

А. А. СИЗОВА

**МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ  
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ**

Рассматривается задача построения областей достижимости летательного аппарата при действии возмущений с неизвестными статистическими характеристиками. Граница области достижимости строится по точкам на основе решения вспомогательной конфликтной задачи, для которой предлагается итерационный алгоритм. Разработана программа, реализующая предложенный метод и демонстрирующая эффективность его применения.

**Ключевые слова:** область достижимости, конфликтная задача, система стабилизации, оптимальное управление.

При решении многих задач динамики полета летательного аппарата (ЛА) возникает проблема определения области возможных его положений в пространстве для различных моментов времени.

Пусть движение любой управляемой системы определяется векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z(t), u(t)),$$

где  $z^T = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  — вектор состояния системы;  $f^T = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  — непрерывная вектор-функция;  $u^T = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  — вектор сигнала управления, удовлетворяющий ограничению

$$u(t) \in U,$$

где  $U$  — допустимое множество управлений.

Заданы начальные условия

$$t = t_0, \quad z(t_0) = z_0.$$

*Областью достижимости* (ОД) управляемой системы в фазовом пространстве в момент времени  $T$  ( $T > t_0$ ) называется [1] множество всех состояний системы, в каждое из которых к моменту времени  $T$  возможен перевод системы из начального состояния  $z_0$  посредством выбора вектор-функции управления  $u(t)$ , удовлетворяющей заданным ограничениям.

Методы построения ОД находят применение при исследовании законов управления динамическими системами [2], при решении задач оптимального управления с фиксированным моментом окончания управляемого движения и сложными терминальными условиями [3]. Эти методы используются также при исследовании инвариантности управляемых систем [4], при решении задач векторной оптимизации [3], при идентификации динамических систем [5].

В частности, методы построения ОД эффективны при решении игровых задач управления [6, 7]. Например, при решении конфликтной задачи сближения — уклонения двух ЛА сигнал управления одного из них (преследователя) выбирается на основе анализа взаимного расположения ОД преследователя и преследуемого [6]. Или другой пример — для решения задач стабилизации: при наличии внешних возмущений и помех с неизвестными статистическими характеристиками управление целесообразно выбирать, основываясь на вычислении будущего гарантированного результата. Например, с учетом влияния ветра или взрывной волны можно считать, что воздействие имеет любые статистические характеристики, но ограничено по абсолютной величине. Рассматривать подобную задачу можно как дифференциальную игровую задачу с участием двух игроков. Первый игрок за счет выбора управления

стремится стабилизировать ЛА, а второй игрок, путем внесения помех и возмущений, действует наихудшим для первого игрока образом. Для решения данной задачи можно также использовать подход, основанный на анализе взаимного расположения ОД [6].

Рассмотрим приближенный алгоритм построения ОД на примере нелинейной системы стабилизации нормальной перегрузки ЛА при наличии возмущений с неизвестными статистическими характеристиками. Движение ЛА в вертикальной плоскости с учетом динамики системы стабилизации перегрузки определяется следующими дифференциальными уравнениями [8]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{c_x q S}{M} - g \sin \theta; & \frac{d\delta_B}{dt} &= \frac{1}{\tau} \{ k_{\text{пр}} \varepsilon - \delta_B \}; \\ \frac{d\theta}{dt} &= c_y^\alpha \alpha \frac{qS}{MV} + c_y^{\delta_B} \delta_B \frac{qS}{MV} - \frac{g \cos \theta}{V}; & \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta; \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \left( m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{\omega_z l}{V} + m_z^\xi \xi \right) q \frac{Sl}{J_z}; & \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta; \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z; \\ \alpha &= \vartheta - \theta; \quad \varepsilon = k_y (u - k_{ny} N_y) - k_\omega \omega_z; \quad N_y = \left( c_y^\alpha \alpha + c_y^{\delta_B} \delta_B \right) \frac{qS}{Mg}; \quad z^T = [V, \theta, \omega_z, \vartheta, \delta_B, x, y], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

