УДК 62.50

А. А. Бобцов, Н. А. Николаев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ВЕРСИИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КОМПЕНСАТОРА ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ СО СТЕПЕННЫМИ СТАТИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассматривается задача стабилизации нелинейной параметрически и функционально неопределенной системы, подверженной влиянию внешнего ограниченного возмущения. Предполагается, что измерениям доступны только выходная переменная объекта и управляющий сигнал, а нелинейности являются статическими и имеют степенные ограничения.

Ключевые слова: *компенсатор, стабилизация, нелинейная система.*

Введение. Постановка задачи. В статье [1] была рассмотрена нелинейная система в форме „вход—состояние—выход“ вида

$$\dot{z} = Fz + Lu + D\varphi(y), \quad y = R_z^T z, \tag{1}$$

где $z(t) \in R^n$ — вектор переменных состояний; F, L, D и R_z — неизвестные постоянные матрицы размерностью $n \times n$, $n \times 1$, $n \times 1$ и $n \times 1$ соответственно; $y(t) \in R$ — выходная переменная. Неизвестная функция $\varphi = \varphi(y,t)$ такая, что:

$$\left|\varphi(y,t)\right| \le C_0 \left|y(t)\right|^s \text{ для всех } y(t), \tag{2}$$

где число $C_0 > 0$ неизвестно, а целое число $s \ge 1$ известно.

В работе [1] рассматривалась возможность использования алгоритма управления (метода последовательного компенсатора), представленного в [2], для обеспечения полуглобальной асимптотической устойчивости нелинейной системы без секторных ограничений. В настоящей статье с использованием результатов [1] будет доказана работоспособность алгоритма [2] для случая, когда объект управления (1) подвержен влиянию внешнего неизвестного ограниченного возмущающего воздействия.

Рассмотрим нелинейную систему в форме „вход—выход“

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)}[u(t) + w(t)] + \frac{c(p)}{a(p)}\varphi(y,t), \tag{3}$$

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования; выходная переменная $y = y(t)$ измеряется, но ее производные $b(p) = b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0$, $c(p) = c_r p^r + c_{r-1} p^{r-1} + \ldots + c_1 p + c_0$ и $a(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots \ \ldots + a_1 p + a_0$ — полиномы с неизвестными коэффициентами, $r \le n-1$; передаточная функция $\dfrac{b(p)}{a(p)}$ имеет относительную степень $\rho = n - m$; $w(t)$ — неизвестное ограниченное гладкое возмущающее воздействие; полином $b(p)$ гурвицев $b_m > 0$.

Пусть для стабилизации системы (3) используется управление следующего вида (см. [2]):

$$u = -a(p)(\mu + \kappa)\hat{y}, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\xi}_1 = \sigma\xi_2, \\ &\dot{\xi}_2 = \sigma\xi_3, \\ &\ldots \\ &\dot{\xi}_{\rho-1} = \sigma(-k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - \ldots - k_{\rho-1}\xi_{\rho-1} + k_1 y), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\hat{y} = \xi_1, \tag{6}$$

где число μ и полином $a(p)$ такие, что передаточная функция

$$W(p) = \frac{b(p)a(p)}{a(p) + \mu b(p)a(p)} \tag{7}$$

является строго вещественно положительной; параметр $\kappa > 0$ используется для компенсации неопределенности $\varphi(y,t)$ (см. ниже доказательство теоремы, условие (П.8)); число $\sigma > \mu + \kappa$ (см. ниже доказательство теоремы, неравенство (П.6)); параметры k_i выбираются таким образом, чтобы система (5) была асимптотически устойчивой при нулевом входе $y(t)$.

Замечание. В силу следствия 3 из работы [2] существуют число $\mu > \mu_0 > 0$ и любой гурвицев полином $a(p)$ степени $\rho - 1$ такие, что передаточная функция (7) является строго вещественно положительной.

Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы доказать правомочность использования управления вида (4)—(6) (алгоритма последовательного компенсатора [2]) для обеспечения ограниченности выходной переменной $y(t)$ для любого ограниченного гладкого возмущающего воздействия $w(t)$.

Модельные преобразования и основной результат. Подставив (4) в уравнение (3), получим

$$y = \frac{b(p)}{a(p)}[-a(p)(\mu+\kappa)\hat{y} + w] + \frac{c(p)}{a(p)}\varphi(y,t) =$$

$$= \frac{b(p)}{a(p)}[-a(p)(\mu+\kappa)y + a(p)(\mu+\kappa)\varepsilon + w] + \frac{c(p)}{a(p)}\varphi(y,t). \tag{8}$$

После простых преобразований для модели (8) имеем

$$a(p)y + \mu a(p)b(p)y = b(p)a(p)[(\mu+\kappa)\varepsilon - \kappa y + w] + c(p)\varphi(y)$$

и

$$y = \frac{b(p)a(p)}{a(p) + \mu b(p)a(p)}[-\kappa y + (\mu+\kappa)\varepsilon + w] + \frac{c(p)}{a(p) + \mu b(p)a(p)}\varphi(y,t), \tag{9}$$

где передаточная функция (7) является строго вещественно положительной, а функция

$$\varepsilon = y - \hat{y}.$$

Представим модель „вход—выход“ (9) в форме „вход—состояние—выход“

$$\dot{x} = Ax + b(-\kappa y + (\mu+\kappa)\varepsilon + w) + q\varphi(y,t), \tag{10}$$

$$y = c^T x, \tag{11}$$

где $x \in R^n$ — вектор переменных состояния системы (10), (11); A, b, q и c — соответствующие матрицы перехода от модели (9) к модели (10), (11).

Так как передаточная функция $W(p)$ строго вещественно положительная, то, в соответствии с известной леммой Якубовича—Калмана (см., например, обзор [3] или монографию [4]), существует симметрическая положительно определенная матрица $P = P^T$, удовлетворяющая двум матричным соотношениям

$$A^T P + PA = -Q_1, \; Pb = c, \tag{12}$$

где $Q_1 = Q_1^T$ — положительно определенная матрица и параметры матрицы Q_1 зависят от μ и не зависят от κ.

Перепишем модель (5), (6) в форме

$$\dot{\xi} = \sigma(\Gamma\xi + dk_1 y), \quad \hat{y} = h^T \xi,$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \ldots & -k_{\rho-1} \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\eta = hy - \xi, \tag{13}$$

который связан с функцией ε следующим образом:

$$\varepsilon = y - \hat{y} = h^T hy - h^T \xi = h^T (hy - \xi) = h^T \eta.$$

Продифференцировав уравнение (13), получим

$$\dot{\eta} = h\dot{y} - \sigma(\Gamma(hy - \eta) + dk_1 y) = h\dot{y} + \sigma\Gamma\eta - \sigma(dk_1 + \Gamma h)y.$$

Так как $dk_1 = -\Gamma h$ (может быть проверено подстановкой), то

$$\dot{\eta} = h\dot{y} + \sigma\Gamma\eta, \ \varepsilon = h^T \eta, \tag{14}$$

где матрица Γ является гурвицевой в соответствии с параметром k_i системы (5) и

$$\Gamma^T N + N\Gamma = -Q_2, \tag{15}$$

где $N = N^T > 0$ и $Q_2 = Q_2^T > 0$.

Теперь сформулируем теорему, в которой будут представлены условия ограниченности всех траекторий системы (10), (11), (14).

