

Е. Д. ЛИХОЛЕТОВ, А. В. УШАКОВ, А. Ю. ЦВЕНТАРНЫЙ

АНАЛИЗ ПЕРЕКРЕСТНЫХ СВЯЗЕЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КЛАССА „ДВУМЕРНЫЙ ВХОД — ВЫХОД“ С ОДНОТИПНЫМИ КАНАЛАМИ

Показывается, что работоспособность динамических систем класса „двумерный вход — выход“ с однотипными каналами и матрицей вращения перекрестных связей сохраняется, если ее аргумент не превышает запаса устойчивости по фазе сепаратного канала системы. Предлагается способ увеличения запаса устойчивости скалярных полиномиальных динамических моделей.

Ключевые слова: динамическая система, перекрестные связи, матрица вращения, запас устойчивости.

Постановка задачи. Рассматривается проблема построения автоматических систем, встраиваемых в измерительные мониторинговые комплексы, использующие принцип следящего преобразования. Такие системы, как правило [1—5], являются двухканальными с однотипным исполнением каналов и характеризуются наличием перекрестных межканальных связей с матрицей типа „матрица вращения“ (МВ). Наличие перекрестных связей при определенных значениях аргумента μ МВ становится причиной потери работоспособности двухканальных систем при устойчивых сепаратных каналах.

В настоящей статье рассматривается проблема установления связи аргумента μ МВ с запасом устойчивости $\Delta\varphi$ по фазе сепаратных однотипных каналов, степень различия которых оказывается важным фактором.

Определение связи между предельно допустимым значением аргумента матрицы вращения и запасом устойчивости сепаратных каналов. Основной результат.

Рассмотрим динамическую систему (ДС) класса „двумерный вход — выход“, структурная схема которой приведена на рис. 1. Здесь $g_i, \varepsilon_i, y_i, i=1, 2$, — внешнее воздействие, ошибка слежения и выход i -го сепаратного канала соответственно; μ — аргумент матрицы межканальных связей (матрицы вращения) $T = \text{col}\{[\cos \mu \quad \sin \mu], [-\sin \mu \quad \cos \mu]\}$; v_1, v_2 — переменные, образующие двумерный выход матрицы T ; $W(s)$ — передаточная функция прямой цепи i -го сепаратного канала спроектированной системы, имеющая представление

$$W(s) = M(s)N^{-1}(s), \quad (1)$$

где $M(s)$, $N(s)$ — полиномы с вещественными коэффициентами степенью m и n ($m < n$) соответственно, образующие при $\mu=0$ характеристический полином $D(s)$ каждого сепаратного канала в замкнутом виде в силу соотношения $D(s) = N(s) + M(s)$.

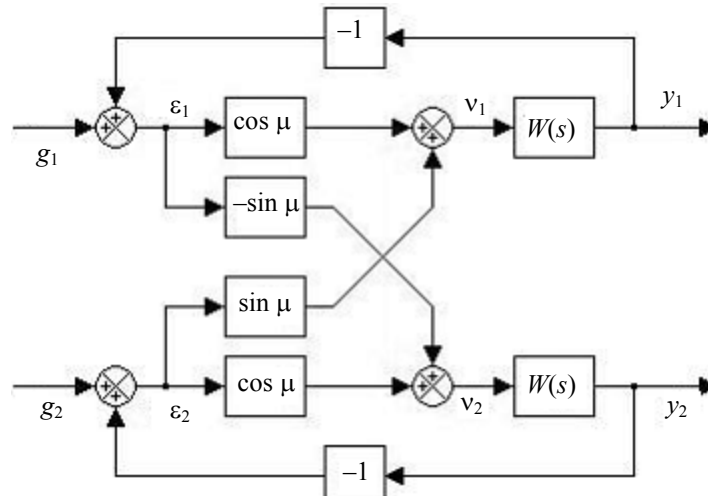


Рис. 1

Для аналитического описания системы (см. рис. 1) воспользуемся скалярным комплексированным представлением, опирающимся на приведенные в работах [6—9] результаты, модифицированные применительно к представлению матрицы межканальных связей в виде матрицы вращения.

