

Ю. С. КРАСНОВ

## МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ НАВИГАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НА БОРТУ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Рассматривается задача оптимизации программы навигационных измерений на борту космического аппарата. Предложен метод ее решения, построенный на базе вычислительной схемы Розенброка и включающий процедуру случайного поиска для детального исследования окрестности точки, подозрительной на экстремум. Приводятся результаты расчетов для различных величин эксцентриситета орбиты космического аппарата и навигационных параметров: двух углов „звезда — горизонт Земли“ и углового диаметра Земли.

**Ключевые слова:** система автономной навигации космических аппаратов, планирование навигационных измерений, метод оптимизации программ измерений.

**Введение.** Эффективность применения орбитальных космических средств во многом определяется качеством управления движением космических аппаратов (КА) на всех этапах полета. Среди многообразия задач, решаемых в процессе управления движением КА, одной из важнейших является задача навигации. С учетом современных требований к автономности функционирования КА задачу навигации следует решать с использованием методов и систем автономной навигации (САН).

Несмотря на значительные успехи, достигнутые в этом направлении, один важный аспект применения САН до сих пор остается без должного внимания: не учитывается тот факт, что значения первичных навигационных параметров, измеренные в различных орбитальных положениях КА, обладают, в общем случае, различной информативностью, т.е. по-разному влияют на точность определения траектории КА. Поэтому значительный научный интерес и высокую практическую значимость представляет определение таких участков орбиты КА, проведение навигационных измерений на которых позволит достичь наибольшей точности определения траектории его реального полета.

**Постановка задачи.** Рассмотрим КА, совершающий свободный орбитальный полет в нормальном гравитационном поле Земли и оборудованный системой автономной навигации, решающей задачу определения орбиты на основе измерения и обработки значений следующих первичных навигационных параметров: два угла „звезда — горизонт Земли“ ( $\Phi_1, \Phi_2$ ) и угловой диаметр Земли ( $d$ ). Навигационными астроориентирами служат две звезды, линии визирования которых перпендикулярны. Такая схема расположения звезд, как показано в работе [1], обеспечивает наибольшую точность решения задачи навигации. Движение КА будем рассматривать в абсолютной геоцентрической экваториальной системе координат. Используемые в расчетах исходные данные представлены ниже.

### Параметры опорной орбиты КА

Высота перицентра, км .....	1000
Наклонение орбитальной плоскости, ...° .....	60
Долгота восходящего узла, ...° .....	30
Аргумент перицентра, ...° .....	90
Эксцентриситет .....	0—0,9*
Момент нахождения в перицентре, с .....	0

\* Диапазон значений эксцентриситета орбиты КА задан в интересах исследования его влияния на результаты оптимизации программы бортовых навигационных измерений.

**Параметры системы автономной навигации**

Направляющие косинусы навигационных звезд:

звезда, находящаяся в плоскости орбиты, .....  $a_1^0 = -0,25; b_1^0 \approx 0,433; c_1^0 \approx 0,866$

звезда, находящаяся в полюсе орбиты, .....  $a_2^0 \approx 0,433; b_2^0 = -0,75; c_2^0 = 0,5$

Среднеквадратические ошибки бортовых измерительных средств\*:

$\sigma_{\Phi_1}$  ..... 5,2'

$\sigma_{\Phi_2}$  ..... 5,2'

$\sigma_d$  ..... 1,5'

Навигационный интервал .....  $T \approx 6801,65$  с  
(период обращения КА)

Общее число навигационных сеансов ..... 100

Минимальная величина шага между моментами измерений, с .... 5

В качестве действующих на КА возмущающих факторов будем учитывать нецентральность гравитационного поля Земли и сопротивление атмосферы. При этом в разложении гравитационного потенциала ограничимся, помимо центральной составляющей, второй и четвертой зональными гармониками, а также примем широко используемое в космической баллистике допущение о неподвижности слоев атмосферы относительно вращающейся Земли.

Необходимые расчетные соотношения представлены в работах [2—5]. Для интегрирования системы дифференциальных уравнений возмущенного движения КА воспользуемся методом Адамса — Башфорта — Моултона [6].

Ошибки бортовых навигационных измерений будем полагать не содержащими систематических составляющих случайными величинами, подчиненными нормальному многомерному закону распределения [7, 8]. В целях упрощения предположим наличие лишь автокорреляционной зависимости случайных ошибок измерений.