Т е о р е м а. Рассмотрим нелинейную систему (10), (11), (14) с допущениями на нелинейную функцию $\varphi = \varphi(y, t)$ вида (2). Пусть положительные числа κ и σ удовлетворяют следующим условиям:

$$-\sigma Q_2 + \delta^{-1}(\mu + \kappa)hh^T + (\mu + \kappa)Nhc^T bb^T ch^T N +$$
$$+(\mu + \kappa)hh^T + \delta^{-1} Nhc^T AA^T ch^T N + \kappa Nhc^T bb^T ch^T N +$$
$$+\kappa Nhc^T qq^T ch^T N + \delta^{-1}\kappa Nhc^T bb^T ch^T N \le -Q$$

и

$$\kappa \ge \psi_0 C_0^4 (\kappa^{-1} + \delta^{-1})^2,$$

где $Q = Q^T$ — положительно определенная матрица, числа $0 < \delta \le 0,25$ и $\psi_0 > 0$ такие, что

$$-Q_1 + \delta I + (\delta\mu + 2\delta\kappa - 0,5\kappa)Pbb^T P + \delta Pqq^T P \le -Q < 0,$$
$$\psi_0 > \lambda_0^{-1}\lambda_1 (V(t_0))^{2s-2},$$
$$V(t_0) = x^T(t_0)Px(t_0) + \eta^T(t_0)N\eta(t_0).$$

Тогда все траектории системы (10), (11), (14) ограничены.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Выводы. Из теоремы следует, что для каждого множества начальных условий функции $V(t_0)$ найдутся положительные числа κ, ψ_0 и σ, для которых нелинейная система (10), (11),

(14) будет устойчива. Однако изменение начальных условий функции $V(t_0)$ в сторону их увеличения при фиксированных значениях κ, ψ_0 и σ может привести к нарушению условия (П.10), а следовательно, к невыполнимости неравенства (П.11). Таким образом, при фиксированных значениях κ, ψ_0 и σ можно говорить лишь о полуглобальной устойчивости нелинейной системы (10), (11), (14), и следовательно, о полуглобальной устойчивости положения равновесия $y=0$. Также заметим, что из неравенства (П.11) следует, что увеличение коэффициента κ закона управления (4) приводит к уменьшению функции $V(t)$ и, как следствие — уменьшению значений $y(t)$. В предельном случае для $\kappa\to\infty$ имеем $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V=x^T Px+\eta^T N\eta\,. \qquad (\text{П}.1)$$

Продифференцировав (П.1) в соответствии с уравнениями (10), (11) и (14), получим

$$\begin{gathered}\dot V=x^T(A^T P+PA)x+2(\mu+\kappa)x^T Pbh^T\eta+\\ +2x^T Pq\varphi(y,t)-2\kappa x^T Pby+\eta^T\sigma(\Gamma^T N+N\Gamma)\eta+2x^T Pbw+\\ +2\eta^T Nhc^T Ax+2(\mu+\kappa)\eta^T Nhc^T bh^T\eta+2\eta^T Nhc^T bw+\\ +2\eta^T Nhc^T q\varphi(y,t)-2\kappa\eta^T Nhc^T by\,. \end{gathered}\qquad (\text{П}.2)$$

Подставив в (П.2) уравнения (12), (15) и принимая во внимание неравенства

$$\begin{gathered}2x^T Pbh^T\eta\le\delta x^T Pbb^T Px+\delta^{-1}\eta^T hh^T\eta\,,\\ 2x^T Pq\varphi(y,t)\le\delta x^T Pqq^T Px+\delta^{-1}[\varphi(y,t)]^2\,,\\ 2x^T Pbw\le\frac{\kappa}{2}y^2+\frac{2}{\kappa}w^2\,,\\ 2\eta^T Nhc^T bh^T\eta\le\eta^T Nhc^T bb^T ch^T N\eta+\eta^T hh^T\eta\,,\\ 2\eta^T Nhc^T Ax\le\delta^{-1}\eta^T Nhc^T AA^T ch^T N\eta+\delta x^T x\,,\\ 2\eta^T Nhc^T q\varphi(y,t)\le\kappa\eta^T Nhc^T qq^T ch^T N\eta+\kappa^{-1}[\varphi(y,t)]^2\,,\\ -2\kappa\eta^T Nhc^T by\le\delta^{-1}\kappa\eta^T Nhc^T bb^T ch^T N\eta+\delta\kappa x^T Pbb^T Px\,,\\ 2\eta^T Nhc^T bw\le\kappa(\eta^T Nhc^T b)^2+\frac{1}{\kappa}w^2\,,\end{gathered}$$