здесь  $\theta$  — угол наклона траектории движения ЛА к горизонту;  $\omega_z$  — угловая скорость ЛА вокруг поперечной оси  $z$ ;  $\vartheta$  — угол тангажа;  $\delta_B$  — угол отклонения рулей высоты;  $\alpha$  — угол атаки;  $N_y$  — безразмерная нормальная перегрузка ЛА;  $M$  — масса ЛА;  $V$  — скорость ЛА;  $x, y$  — координаты ЛА в вертикальной плоскости;  $S$  — площадь миделя;  $q = \rho V^2 / 2$  — скоростной напор;  $\rho$  — плотность воздуха;  $\xi$  — возмущение;  $c_x$  — безразмерный коэффициент лобового сопротивления;  $c_y^\alpha, c_y^{\delta_B}$  — производные коэффициента подъемной силы по углам  $\alpha$  и  $\delta_B$ ;  $m_z^\alpha, m_z^{\delta_B}, m_z^{\bar{\omega}_z}, m_z^\xi$  — производные коэффициента аэродинамического момента по углам  $\alpha, \delta_B$  и по величинам  $\bar{\omega}_z, \xi$ ;  $\tau$  — постоянная времени рулевого привода;  $k_{\text{пр}}$  — коэффициент усиления рулевого привода;  $J_z$  — момент инерции;  $l$  — размах крыла;  $\varepsilon$  — сигнал, подаваемый на вход рулевого привода;  $k_y, k_{ny}, k_\omega$  — коэффициенты контура стабилизации нормальной перегрузки.

Структурная схема контура стабилизации перегрузки ЛА в продольной плоскости, соответствующая математической модели (1), представлена на рис. 1 (функция рулевого привода, учитывающая инерционность в работе его подвижных частей).

Будем считать начальное положение ЛА заданным:

$$t_0 = 0, \quad V(0) = V_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \omega_z(0) = \omega_{z_0}, \quad \delta_B(0) = \delta_{B_0}, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

а управляющий сигнал и возмущение ограниченными:

$$|u(t)| \leq u_{\text{max}}, \quad (3)$$

$$|\xi(t)| \leq \xi_{\text{max}}. \quad (4)$$

Для рассматриваемой системы (1) область достижимости будем строить в плоскости  $N_y O \dot{N}_y$  (рис. 2) для некоего, заранее заданного, момента времени  $T$ ;  $N_y O \dot{N}_y$  — плоскость параметров системы, которые необходимо стабилизировать.

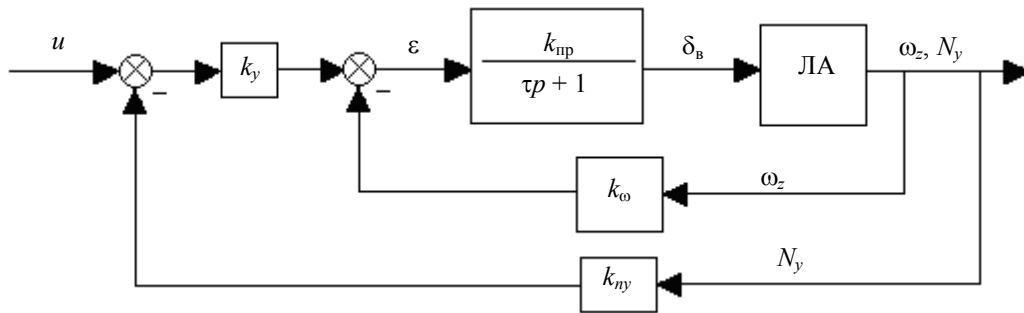


Рис. 1

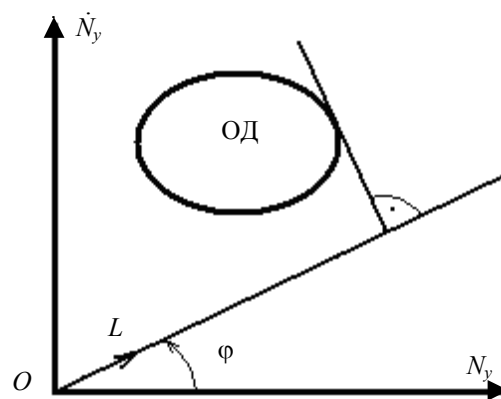


Рис. 2

Для системы (1) при условиях (3), (4) ОД является ограниченной и замкнутой [6], значит, достаточно построить только границу ОД, которую будем строить по точкам [9].