**Метод решения оптимизационной задачи.** Для решения навигационной задачи сформированная на протяжении витка орбиты совокупность результатов измерений

$$\hat{\Theta} = [\hat{\Theta}_1^T, \hat{\Theta}_2^T, \dots, \hat{\Theta}_i^T, \dots, \hat{\Theta}_N^T]^T, \quad \hat{\Theta}_i^T = [\Phi_1^{t_i}, \Phi_2^{t_i}, d^{t_i}]$$

подвергается статистической обработке методом максимального правдоподобия [1, 7, 8]. Корреляционная матрица ошибок определения орбиты КА может быть рассчитана по формуле

$$K_{\hat{q}_0} = (W^T K_{\hat{\Theta}}^{-1} W)^{-1}, \tag{1}$$

где  $W = \partial \hat{\Theta} / \partial \mathbf{q}_0$  — матрица частных производных измеряемых функций по определяемым параметрам орбиты КА, отнесенным к началу текущего навигационного интервала ( $t_0 = 0$ );

$\mathbf{q}_0 = [x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0]^T$  — вектор определяемых параметров.

Матрица баллистических производных  $B(t_i, t_0) = (\partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{q}_0)_{t=t_i}$ , необходимая для вычисления матрицы  $W$ , рассчитывается численным методом конечных разностей, изложенным в работе [3].

В качестве показателя точности автономной навигации целесообразно использовать позиционный след корреляционной матрицы (1), выражающий сумму дисперсий ошибок определения координат центра масс КА. Введем в рассмотрение вектор-программу бортовых навигационных измерений

$$\mathbf{t} = [t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N]^T. \tag{2}$$

\* Заданные значения среднеквадратических ошибок соответствуют техническим характеристикам современных оптико-электронных приборов, разрабатываемых для космической навигации.

Суть рассматриваемой в настоящей статье оптимизационной задачи заключается в определении такой программы бортовых навигационных измерений (2), которая обеспечивает максимальную точность автономного определения орбиты. Используя введенный показатель точности автономной навигации, сформируем целевую функцию, подлежащую минимизации:

$$F(\mathbf{t}) = K_{\hat{q}_0}(1,1) + K_{\hat{q}_0}(2,2) + K_{\hat{q}_0}(3,3) = \sigma_{x_0}^2 + \sigma_{y_0}^2 + \sigma_{z_0}^2. \quad (3)$$

Определим область допустимых значений переменных задачи оптимизации, для чего обратимся к следующим очевидным положениям:

- все бортовые измерения выполняются на заданном навигационном интервале;
- в связи с ограниченной производительностью бортовых измерительных средств должно быть задано ограничение на предельную плотность измерений на навигационном интервале.

Отсюда следует, что область допустимых значений переменных может быть задана системой ограничений-неравенств

$$D = \{ \mathbf{t}: t_0 < t_i < t_0 + \tau_n, t_i - t_{i-1} \geq \Delta t_{\min} \}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

где  $\tau_n$  — длительность навигационного интервала;  $\Delta t_{\min}$  — минимальная величина шага между моментами измерений.

Используя соотношения (3), (4), получаем следующую математическую модель оптимизации программы бортовых навигационных измерений:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}^* &= \arg \min_{\mathbf{t} \in D} F(\mathbf{t}), \\ D &= \{ \mathbf{t}: t_0 < t_i < t_0 + \tau_n, t_i - t_{i-1} \geq \Delta t_{\min} \}, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \right\}$$

**Результаты оптимизации.** Предварительный анализ поставленной оптимизационной задачи демонстрирует ее сложность, обусловленную трудноисследуемой неявной зависимостью точности автономной навигации КА от программы бортовых измерений и большим числом управляемых переменных, образующих эту программу. Действительно, не представляется возможным выразить заданную целевую функцию (3) в виде конечной формулы, пригодной для анализа и оптимизационного исследования. Допустимо лишь построение сложного вычислительного алгоритма, позволяющего рассчитывать и оценивать ее значения. Все это указывает на необходимость решения подобного рода оптимизационных задач с помощью численных методов, в основе своей не связанных с дифференцированием целевой функции и функций системы ограничений.

Для решения задачи оптимизации был применен специально разработанный трехэтапный численный метод, построенный на базе известной вычислительной схемы Розенброка [9, 10] и включающий процедуру случайного поиска с редукцией шага для детального исследования окрестности найденной точки, подозрительной на экстремум.

