} \leq C_{b_k}^{k}, \tag{9}$$

поэтому справедливо неравенство

$$N_{\mathrm{St}}(b_k, k) - 1 \leq C_{b_k}^{k}, \tag{10}$$

которое запишем в следующем виде:

$$N_{\mathrm{St}}(b_k, k) - 1 \leq \frac{b_k!}{k!(b_k - k)!}. \tag{11}$$

Преобразуя неравенство (11):

$$(N_{\mathrm{St}}(b_k, k)) - 1)k! \leq (b_k - r(b_k, k))^k, \tag{12}$$

где $r(b_k, k)$ может быть определено из соотношения

$$(b_k - r(b_k, k))^k = \frac{b_k!}{(b_k - k)!},$$

получаем условие для определения искомого значения b_k:

$$b_k \geq \sqrt[k]{k!(N_{\mathrm{St}}(b_k, k) - 1)} + r(b_k, k), \tag{13}$$

где b_k — позиция, занимаемая старшим членом рассматриваемого сочетания.

Так как по условиям b_k — натуральное число, его значение получаем, округляя значение правой части неравенства (13):

$$b_k = \left[\sqrt[k]{k!(N_{\mathrm{St}}-1)} + r(m, k)\right]. \tag{14} \blacksquare$$

Применим доказанное утверждение для решения сформулированной обратной задачи.

Значение b_k — номера позиции k-го элемента сочетания — найдено при доказательстве утверждения. Найдем номер позиции (k–1)-го элемента сочетания. Для этого полученное значение b_k подставляем в равенство (8), используя соотношение (3):

$$N_{\mathrm{St}}(b_k, k) - 1 = C_{b_k-1}^{k} + C_{b_k-1}^{k-1}. \tag{15}$$

Обозначим

$$N_{\mathrm{St}}\,(b_{k-1},\,(k\text{–}1)) = N_{\mathrm{St}}\,(b_k,\,k\,) - C_{b_k-1}^{k} \qquad (16)$$

и запишем равенство (15) в следующем виде:

$$N_{\mathrm{St}}\,(b_{k-1},\,(k\text{–}1)) - 1 = C_{b_{k-1}-1}^{k-1} + C_{b_{k-2}-1}^{k-2} + \ldots + C_{b_1-1}^{1}\,. \qquad (17)$$

Используя соотношения (8)—(14), находим значение номера позиции b_{k-1}. Для нахождения номеров позиций остальных элементов сочетания повторяем процедуру, определяемую соотношениями (8)—(17). Следует заметить, что в силу существенной дискретности последовательности величин C_m^k при решении обратной задачи достаточно использовать приближенное значение величины $r(m,k)$, которое в практических случаях может быть принято равным $k/2$.

Совокупность правил построения сочетаний в последовательности их порядковых номеров и процедур нахождения номеров позиций элементов сочетания по его номеру составляет метод упорядочения сочетаний.

Таким образом, изложенный в настоящей статье метод упорядочения сочетаний определяет способ построения бесконечной последовательности k-элементных сочетаний, а также устанавливает однозначную зависимость между порядковым номером k-элементного сочетания в этой последовательности сочетаний и набором позиций образующих его элементов.

Рассмотренный метод находит применение в исследованиях структурно-функциональной динамики сложных систем, в задачах живучести (выживаемости) сложных систем, при разработке реляционных баз данных для реализации отношений „многие-ко-многим“ без введения дополнительных отношений в структуру базы данных, а также в других приложениях, реализующих многозначные отношения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виленкин Н. Я.*, *Виленкин А. Н., Виленкин П. А.* Комбинаторика. М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. 400 с.

2. *Липский В.* Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. 213 с.

3. *Баннаи Э., Ито Т.* Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. М.: Мир, 1987. 375 с.

4. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: Учеб. пособие / Под ред. *К. А. Рыбникова.* М.: Наука, 1982. 368 с.

5. *Цвиркун А. Д.* Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука, 1982. 200 с.

6. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 324 с.

Сведения об авторе

Виктор Трофимович Доможиров — д-р воен. наук; Научно-производственная фирма „Центральное конструкторское бюро арматуростроения“, Санкт-Петербург; зам. директора по научной работе; E-mail: domojirov@ckba.ru

Рекомендована СПИИРАН

Поступила в редакцию 28.04.09 г.