В плоскости  $N_y O \dot{N}_y$  с помощью единичного вектора  $L^T = [\cos \varphi \quad \sin \varphi]$  зададим направление движения ЛА, здесь  $\varphi$  — угол между осью  $ON_y$  и вектором  $L$ . Смещение ЛА в направлении вектора  $L$  из некоторой позиции  $\{t_*, z(t_*)\}$  к моменту времени  $T$  будем характеризовать скалярным произведением вектора  $L$  и вектора параметров системы, которые необходимо стабилизировать:  $w(T) = (N_y(T), \dot{N}_y(T))$ , т.е. функционалом вида

$$D = L^T w(T) = N_y(T) \cos \varphi + \dot{N}_y(T) \sin \varphi. \tag{5}$$

Из определения понятия ОД можно сделать вывод о том, что чем больше размеры ОД, тем больший диапазон требуемых значений стабилизируемых параметров может она обеспечить. А значит, управление системой должно выбираться таким, чтобы размеры ОД были максимальными, т.е. необходимо максимизировать критерий (5) для всех направлений вектора  $L$ . Предположим при этом, что действие возмущений носит наихудший для ЛА характер, и, следовательно, функция  $\zeta(t)$  должна выбираться такой, чтобы минимизировать критерий (5). Таким образом, задача (1)—(5) является конфликтной задачей.

Результатом решения данной конфликтной задачи при определенном значении угла  $\varphi$  будет точка с координатами  $N_y(T)$  и  $\dot{N}_y(T)$ , которая и является точкой границы ОД. Таким образом, изменяя значение угла  $\varphi$  от 0 до 360°, построим границу ОД в предположении, что ОД является выпуклой.

Для решения вспомогательной конфликтной задачи используем следующий итерационный алгоритм.

1. Задаем начальные программы управления и возмущения  $u_0(t)$ ,  $\xi_0(t)$ .
2. С использованием принципа максимума Понтрягина [10] находим оптимальную программу управления  $\tilde{u}_1(t)$ , обеспечивающую максимальное смещение ЛА в направлении вектора  $L$  при заданной программе  $\xi_0(t)$ .
3. Фиксируем программу управления  $\tilde{u}_1(t)$  и на основе принципа максимума Понтрягина находим оптимальную программу возмущения  $\tilde{\xi}_1(t)$ , обеспечивающую минимальное смещение в направлении вектора  $L$ .
4. Фиксируем программу возмущения  $\tilde{\xi}_1(t)$  и находим новую оптимальную программу управления  $\tilde{u}_2(t)$ , и т.д.
5. Продолжаем итерации до тех пор, пока на некотором шаге  $k$  программы  $\tilde{u}_k(t)$  и  $\tilde{\xi}_k(t)$  не будут удовлетворять условию  $\tilde{u}_k(t) = \tilde{u}_{k-1}(t)$ ,  $\tilde{\xi}_k(t) = \tilde{\xi}_{k-1}(t)$ .

Принимаем полученные программы  $\tilde{u}_k(t)$  и  $\tilde{\xi}_k(t)$  в качестве оптимальных решений в рассматриваемой конфликтной задаче.

Для решения задачи (5) при фиксированных программах управления или возмущения использовались необходимые условия принципа максимума Понтрягина [10], а возникающая краевая задача решалась на основе метода последовательных приближений Крылова — Черноушко [11].

Уточним задачу расчета координат точки границы ОД на примере некоего гипотетического ЛА. Зададим значения параметров гипотетического ЛА:  $l=5,3$  м;  $S=0,129$  м<sup>2</sup>;  $M=395$  кг;  $J_z=981$  кг·м<sup>2</sup>;  $m_z^\alpha=-0,022$  1/...°;  $m_z^{\delta_B}=-0,011$  1/...°;  $m_z^{\bar{\omega}_z}=-0,761$ ;  $c_y^\alpha=0,15$  1/...°;  $c_y^{\delta_B}=0,046$  1/...°;  $c_x=0,15$ ;  $k_{\text{пр}}=1$ ,  $\tau=0,1$  с;  $k_{ny}=0,336$ ;  $k_y=-0,002$ ;  $k_\omega=-0,0805$ .