Значения параметров разработанного метода оптимизации, обеспечивающие наибольшую эффективность его применения, найдены эмпирически и представлены в табл. 1.

Таблица 1

Категория	Параметр	Значение
Начальные значения шагов поиска	$\mathbf{h}^0$ — начальные шаги экспериментального поиска по схеме Розенброка	$h_i^0 = 10, i = \overline{1, N}$
	$R_{hs}^1$ — радиус начальной гиперсферы случайного поиска	50
Множители-модификаторы величины шага поиска	$\alpha$ — множитель растяжения при экспериментальном поиске	5
	$\beta$ — множитель сжатия при экспериментальном поиске	-0,8
	$\gamma$ — множитель редукции при случайном поиске	0,5

Продолжение табл. 1

Категория	Параметр	Значение
Характеристики окончания вычислений	$\delta$ — показатель останова экспериментального поиска	$10^{-4}$
	$\varepsilon_1$ — показатель останова двухэтапной циклической схемы Розенброка, предел точности минимизации целевой функции	$10^{-3}$
	$\varepsilon_2$ — показатель останова случайного поиска	$10^{-1}$

Алгоритм метода оптимизации в виде структурной схемы представлен на рис. 1.

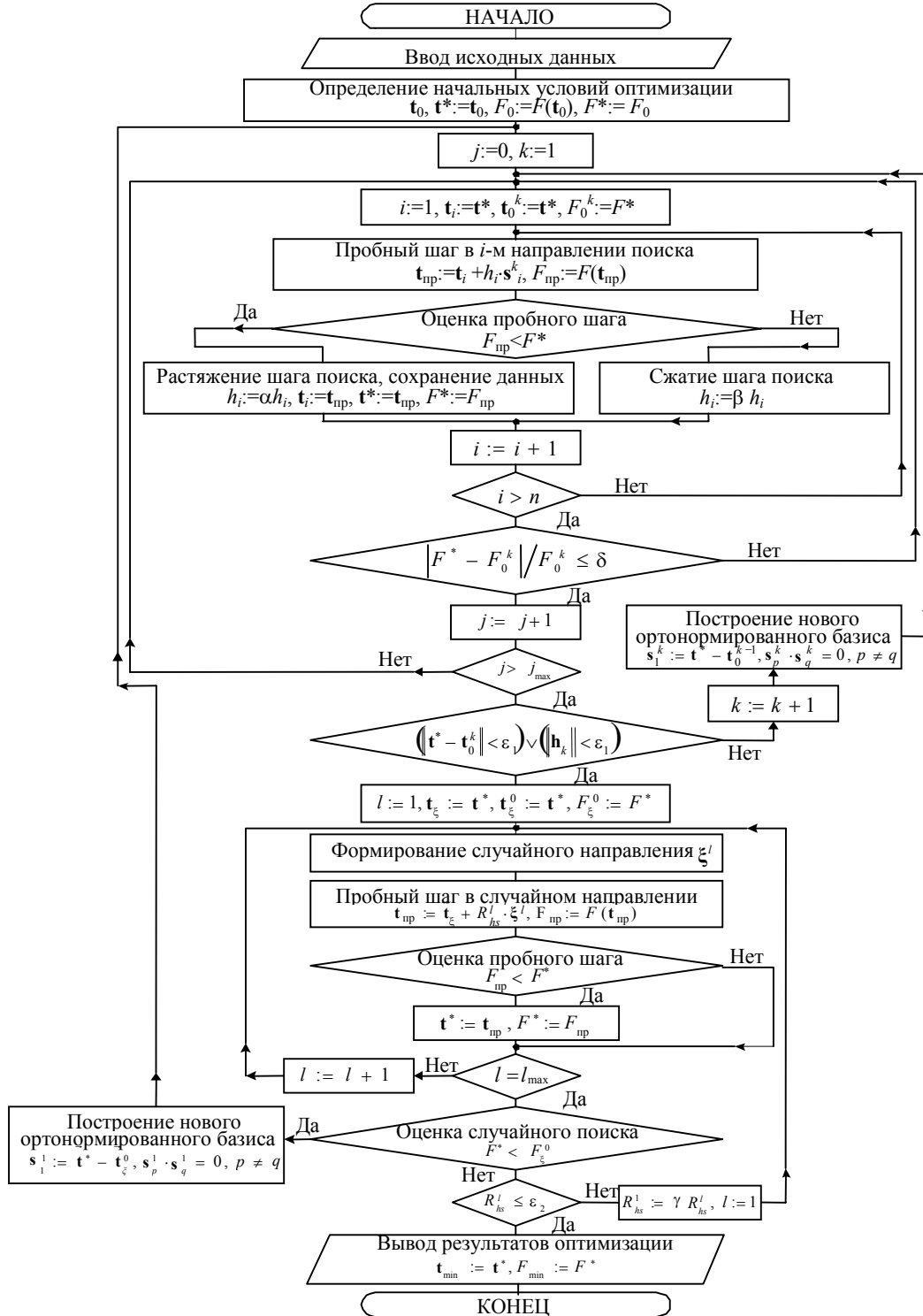


Рис. 1

При реализации алгоритма оптимизации ограничения на переменные учитывались в подпрограмме расчета значений целевой функции с помощью введения „штрафа“ за их нарушение. При выходе за пределы допустимой области (4) целевой функции присваивалось заведомо неоптимальное, очень большое значение (константа Inf в среде MatLab), что приводило к эффективному автоматическому исключению таких значений в процессе поиска оптимума.

