

А. И. КОРШУНОВ

ПРЕДЕЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ИЗМЕНЕНИЕМ СТРУКТУРЫ

Получено векторно-матричное дифференциальное уравнение предельной непрерывной модели, к которой система с периодическим изменением структуры приближается при неограниченном уменьшении периода. Приведен пример использования полученных уравнений при исследовании импульсного повышающего преобразователя постоянного тока. Путем математического моделирования оценена близость предельной непрерывной модели к реальной системе с переменной структурой.

Ключевые слова: высокочастотное периодическое изменение структуры, предельная непрерывная модель.

Введение. Системы с высокочастотным изменением структуры наибольшее распространение нашли в силовой электронике [1, 2]. Например, импульсные преобразователи напряжения постоянного или переменного тока, инверторы и другие содержащие полупроводниковые ключи устройства, состояние которых изменяется с высокой частотой, периодически изменяют и свою структуру. На этом основан принцип действия таких систем. Так, в простейшем повышающем импульсном преобразователе постоянного тока дроссель в течение части периода коммутации подключается к источнику напряжения и накапливает электромагнитную энергию, а оставшуюся часть периода отдает энергию в нагрузку. Изменяя соотношение между временем накопления и отдачи энергии, можно регулировать напряжение на нагрузке.

Основная идея использования рассматриваемого в настоящей статье частного вида систем с переменной структурой, в отличие от традиционных задач использования переменной структуры в системах автоматического управления [3], заключается в принципе осреднения и сглаживания выходных переменных за счет высокой частоты изменения структуры.

Математическое описание системы. Рассмотрим системы, фазовые траектории которых непрерывны, что характерно для реальных технических устройств.

Состояние системы определяется m -мерным вектором фазовых координат $X^T = [x_1, x_2, \dots, x_m]$, T — знак транспонирования.

Для общности исследуем системы, изменяющие свою структуру q раз в течение периода T . На каждом из q интервалов периода T система описывается своим линейным дифференциальным уравнением в векторно-матричной форме:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_i X + B_i U(\tau); \quad 0 < \tau = t - nT - \tau_1 - \tau_2 - \dots - \tau_{i-1} < \tau_i; \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

где A_i — $m \times m$ -квадратная матрица, B_i — $m \times k$ -прямоугольная матрица; $U(\tau) = U(t)$ при $t = nT + \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{i-1} + \tau$, $T = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_q$; $U^T(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)]$ — k -мерный вектор внешних воздействий.

Решение векторно-матричного линейного дифференциального уравнения на i -м интервале периода T имеет, как известно, следующий вид:

$$X(\tau) = H_i(\tau)X_{0i} + \int_0^\tau H_i(\tau - \eta)B_i U(\eta)d\eta, \quad 0 < \tau < \tau_i, \quad (1)$$

где $H_i(\tau) = \exp(A_i \tau)$ — матричная экспонента, η — переменная интегрирования.

Начальное значение вектора фазовых координат на i -м интервале периода T изменения структуры согласно принципу непрерывности фазовых координат при ограниченных воздействиях равно его конечному значению на предыдущем $(i-1)$ -м интервале, т.е.

$$X_{0i} = X(nT + \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{i-1}). \quad (2)$$

Используя выражения (1) и (2), несложно получить разностное уравнение системы, связывающее значения вектора фазовых координат в начале и в конце периода изменения структуры системы, т.е. $X((n+1)T)$ и $X(nT)$. Приведем это уравнение для частного случая $q=3$:

$$\begin{aligned} X((n+1)T) = & H_3(\tau_3)H_2(\tau_2)H_1(\tau_1)X(nT) + H_3(\tau_3)H_2(\tau_2)H_1(\tau_1) \int_0^{\tau_1} H_1(-\eta)B_1 U(nT + \eta)d\eta + \\ & + H_3(\tau_3)H_2(\tau_2) \int_0^{\tau_2} H_2(-\eta)B_2 U(nT + \tau_1 + \eta)d\eta + H_3(\tau_3) \int_0^{\tau_3} H_3(-\eta)B_3 U(nT + \tau_1 + \tau_2 + \eta)d\eta. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение предельной непрерывной модели. В системах рассматриваемого класса фазовые координаты и, следовательно, выходные сигналы состоят из плавной составляющей и высокочастотных пульсаций, вызванных периодическим изменением структуры. При выборе достаточно высокой частоты (малого периода T) изменения структуры системы амплитуды пульсаций невелики. Очевидно, что при уменьшении периода T амплитуда пульсаций уменьшается, а при $T \rightarrow 0$ на выходе схемы устанавливается постоянное напряжение с малым уровнем пульсаций. Такую систему назовем предельной непрерывной моделью.

Дифференциальные уравнения предельной непрерывной модели можно получить, используя теорию дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, развитую в работах А. Ф. Филиппова, (см., например, его монографию „Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью“. М.: Наука, 1985). Однако для доступности изложения здесь использован математический аппарат, традиционный для области полупроводниковых преобразователей.

Для получения дифференциального уравнения предельной непрерывной модели необходимо вычислить производную ее фазовых координат:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{X((n+1)T)X - X(nT)}{T} \quad (3)$$

при $\tau_i/T = \gamma_i = \text{const}$, $i=1, 2, \dots, q$, $nT=t=\text{const}$.

Не теряя общности, можно вычислить предел в формуле (3) для $q=3$, а полученный результат распространить на общий случай. С этой целью получено выражение

$$\begin{aligned}
 X(t+T) - X(t) = & [H_3(\gamma_3 T)H_2(\gamma_2 T)H_1(\gamma_1 T) - E]X(nT) + \\
 & + H_3(\gamma_3 T)H_2(\gamma_2 T)H_1(\gamma_1 T) \int_0^{\gamma_1 T} H_1(-\eta)B_1U(\eta)d\eta + H_3(\gamma_3 T)H_2(\gamma_2 T) \times \\
 & \times \int_0^{\gamma_2 T} H_2(-\eta)B_2U(t+\gamma_1 T+\eta)d\eta + H_3(\gamma_3 T) \int_0^{\gamma_3 T} H_3(-\eta)B_3U(t+\gamma_1 T+\gamma_2 T+\eta)d\eta. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Для вычисления предела в формуле (3) следует разложить выражение (4) в ряд по степеням T , воспользовавшись абсолютной сходимостью разложения матричной экспоненты в ряд по степеням ее аргумента. Ограничиваясь линейным членом разложения, получаем

$$X(t+T) - X(t) = [\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 + (\gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3)U(t)]T + 0(T), \quad (5)$$

здесь $0(T)$ — величина более высокого порядка малости, чем T .

Подстановка полученного разложения (5) в предел в формуле (3) позволяет найти

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BU(t), \quad (6)$$

где $A = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3$, $B = \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$; $U(t)$ — k -мерный вектор внешних воздействий.

Распространение по очевидной аналогии полученного для $q=3$ результата на произвольное значение q дает в общем случае

$$A = \sum_{i=1}^q \gamma_i A_i, \quad B = \sum_{i=1}^q \gamma_i B_i, \quad \sum_{i=1}^q \gamma_i = 1. \quad (7)$$

Анализ дифференциального уравнения (6) показывает, что при $\gamma_i = \text{const}$, $i=1, 2, \dots, q$, оно оказывается линейным, т.е. при $T \rightarrow 0$ рассматриваемая система приближается к линейной непрерывной стационарной системе.

В технических устройствах для управления системой используют изменение величин γ_i . В этом случае управляющее воздействие оказывается не сигнальным, а параметрическим, поскольку изменяет элементы матриц A и B (7). Таким образом, предельная непрерывная модель рассматриваемой системы с переменной структурой представляет собой непрерывную нестационарную систему. Анализ таких систем, как известно [4], весьма сложная задача.