Утверждение 1. Двухканальная система (см. рис. 1) с помощью процедуры комплексирования векторных переменных может быть приведена к скалярному представлению с передаточной функцией $W_{\text{эКВ}}(s)$ прямой цепи вида

$$W_{\text{эКВ}}(s) = e^{-j\mu} W(s). \quad (2)$$

Доказательство. Для рассматриваемой схемы справедливы следующие соотношения:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(s) & 0 \\ 0 & W(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_2(s) \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$y_1(s) = W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\sin \mu)\varepsilon_2(s), \quad (4)$$

$$y_2(s) = -W(s)(\sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)\varepsilon_2(s). \quad (5)$$

Введем в рассмотрение комплексированные переменные двухканальной системы:

$$g^* = g_1 + jg_2, \quad \varepsilon^* = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2, \quad y^* = y_1 + jy_2. \quad (6)$$

Умножив соотношение (5) на $j = \sqrt{-1}$, в результате получим

$$jy_2(s) = -W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)). \quad (7)$$

Просуммируем выражения (4) и (7) и воспользуемся представлениями (6):

$$\begin{aligned} y^*(s) &= y_1(s) + jy_2(s) = W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\sin \mu)\varepsilon_2(s) - \\ &\quad - W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) - W(s)(j \sin \mu)(j\varepsilon_2(s)) - W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)\{\cos \mu - j \sin \mu\}\varepsilon_1(s) + W(s)\{\cos \mu - j \sin \mu\}(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)e^{-j\mu}(\varepsilon_1(s) + j\varepsilon_2(s)) = e^{-j\mu}W(s)\varepsilon^*(s) = W_{\text{эКВ}}(s)\varepsilon^*(s). \end{aligned} \quad (8) \blacksquare$$

Доказанное утверждение делает справедливыми положения утверждения 2.

Утверждение 2. Двухканальная система (см. рис. 1) с симметричными каналами, описываемая передаточной функцией (2) относительно комплексированных переменных $\varepsilon^*(s)$, $y^*(s)$, оказывается на границе устойчивости, если аргумент μ матрицы T удовлетворяет условию

$$|\mu| = \Delta\varphi, \tag{9}$$

и становится неустойчивой при

$$|\mu| > \Delta\varphi. \tag{10}$$

Доказательство. В силу критерия устойчивости Найквиста если выполняется условие (9), то передаточная функция (2) характеризуется нулевым запасом устойчивости, при этом ее частотный годограф проходит через критическую точку $(-1; 0)$, а при выполнении условия (10) он охватывает эту точку. ■

Примечание. Если аргумент μ оказывается интервальной величиной $[\mu] = [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ согласно работам [9, 10], то в неравенстве (10) следует положить $\mu = \max \{ |\underline{\mu}|, |\bar{\mu}| \}$.

Максимизация запаса устойчивости сепаратных каналов в стандартных полиномиальных динамических моделях (ПДМ) на основе модальных представлений. Решение этой задачи осуществляется в соответствии со следующей логикой. Вычленим из структуры двухканальной системы (см. рис. 1) сепаратный канал с передаточной функцией (1), которую представим в виде

$$W(s) = \frac{M(s)}{D(s) - M(s)} = \frac{1}{s} \frac{v_n}{s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} v_i s^{n-1-i}}. \tag{11}$$

В замкнутом виде уравнение (11) формирует передаточную функцию „вход — выход“:

$$\Phi(s) = \frac{y_i(s)}{g_i(s)} = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{v_n}{s^n + \sum_{i=1}^n v_i s^{n-i}}. \tag{12}$$

Оценка запаса устойчивости сепаратного канала (12) осуществляется согласно следующей процедуре.

1. Задать ПДМ с характеристическим полиномом $D(s)$, имеющим известные (Баттерворта, Ньютона) распределения мод или их модификации.