Все расчеты по предложенной вычислительной схеме были выполнены с использованием разработанного в среде MatLab [11] специального программного комплекса.

На рис. 2 приведена схема расположения оптимальных мерных участков на круговой и эллиптической орбитах КА при эксцентриситетах:  $e = 0$  (а),  $e = 0,3$  (б).

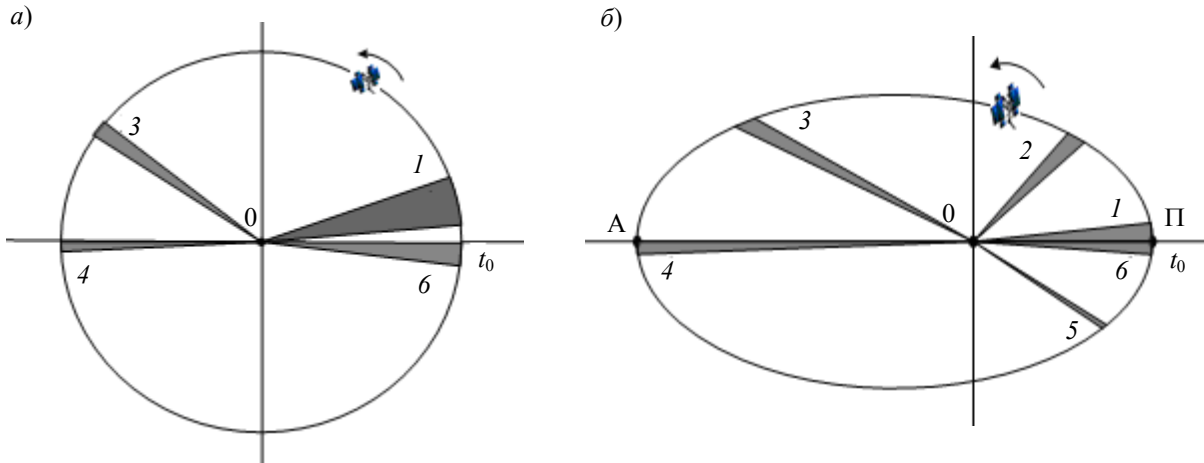


Рис. 2

Как видно из рисунка, оптимальные (заштрихованные) участки занимают малую часть витка орбиты. Они представляют области, в пределах которых для достижения наибольшей точности автономного определения орбиты КА навигационные измерения следует проводить максимально часто. Продолжительные интервалы полета, вследствие их малой информативности для выбранного состава первичных навигационных параметров и используемого метода обработки результатов измерений, вообще не должны быть задействованы. Полученное неравномерное распределение моментов измерений с четко выраженными областями характеризуется преимуществом по точности определения траектории КА в сравнении с широко используемым равномерным распределением.

Расчеты, результаты которых представлены в табл. 2, показали, что длительность измерений, взаимное расположение и число оптимальных мерных участков в значительной степени зависят от эксцентриситета орбиты КА. В табл. 2 приняты следующие обозначения:  $\vartheta_n$ ,  $\Delta t$  и  $n$  — соответственно начальное значение истинной аномалии, длительность и количество навигационных измерений для каждого оптимального мерного участка.