Рассмотрим движение системы (1) при фиксированной программе  $\xi_i(t)$ . Требуется найти оптимальное управление, обеспечивающее максимум функционала (5) в заданный момент времени  $T$  при ограничении на управление (3) и начальных условиях (2).

В соответствии с принципом максимума вместо максимума критерия (5) определим минимум критерия:

$$D' = -N_y(T) \cos \varphi - \dot{N}_y(T) \sin \varphi. \quad (6)$$

Функция Гамильтона [10] для системы (1) с критерием оптимальности (6) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H = & -\psi_V \frac{c_x q S}{M} - \psi_V g \sin \theta + \psi_\theta c_y^\alpha \alpha \frac{q S}{M V} + \psi_\theta c_y^{\delta_B} \delta_B \frac{q S}{M V} - \psi_\theta \frac{g \cos \theta}{V} + \\ & + \left( \psi_\omega m_z^\alpha \alpha + \psi_\omega m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{\omega_z l}{V} + \psi_\omega m_z^{\delta_B} \delta_B + \psi_\omega m_z^\xi \xi \right) \frac{q S l}{J_z} + \psi_g \omega_z + \\ & + \psi_{\delta_B} \frac{1}{\tau} \left( k_{\text{пр}} \left( k_y \left( u - k_{ny} \frac{q S}{M g} (c_y^\alpha \alpha + c_y^{\delta_B} \delta_B) \right) - k_\omega \omega_z \right) - \delta_B \right) + \\ & + \psi_x V \cos \theta + \psi_y V \sin \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Составим сопряженную систему уравнений:

$$(8)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\psi_V}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V} = \psi_V \frac{2c_x qS}{MV} - \frac{qS}{MV^2} \psi_\theta (c_y^\alpha \alpha + c_{y^{\delta_B}}^{\delta_B} \delta_B) - \psi_\theta \frac{g \cos \theta}{V^2} - \\
 &\quad - \psi_\omega \frac{2qSl}{J_z V} (m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^\xi \xi) - \psi_\omega m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{\omega_z}{V^2} \frac{qSl^2}{J_z} + \\
 &\quad + \psi_{\delta_B} \frac{k_{\text{пр}}}{\tau} k_y k_{ny} \frac{2qS}{MgV} (c_y^\alpha \alpha + c_{y^{\delta_B}}^{\delta_B} \delta_B) - \psi_x \cos \theta - \psi_y \sin \theta; \\
 \frac{d\psi_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \psi_V g \cos \theta + \psi_\theta c_y^\alpha \frac{qS}{MV} - \psi_\theta \frac{g \sin \theta}{V} + \psi_\omega m_z^\alpha \frac{qSl}{J_z} - \\
 &\quad - \psi_{\delta_B} \frac{k_{\text{пр}}}{\tau} k_y k_{ny} \frac{qS}{Mg} c_y^\alpha + \psi_x V \sin \theta - \psi_y V \cos \theta; \\
 \frac{d\psi_\omega}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \omega_z} = -\psi_\omega m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{qSl}{J_z} \frac{l}{V} - \psi_\vartheta + \psi_{\delta_B} \frac{k_{\text{пр}} k_\omega}{\tau}; \\
 \frac{d\psi_\vartheta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -\psi_\theta c_y^\alpha \frac{qS}{MV} - \psi_\omega m_z^\alpha \frac{qSl}{J_z} + \psi_{\delta_B} \frac{k_{\text{пр}}}{\tau} k_y k_{ny} \frac{qS}{Mg} c_y^\alpha; \\
 \frac{d\psi_{\delta_B}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \delta_B} = -\psi_\theta c_{y^{\delta_B}}^{\delta_B} \frac{qS}{MV} - \psi_\omega m_z^{\delta_B} \frac{qSl}{J_z} + \frac{\psi_{\delta_B}}{\tau} + \psi_{\delta_B} \frac{k_{\text{пр}}}{\tau} k_y k_{ny} \frac{qS}{Mg} c_{y^{\delta_B}}^{\delta_B}; \\
 \frac{d\psi_x}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\
 \frac{d\psi_y}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Граничные условия для фазовых координат сопряженной системы (8) определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_V(T) &= \frac{qS}{Mg} \frac{2}{V} (c_y^\alpha \alpha \cos \varphi + c_{y^{\delta_B}}^{\delta_B} \delta_B \cos \varphi + c_y^\alpha \omega_z \sin \varphi) - \\
 &\quad - \frac{qS}{Mg} 3c_y^\alpha \left( c_y^\alpha \alpha \frac{qS}{MV^2} + c_{y^{\delta_B}}^{\delta_B} \delta_B \frac{qS}{MV^2} \right) \sin \varphi + \frac{qS}{MV^2} c_y^\alpha \cos \theta \sin \varphi; \\
 \psi_\theta(T) &= -c_y^\alpha \frac{qS}{Mg} \cos \varphi + c_y^\alpha \frac{qS}{Mg} c_y^\alpha \frac{qS}{MV} \sin \varphi - c_y^\alpha \frac{qS}{MV} \sin \theta \sin \varphi; \\
 \psi_\omega(T) &= c_y^\alpha \frac{qS}{Mg} \sin \varphi; \\
 \psi_\vartheta(T) &= c_y^\alpha \frac{qS}{Mg} \cos \varphi - c_y^\alpha \frac{qS}{Mg} c_y^\alpha \frac{qS}{MV} \sin \varphi; \\
 \psi_{\delta_B}(T) &= c_{y^{\delta_B}}^{\delta_B} \frac{qS}{Mg} \cos \varphi - c_{y^{\delta_B}}^{\delta_B} \frac{qS}{MV} c_y^\alpha \frac{qS}{Mg} \sin \varphi; \\
 \psi_x(T) &= 0, \\
 \psi_y(T) &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким образом, задача определения оптимального управления сводится к краевой задаче: найти решение систем уравнений (1) и (8), фазовые координаты которых удовлетворяют начальным условиям (2) и граничным условиям (9).