2. На основе выбранного в п. 1 представления ПДМ вычислить передаточную функцию разомкнутой системы вида (11).

3. Оценить запас устойчивости по фазе с помощью критерия устойчивости Найквиста, примененного к передаточной функции (11), с использованием процедуры „BODE“ в программе MatLab Simulink.

При модификации распределения мод Баттерворта (МРМБ) изменяемым параметром является величина $\psi \in [\pi/2; 0]$ их локализации в левой полуплоскости на единичной окружности в секторе раскрытом 2ψ .

На рис. 2 приведен график зависимости $\Delta\varphi(\psi)$ для МРМБ с первого порядка по пятый ($n=\overline{1,5}$). Для всех порядков ПДМ обнаруживается общая тенденция увеличения запаса устойчивости с уменьшением параметра ψ раскрыва сектора.

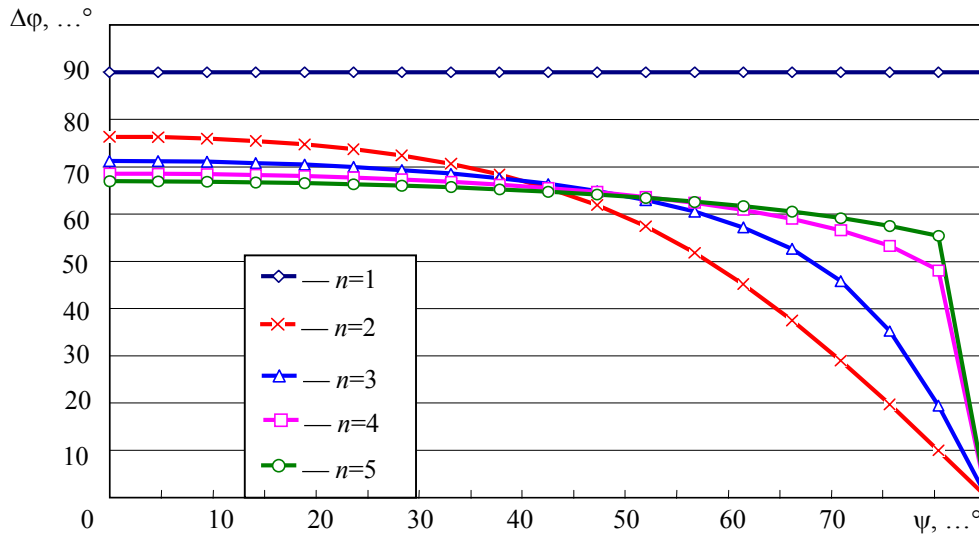


Рис. 2

В табл. 1 приведены значения $\Delta\varphi$ для ПДМ с биномиальным распределением мод Ньютона (БРМН) при $n=\overline{1,5}$, здесь в аналитическом представлении полинома $D(s, \omega_0)$ ω_0 — характеристическая частота БРМН. Сравнение величин $\Delta\varphi$, представленных на рис. 2 и в табл. 1, показывает, что запас устойчивости по фазе с БРМН превышает запасы устойчивости с МРМБ для равных порядков ПДМ при $\psi \neq 0$, а при $\psi = 0$ эти величины совпадают. Таким образом, основное направление дальнейших модификаций распределений мод ПДМ будем связывать с возможностями модифицируемости БРМН.

Таблица 1

n	Аналитическое представление полинома $D(s, \omega_0)$	$\Delta\varphi, \dots^\circ$
1	$s + \omega_0$	90
2	$(s + \omega_0)^2$	76,34
3	$(s + \omega_0)^3$	71,25
4	$(s + \omega_0)^4$	68,58
5	$(s + \omega_0)^5$	66,93

В качестве модифицируемой версии распределения мод используется версия биномиального распределения, параметризованная коэффициентом ν , записываемая в виде

$$D(\lambda) = D(\lambda, \omega_0, \nu) = \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda + \omega_0 (1 + i\nu)), \quad (13)$$

где λ — корень характеристического полинома.