Таблица 2

Оптимальный участок	Эксцентриситет										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
1	$\vartheta_n, \dots^\circ$	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Delta t, c$	260	220	110	100	70	45	60	30	15	5
	$n$	53	45	23	21	15	10	13	7	4	2
2	$\vartheta_n, \dots^\circ$	—	32,8	32,9	33,4	37,5	35	35,8	39,6	42,3	41,9
	$\Delta t, c$	—	30	100	115	110	135	120	100	85	60
	$n$	—	7	21	24	23	28	25	21	18	13
3	$\vartheta_n, \dots^\circ$	146,9	148,4	157,7	158	162,4	165,2	168,3	171,7	172,7	175,4
	$\Delta t, c$	83,6	80	130	131,6	150	220	255	305	330,1	611,1
	$n$	15	17	27	25	31	45	52	62	67	80

Продолжение табл. 2

Оптимальный участок		Эксцентриситет									
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
4	$\vartheta_{н, \dots}^\circ$	180	180	180	180	180	180	180	180	180	—
	$\Delta t, c$	35	45	55	65	85	30	5	10	30	—
	$n$	8	10	12	14	18	7	2	3	7	—
5	$\vartheta_{н, \dots}^\circ$	—	—	351,3	333,5	320,2	316,5	319,3	319,1	—	—
	$\Delta t, c$	—	—	80	25	10	5	5	5	—	—
	$n$	—	—	17	6	3	2	2	2	—	—
6	$\vartheta_{н, \dots}^\circ$	353,4	354	—	357,1	357	357,6	358,2	358,5	358,8	358,4
	$\Delta t, c$	115	100	—	45	45	35	25	20	15	20
	$n$	24	21	—	10	10	8	6	5	4	5

Исследуя ошибки навигации по отдельным определяемым параметрам траектории КА, можно установить, что с увеличением эксцентриситета все более сказывается неэффективность равномерного распределения моментов измерений, в то время как использование найденных оптимальных мерных участков позволяет получить увеличивающийся выигрыш в точности: это подтверждается приведенными на рис. 3 графиками зависимости ошибок определяемых параметров от эксцентриситета при равномерном (кривая 1) и оптимальном (кривая 2) распределении моментов навигационных измерений.

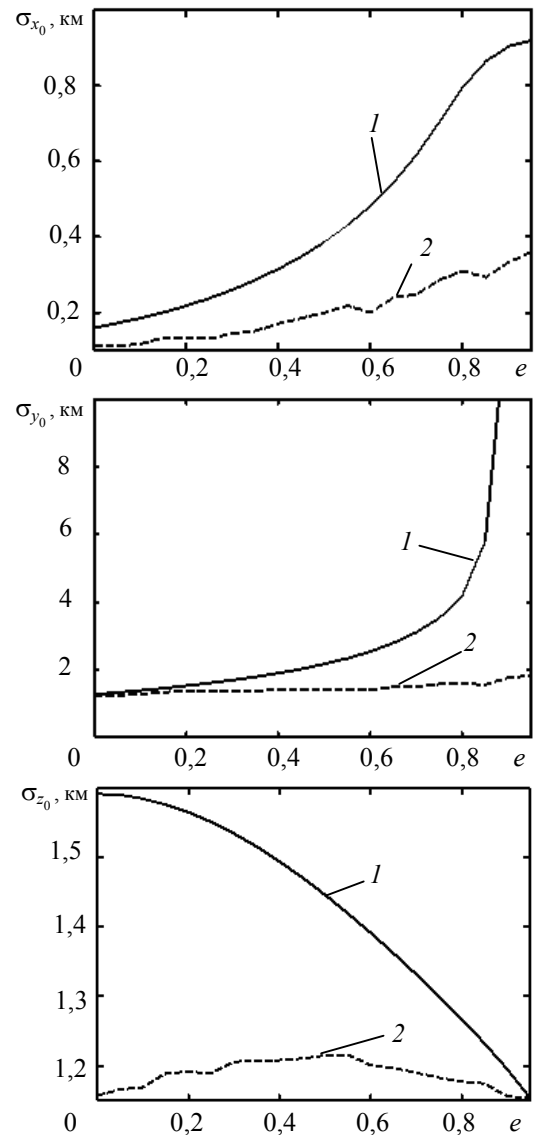
Существенное влияние оказывает величина эксцентриситета также и на сам процесс оптимизации: в частности, с увеличением значения  $e$  заметно уменьшается число итераций поиска, а значит, и общее время вычислений. Это объясняется растущей информационной неравнозначностью различных участков траектории КА, а следовательно, и увеличивающейся кривизной исследуемой целевой функции.