Пример. Рассмотрим простейший импульсный повышающий преобразователь постоянного тока, расчетная схема которого представлена рис. 1. Ключ $Kл$ в каждом периоде T переключений в течение времени τ находится в положении 1, а оставшуюся часть периода — в положении 2. Таким образом, $q=2$, $\gamma_1 = \tau/T$, $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$. Состояние преобразователя определяется двумя фазовыми координатами ($m=2$): током $i=x_1$ через индуктивность L и напряжением $u_n = x_2$ на конденсаторе C . Очевидно, $U(t) = U_1 = \text{const}$, $k = 1$.

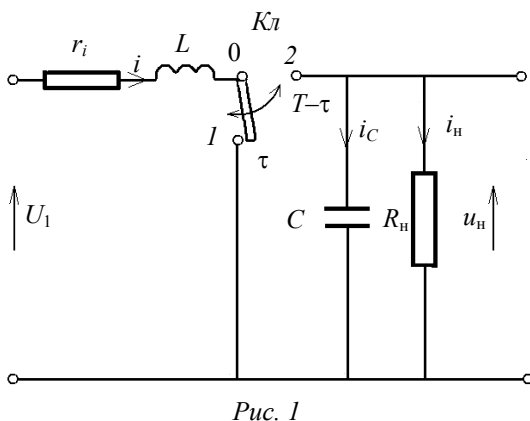


Рис. 1

Записав по законам Кирхгофа системы дифференциальных уравнений для двух положений ключа:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{d\xi} &= -ri + U_1, \\ C \frac{du_H}{d\xi} &= -\frac{u_H}{R_H}, \end{aligned} \right\} 0 < \xi < \tau_n,$$

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{d\eta} &= -ri - u_H + U_1, \\ C \frac{du_H}{d\eta} &= -\frac{u_H}{R_H} + i, \end{aligned} \right\} 0 < \eta < T - \tau_n,$$

где r и L — сопротивление и индуктивность дросселя, R_H — сопротивление нагрузки, и преобразовав их к векторно-матричной форме Коши, получим

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{r}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_H C} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{r}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_H C} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Подставив выражения (8) в формулы (7), получим

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{r}{L} & -\frac{1-\gamma}{L} \\ \frac{1-\gamma}{C} & -\frac{1}{R_H C} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Используя выражения (9), векторно-матричное уравнение предельной непрерывной модели можно переписать в виде системы дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1 &= -\frac{r}{L} x_1 - \frac{1-\gamma}{L} x_2 + \frac{U_1}{L}, \\ \frac{d}{dt} x_2 &= \frac{1-\gamma}{C} x_1 - \frac{1}{R_H C} x_2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Уравнение, соответствующее установившемуся режиму работы преобразователя при $U_1 = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$, легко получить, положив в системе (10) $dx_1/dt=0$, $dx_2/dt=0$ и решив ее относительно x_1 и x_2 . В результате получаем

$$i_{\text{уст}} = \frac{U_1}{r + (1-\gamma)^2 R_H}, \quad U_2 = u_{H \text{ уст}} = \frac{U_1 (1-\gamma) R_H}{r + (1-\gamma)^2 R_H} = \frac{U_1}{1-\gamma} \frac{R_H}{R_H + r / (1-\gamma)^2}. \quad (11)$$

Согласно выражениям (11) повышающий преобразователь в статике представляет собой управляемый источник напряжения, ЭДС и выходное сопротивление которого зависят от γ по формулам

$$E = U_1 / (1 - \gamma), \quad R_{\text{вых}} = r / (1 - \gamma)^2.$$

Статическая характеристика повышающего преобразователя $U_2 = f(\gamma)$ при $\gamma = \gamma_{\text{max}} = 1 - \sqrt{r / R_H}$ имеет максимум, равный

$$U_{2 \text{ max}} = \frac{U_1}{2} \sqrt{\frac{R_H}{r}}.$$

При $\gamma \rightarrow 1$ согласно второму из выражений (11) $U_2 \rightarrow 0$.