Очевидно, что при $\nu = 0$ модифицированное биномиальное распределение принимает вид канонического биномиального.

При построении модифицированного БРМН в виде (13) учитывается доминирование одной моды над остальными, в соответствии с которым обеспечивается выбор параметра ν . Следует ожидать, что при $\nu \geq 10$ система с характеристическим полиномом вида (13) будет максимально приближена к апериодическому звену 1-го порядка.

На рис. 3 приведен график зависимости $\Delta\varphi(v)$ для ПДМ с первого порядка по пятый ($n=1, 5$). Для всех порядков ПДМ обнаруживается общая тенденция увеличения запаса устойчивости с увеличением параметра v .

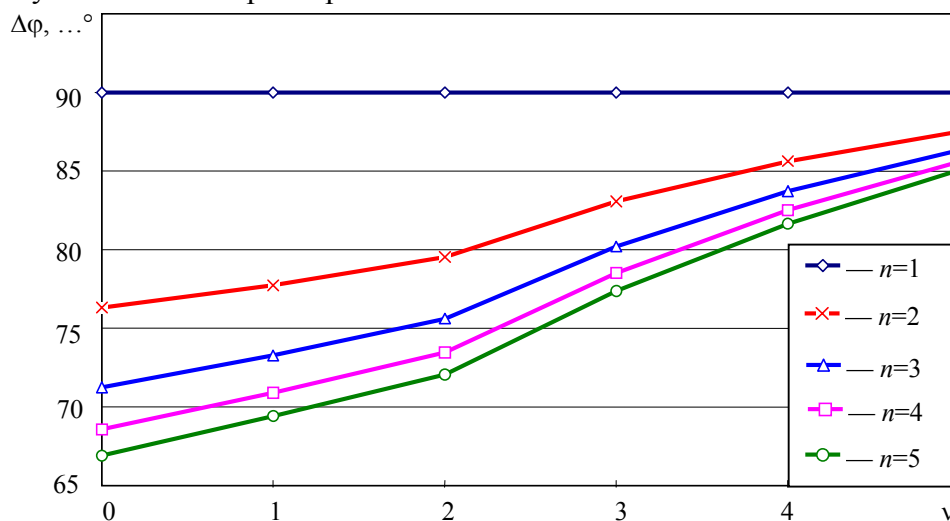


Рис. 3

Для обеспечения работоспособности двухканальной динамической системы с перекрестными связями путем повышения запаса устойчивости сепаратных каналов необходимо решить проблему степени свободы назначения параметров ω_0 и v . Для решения этой проблемы будут полезны положения следующего утверждения.

Утверждение 3. Если ПДМ сепаратного канала системы имеет характеристический полином вида (13), то добротность $D_i = \dot{g}_i / \varepsilon_{i \text{ уст}}$ (где $\varepsilon_{i \text{ уст}}$ — установившаяся ошибка в i -м сепаратном канале) канала по скорости определяется в соотношении

$$D_i = \left\{ \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{(1+v)\omega_0} + \frac{1}{(1+2v)\omega_0} + \dots + \frac{1}{(1+(n-1)v)\omega_0} \right\}^{-1}. \quad (14)$$

Доказательство строится на использовании аналитического представления добротности по скорости сепаратного канала на основе выражения (11) в виде $D_i = v_n(\omega_0) / v_{n-1}(\omega_0)$. Если с помощью соотношения (13) сформировать вид коэффициентов $v_{n-1}(\omega_0)$ и $v_n(\omega_0)$, то их отношение приводит к уравнению (14). ■

Построение банка моделей ПДМ с динамическими показателями, параметризованными характеристической частотой ω_0 и аргументом μ МВ. Полученные результаты по выбору полиномиальной модели с максимальным запасом устойчивости по фазе следует дополнить таблицей показателей $\{\beta_j, j=\overline{1, p}\}$ качества процессов в переходном и установившемся режимах сепаратного канала, вмонтированного в структуру двухканальной системы с перекрестными связями, характеризующимися аргументом μ . Таким образом, таблица показателей будет содержать их значения $\beta_j(v, \omega_0, \mu)$.