Полученные результаты оптимизации можно оценить с помощью коэффициента, характеризующего относительный выигрыш в точности и рассчитываемого по формуле

$$k_i = \frac{\sigma_{p,q} - \sigma_{\text{опт},q}}{\sigma_{p,q}} \cdot 100\%, \quad (5)$$

где  $\sigma_{p,q}$ ,  $\sigma_{\text{опт},q}$  — среднеквадратические ошибки определения параметров траектории КА при равномерном и оптимальном распределении моментов измерений соответственно;  $q = x_0, y_0, z_0$  — индекс оцениваемого параметра.

Выполненные расчеты, результаты которых отражены на рис. 4, показали, что значения коэффициента (5), изменяясь в зависимости от эксцентриситета, всегда остаются положительными, причем по всем оцениваемым параметрам, что однозначно указывает на повышение точности



определения траектории КА за счет оптимизации программы бортовых навигационных измерений.

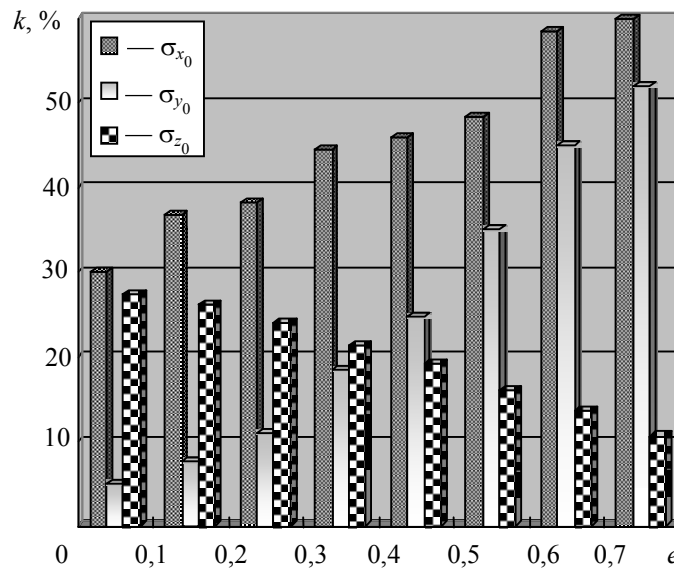


Рис. 4

**Заключение.** Проведенные исследования показали, что для повышения точности автономного определения орбит КА навигационные измерения следует производить не равномерно с заданным шагом (как это принято и рекомендовано разработчиками САН), а группировать в мерные участки, количество, взаимное расположение и длительность которых существенным образом зависят от параметров орбиты КА.

Представленный метод оптимизации программы бортовых навигационных измерений может быть применен на стадии баллистического проектирования полета КА различного целевого назначения, использующих автономный и ограниченно автономный принципы управления движением. Одним из достоинств метода, важных для его практического использования, является простота программной реализации на существующих в настоящее время вычислительных средствах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Порфирьев Л. Ф., Смирнов В. В., Кузнецов В. И. Аналитические оценки точности автономных методов определения орбит. М.: Машиностроение, 1987.
2. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихоновой. М.: Машиностроение, 1972.
3. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.
4. Голяков А. Д., Лукашевский А. А., Смирнов В. В. Системы навигации космических аппаратов. СПб.: МО РФ, 2003.
5. Аким Э. Л., Энеев Т. М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космические исследования. 1963. Т. 1, № 1.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Лань, 2003.
7. Ломако Г. И. Определение и анализ движения по экспериментальным данным. Л.: МО СССР, 1983.
8. Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976.
9. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Наука, 1975.
11. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MatLab 7. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

***Юрий Сергеевич Краснов***

***Сведения об авторе***

— Главный испытательный центр им. Г. С. Титова, Краснознаменск;  
науч. сотрудник; E-mail: yskras@yandex.ru

Рекомендована  
Военно-космической академией  
им. А. Ф. Можайского

Поступила в редакцию  
02.03.09 г.