Причина указанных особенностей статической характеристики нагруженного преобразователя заключается в не равном нулю значении активного сопротивления дросселя ($r > 0$), ограничивающем ток дросселя согласно неравенству

$$I \leq I_{\max} = U_1 / r. \quad (12)$$

При малом времени заряда конденсатора C , равном $(1-\gamma)T$ и уменьшающемся с ростом γ , амплитуда тока подпитки должна неограниченно возрастать. Вследствие ограничения (12) это невозможно и вызывает уменьшение выходного напряжения преобразователя при увеличении γ более γ_{\max} .

При работе повышающего преобразователя в замкнутой системе стабилизации или регулирования выходного напряжения необходимо ограничивать величину γ , чтобы не превышать γ_{\max} , так как в противном случае увеличение γ более γ_{\max} приведет к уменьшению выходного напряжения до нуля.

Оценка точности предельной непрерывной модели. Предельная непрерывная модель системы с периодическим изменением структуры тем точнее описывает ее свойства, чем меньше период. Аналитическое исследование точности модели представляет собой сложную математическую задачу, возможно не особо важную для практики, поскольку в каждом конкретном случае точность можно оценить путем математического моделирования.

В качестве примера приведем результат исследования повышающего импульсного преобразователя 100/200 В при следующих его параметрах: $L=6,914 \cdot 10^{-3}$ Гн, $r=0,2$ Ом, $R_H=40$ Ом, $C=14 \cdot 10^{-6}$ Ф, $T=2 \cdot 10^{-5}$ с (50 кГц).

Значение γ , обеспечивающее требуемое значение выходного напряжения $U_2=200$ В при $U_1=100$ В на возрастающей ветви статической характеристики, определяется решением уравнений (11):

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2} \frac{U_1}{U_2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{U_1}{U_2}\right)^2 - r / R_H} = 0,5112.$$

В качестве „пробного“ воздействия на повышающий преобразователь выберем изменение γ по закону

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \Delta\gamma \sin(2\pi ft),$$

где $\Delta\gamma=0,025 \ll \gamma_0=0,5112$, $f=100$ Гц, что позволит наблюдать процесс установления выходного напряжения $U_2=200$ В.

На рис. 2 представлена осциллограмма выходных напряжений преобразователя $u_H(t)$ и его предельной непрерывной модели $u_H(t)'$, полученная с помощью программы MatLab 6.5 Simulink, SimPowerSystems. Анализ рисунка показывает, что выходной сигнал предельной непрерывной модели практически является „средней линией“ выходного сигнала модели реального преобразователя, содержащего пульсации выходного напряжения. Следовательно, предельная непрерывная модель преобразователя с достаточной точностью описывает поведение полезной составляющей выходного напряжения реального преобразователя. Динамические свойства преобразователя, весьма важные при его работе в замкнутой системе, можно оценить по отработке им гармонической составляющей входного сигнала, показанной на рис. 2 в увеличенном масштабе.

Таким образом, при достаточно малом периоде систему с периодическим изменением структуры можно рассматривать как непрерывную.