В качестве примера в табл. 2 приведены значения показателей $\beta_j(v, \omega_0, \mu)$ для ПДМ третьего порядка ($n=3$) с модифицированным БРМН при $v=5, v=10, v=20$ и $\mu \in [0, 60^\circ] \forall \omega_0$; в таблице: σ — перерегулирование; t_σ — момент достижения переходной характеристикой ее максимального значения; t_1 — время первого, после t_σ , пересечения переходной характеристикой границы допустимой ошибки $\Delta=5\%$; t_2 — время последнего пересечения

переходной характеристикой границы допустимой ошибки $\Delta=5\%$. Длительность переходного процесса $t_{пр}$ определяется выражением $t_{пр} = \max\{t_1, t_2\}$.

Таблица 2

μ, \dots°	$\nu=5$					$\nu=10$					$\nu=20$				
	$\sigma, \%$	t_σ	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$\frac{D_i}{\omega_0}$	$\sigma, \%$	t_σ	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$\frac{D_i}{\omega_0}$	$\sigma, \%$	t_σ	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$\frac{D_i}{\omega_0}$
0	0	—	—	—	0,769	0	—	—	—	0,87	0	—	—	—	0,930
6	0	—	—	—	0,774	0	—	—	—	0,874	0	—	—	—	0,935
12	0	—	—	—	0,786	0	—	—	—	0,889	0	—	—	—	0,951
18	0	—	—	—	0,809	0	—	—	—	0,914	0	—	—	—	0,978
24	1	$\frac{3,54}{\omega_0}$	—	—	0,842	0	—	—	—	0,952	0	—	—	—	1,018
30	1,5	$\frac{3,07}{\omega_0}$	—	—	0,888	1,06	$\frac{3,03}{\omega_0}$	—	—	1,004	0,7	$\frac{3,06}{\omega_0}$	—	—	1,074
36	3,8	$\frac{2,78}{\omega_0}$	—	—	0,951	2,7	$\frac{2,65}{\omega_0}$	—	—	1,075	2	$\frac{2,64}{\omega_0}$	—	—	1,15
42	7,7	$\frac{2,58}{\omega_0}$	$\frac{3,35}{\omega_0}$	—	1,035	5,6	$\frac{2,4}{\omega_0}$	$\frac{3,17}{\omega_0}$	$\frac{5,28}{\omega_0}$	1,17	4,2	$\frac{2,36}{\omega_0}$	—	—	1,252
48	13,6	$\frac{2,45}{\omega_0}$	$\frac{3,24}{\omega_0}$	—	1,149	10,28	$\frac{2,23}{\omega_0}$	$\frac{3,03}{\omega_0}$	$\frac{5,98}{\omega_0}$	1,3	8	$\frac{2,15}{\omega_0}$	$\frac{2,92}{\omega_0}$	$\frac{5,52}{\omega_0}$	1,39
54	22,4	$\frac{2,36}{\omega_0}$	$\frac{3,16}{\omega_0}$	—	1,307	17,4	$\frac{2,11}{\omega_0}$	$\frac{2,93}{\omega_0}$	$\frac{6,25}{\omega_0}$	1,479	13,8	$\frac{2,01}{\omega_0}$	$\frac{2,79}{\omega_0}$	$\frac{5,86}{\omega_0}$	1,583
60	37,6	$\frac{2,31}{\omega_0}$	$\frac{3,11}{\omega_0}$	$\frac{10,28}{\omega_0}$	1,539	27,8	$\frac{2,03}{\omega_0}$	$\frac{2,85}{\omega_0}$	$\frac{9,1}{\omega_0}$	1,739	22,4	$\frac{1,9}{\omega_0}$	$\frac{2,7}{\omega_0}$	$\frac{5,96}{\omega_0}$	1,861

Использование данных табл. 2 позволяет предложить следующую оформленную в виде алгоритма процедуру поканального синтеза систем класса „двумерный вход — выход“, основанную на использовании возможностей модального управления.