Согласно принципу максимума Понтрягина функция Гамильтона при оптимальном управлении должна достигать максимума, причем управление  $u(t)$  должно удовлетворять ограничению (3).

Алгоритм вычисления оптимального управления  $\tilde{u}(t)$  имеет вид

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} +u_{\max}, & \text{если } H_1 \geq 0; \\ -u_{\max}, & \text{если } H_1 < 0, \end{cases}$$

а алгоритм вычисления возмущения  $\tilde{\xi}(t)$  при фиксированной программе управления — вид

$$\tilde{\xi}(t) = \begin{cases} +\xi_{\max}, & \text{если } H_2 \geq 0; \\ -\xi_{\max}, & \text{если } H_2 < 0, \end{cases}$$

где  $H_1 = \frac{k_{\text{пр}} k_y}{\tau} \psi_{\delta_b}$ ,  $H_2 = \psi_{\omega} \frac{qSl}{J_z} m_z^{\xi}$ .

Результаты расчета ОД при начальных условиях  $V(0) = 1650$  м/с,  $\theta(0) = 0$ ,  $\omega_z(0) = 0$ ,  $\vartheta(0) = 0$ ,  $\delta_b(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 6000$  м представлены на рис. 3, а, б для моментов времени  $T = 0,3$  с и  $T = 1,5$  с соответственно, при этом управление и возмущение удовлетворяют ограничениям:  $u_{\max} = 20$ ,  $\xi_{\max} = 0,1$ . Точки границы ОД построены с шагом  $\Delta\varphi = 3,33^\circ$ .