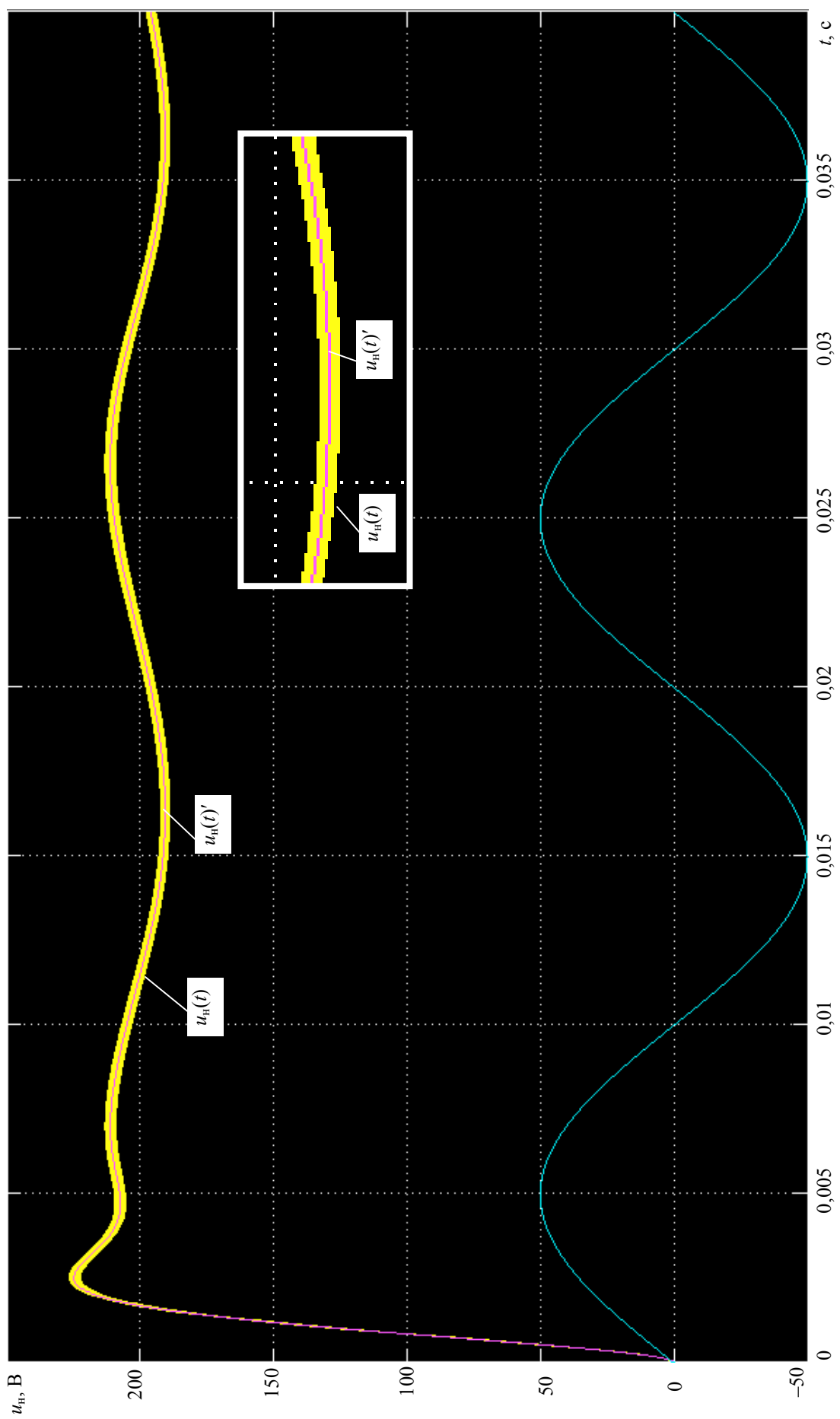


Рис. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мелешин В. Н. Транзисторная преобразовательная техника. М.: Техносфера, 2005. 628 с.
2. Зиновьев Г. С. Основы силовой электроники: Учеб. пособие. Новосибирск: НГТУ, 2004. 607 с.
3. Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А. и др. Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970. 592 с.
4. Солодов А. В., Петров Ф. С. Линейные автоматические системы с переменными параметрами. М.: Наука, 1971. 620 с.

Сведения об авторе

Анатолий Иванович Коршунов — д-р техн. наук, профессор; Военно-морской институт радиоэлектроники им. А. С. Попова, кафедра микрорадиоэлектроники, Санкт-Петербург; зав. кафедрой; E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Рекомендована кафедрой
микрорадиоэлектроники

Поступила в редакцию
09.06.09 г.