Алгоритм.

1. Сформулировать требования к значениям показателей качества проектируемой системы в переходном и установившемся режимах.

2. Произвести оценку возможного диапазона вариаций параметра μ — аргумента матрицы T — с последующим его представлением в виде интервального числа $[\mu] = [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$.

3. В силу доказанных утверждений принять $\mu = \max\{|\underline{\mu}|, |\bar{\mu}|\}$.

4. Произвести оценку порядка n исходной динамической модели сепаратного канала на основе модельных представлений образующих его функциональных компонентов и выбрать значение параметра ν .

5. Построить векторно-матричное (A, B, C) -представление исходной динамической модели сепаратного канала, рассматриваемого в процедуре синтеза как объект управления.

6. Осуществить выбор типа ПДМ (параметризованной коэффициентом ν , характеристической частотой ω_0 и аргументом μ), доставляющей системе в условиях наличия перекрестных связей динамические показатели, сформированные в п. 1.

7. Построить модальную модель на основе векторно-матричного (G, H) -представления ПДМ, выбранной при выполнении п. 6.

8. Осуществить канонический синтез [4—9, 10] сепаратных каналов двухканальной системы с использованием возможностей модельного управления.

9. Провести комплексное экспериментальное исследование в программе Matlab Simulink динамических показателей спроектированной двухканальной ДС.

Результаты компьютерного эксперимента. Для иллюстрации полученных результатов проведено исследование двух версий двухканальной динамической системы (см. рис. 1), каналы которых построены с использованием ПДМ третьего порядка с модифицируемым биномиальным распределением для значений $\nu=1$ и $\nu=10$ при $\omega_0=10 \text{ с}^{-1}$ и $\mu=0, 30$ и 75° .

Графики процессов в пространстве выходов двумерной системы при входном векторном скачкообразном единичном воздействии приведены на рис. 4, а—е.