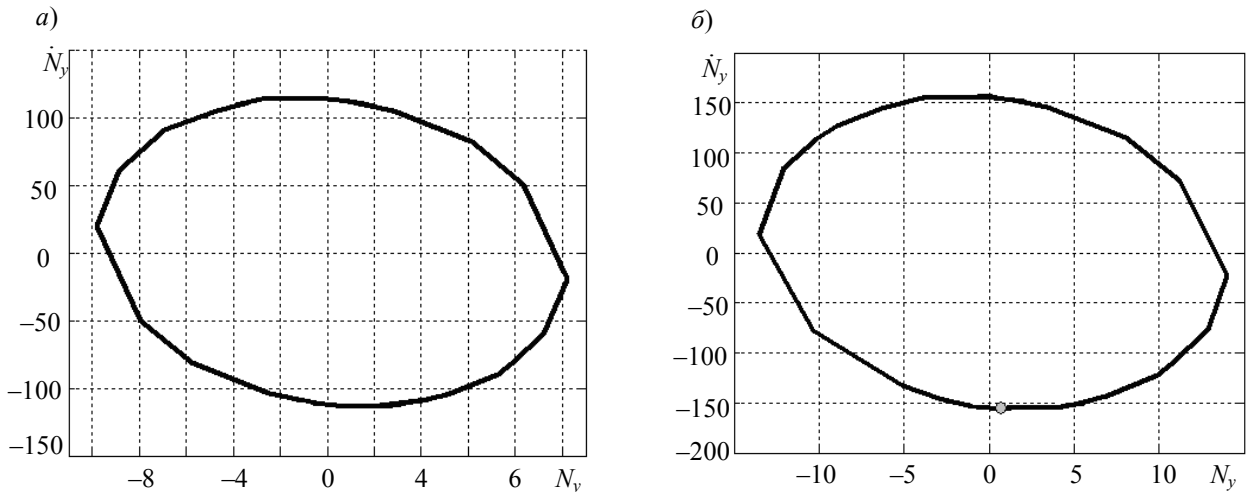


Рис. 3

Значения критерия (5), изменяющиеся в процессе применения предложенного алгоритма, приведены в таблице (для выделенной точки на рис. 3, б).

Номер итерации	Начальные программы $u(t)$ и $\xi(t)$	Конечные программы $u(t)$ и $\xi(t)$	$D'$
1	$u_0(t) = 0$ ; $\xi_0(t) = 0$	$\tilde{u}_1(t) \neq u_0(t)$ ;	101,11941
2	$\tilde{u}_1(t)$ ; $\xi_0(t) = 0$	$\tilde{\xi}_1(t) \neq \xi_0(t)$	49,777366
3	$u_0(t) = 0$ ; $\tilde{\xi}_1(t)$	$\tilde{u}_2(t) \neq \tilde{u}_1(t)$	48,120109
4	$\tilde{u}_2(t)$ ; $\xi_0(t) = 0$	$\tilde{\xi}_2(t) \neq \tilde{\xi}_1(t)$	48,099345
5	$u_0(t) = 0$ ; $\tilde{\xi}_2(t)$	$\tilde{u}_3(t) = \tilde{u}_2(t)$	48,104495
6	$\tilde{u}_3(t)$ ; $\xi_0(t) = 0$ ;	$\tilde{\xi}_3(t) = \tilde{\xi}_2(t)$	48,104495

Результаты расчета подтвердили работоспособность рассмотренного алгоритма вычисления ОД ЛА в плоскости  $N_y, \dot{N}_y$  с учетом действия возмущений. Из приведенных расчетов следует, что ОД в плоскости  $N_y, \dot{N}_y$  является выпуклой.

Разработанный алгоритм может быть использован в процессе синтеза систем стабилизации скоростных ЛА при действии возмущений и помех с неизвестными статистическими характеристиками.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. Крищенко А. П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1984. № 6. С. 30—36.
3. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
4. Хрусталева М. М. Точное описание множеств достижимости и условия глобальной оптимальности динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1988. № 5. Ч. 1. С. 62—70; 1988. № 7. Ч. 2. С. 70—78.
5. Доррер Г. А. Оценка параметров динамических систем по их областям достижимости // Там же. 1986. № 1. С. 39—46.
6. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
8. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973.
9. Толтегин О. А. Области достижимости летательных аппаратов: Учеб. пособие. СПб.: БГТУ „Военмех“, 2002.
10. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
11. Толтегин О. А. Численные методы решения задач оптимального программного управления: Учеб. пособие. Л.: Ленингр. механ. ин-т, 1987.

#### *Сведения об авторе*

**Анастасия Александровна Сизова** — Балтийский государственный технический университет „Военмех“ им. Д. Ф. Устинова, кафедра процессов управления, Санкт-Петербург; ведущий инженер; E-mail: yatsan28@yandex.ru

Рекомендована кафедрой  
процессов управления

Поступила в редакцию  
10.07.08 г.