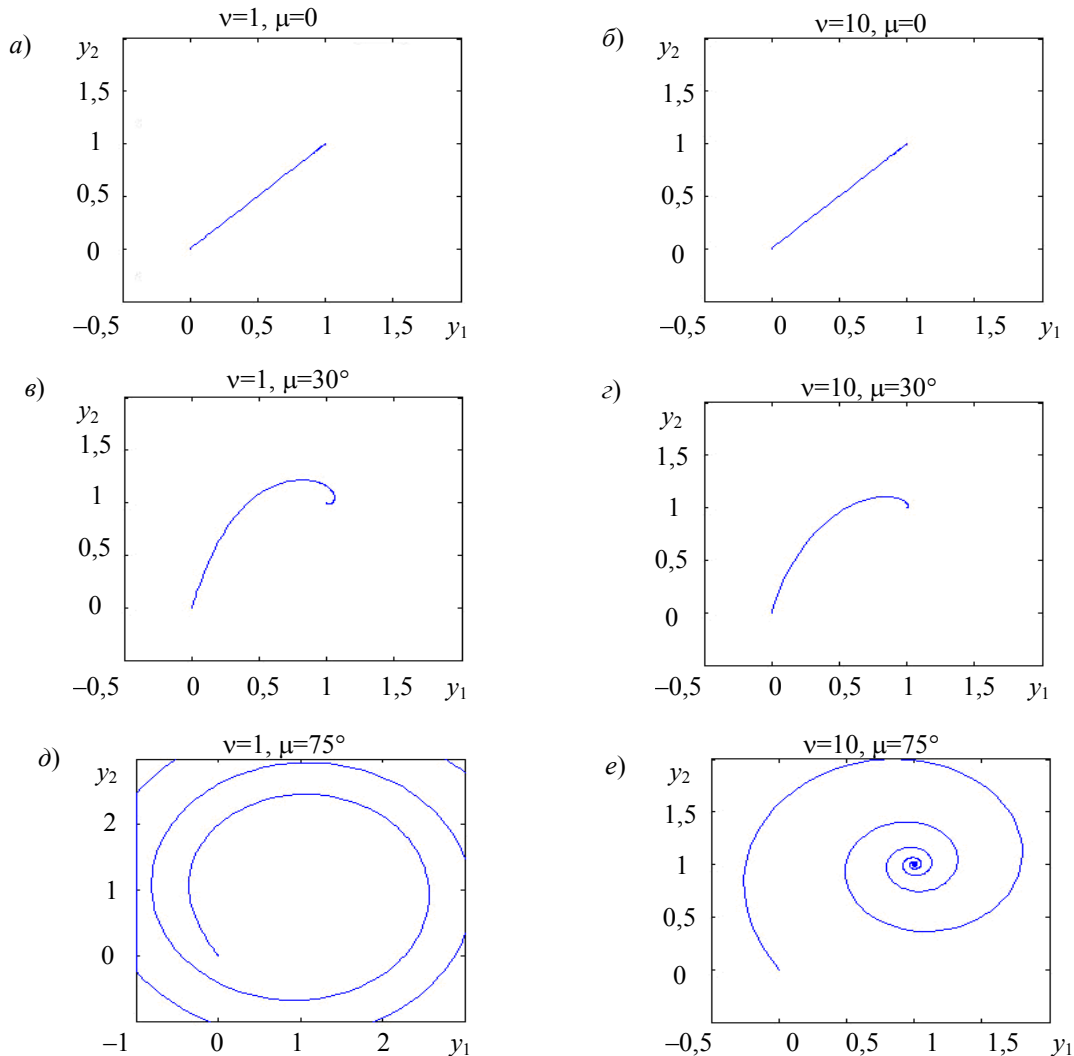


Рис. 4

ПДМ третьего порядка с модифицированным БРМН при $\nu=1$ обладает запасом устойчивости $\Delta\varphi=73,277^\circ$, а при $\nu=10$ — $\Delta\varphi=83,711^\circ$. Как и следовало ожидать, при $\mu=75^\circ$ и $\nu=1$ (см. рис. 4, д) система оказывается неработоспособной, в то время как при $\mu=75^\circ$ и $\nu=10$ (см. рис. 4, е) система остается работоспособной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акунов Т. А., Сударчиков С. А., Ушаков А. В. Синтез фотоэлектрической следящей системы на основе интервальных модельных представлений. Часть I. Построение интервальной модели компонентов системы // Изв. вузов. Приборостроение. 2004. Т. 47, № 1.
2. Акунов Т. А., Сударчиков С. А., Ушаков А. В. Синтез фотоэлектрической следящей системы на основе интервальных модельных представлений. Часть II. Синтез управления, обеспечивающего стабильные эллипсоидные показатели качества системы // Там же. 2004. Т. 47, № 2.
3. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления: Пер с англ. М: Мир, 1977.
4. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В. В. Григорьев, В. Н. Дроздов, В. В. Лаврентьев, А. В. Ушаков. Л.: Машиностроение, 1983.
5. Николаев П. В., Сабинин Ю. А. Фотоэлектрические следящие системы. Л.: Энергия, 1969.
6. Мирошник И. В. Теория автоматического управления: Линейные системы. СПб.: Питер, 2005.
7. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. СПб.: Профессия, 2003.
8. Ушаков А. В. Обобщенное модальное управление // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 3.
9. Никифоров В. О., Ушаков А. В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2002.
10. Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учеб. пособие / Под ред. А. В. Ушакова. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2008.

Сведения об авторах

- Евгений Дмитриевич Лихолетов** — студент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: bsboris@gmail.com
- Анатолий Владимирович Ушаков** — д-р. техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: ushakov-AVG@yandex.ru
- Артем Юрьевич Цвентарный** — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: Taifyn@nm.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
25.12.08 г.