получим

$$\begin{gathered}\dot V\le -x^T Q_1 x-\sigma\eta^T Q_2\eta-\frac{1}{2}\kappa x^T Pbb^T Px-\kappa y^2+\\ +\delta(\mu+\kappa)x^T Pbb^T Px+\delta^{-1}(\mu+\kappa)\eta^T hh^T\eta+\\ +\delta x^T Pqq^T Px+\delta^{-1}[\varphi(y,t)]^2+(\mu+\kappa)\eta^T Nhc^T bb^T ch^T N\eta+\\ +(\mu+\kappa)\eta^T hh^T\eta+\delta^{-1}\eta^T Nhc^T AA^T ch^T N\eta+\delta x^T x+\\ +\kappa\eta^T Nhc^T qq^T ch^T N\eta+\kappa(\eta^T Nhc^T b)^2+\frac{3}{\kappa}w^2+\\ +\kappa^{-1}[\varphi(y,t)]^2+\delta^{-1}\kappa\eta^T Nhc^T bb^T ch^T N\eta+\delta\kappa x^T Pbb^T Px\,,\end{gathered}\qquad (\text{П}.3)$$

где число $0<\delta\le 0{,}25$ такое, что

$$-Q_1+\delta I+(\delta\mu+2\delta\kappa-0{,}5\kappa)Pbb^T P+\delta Pqq^T P\le -Q<0\,. \qquad (\text{П}.4)$$

Подставив неравенство (П.4) в (П.3), имеем

$$\dot{V} \le -x^T Qx - \sigma\eta^T Q_2\eta - \kappa y^2 + \delta^{-1}(\mu+\kappa)\eta^T hh^T\eta +$$
$$+\delta^{-1}[\varphi(y,t)]^2 + (\mu+\kappa)\eta^T Nhc^T bb^T ch^T N\eta +$$
$$+(\mu+\kappa)\eta^T hh^T\eta + \delta^{-1}\eta^T Nhc^T AA^T ch^T N\eta +$$
$$+\kappa\eta^T Nhc^T qq^T ch^T N\eta + \kappa^{-1}[\varphi(y,t)]^2 + \kappa(\eta^T Nhc^T b)^2 + \frac{3}{\kappa}w^2 +$$
$$+\delta^{-1}\kappa\eta^T Nhc^T bb^T ch^T N\eta. \qquad (П.5)$$

Пусть число σ такое, что

$$-\sigma Q_2 + \delta^{-1}(\mu+\kappa)hh^T + (\mu+\kappa)Nhc^T bb^T ch^T N +$$
$$+(\mu+\kappa)hh^T + \delta^{-1}Nhc^T AA^T ch^T N + \kappa Nhc^T bb^T ch^T N +$$
$$+\kappa Nhc^T qq^T ch^T N + \delta^{-1}\kappa Nhc^T bb^T ch^T N \le -Q. \qquad (П.6)$$

Подставив выражение (П.6) в неравенство (П.5), получим

$$\dot{V} \le -x^T Qx - \eta^T Q\eta - \kappa y^2 + (\delta^{-1}+\kappa^{-1})[\varphi(y,t)]^2 + \frac{3}{\kappa}w^2 \le$$
$$\le -\lambda_0 V - \kappa y^2 + (\kappa^{-1}+\delta^{-1})C_0^2 y^{2s-1}y + \frac{3}{\kappa}w^2 \le$$
$$\le -\lambda_0 V - \kappa y^2 + \psi_0 C_0^4(\kappa^{-1}+\delta^{-1})^2 y^2 + \psi_0^{-1}y^{4s-2} + \frac{3}{\kappa}w^2, \qquad (П.7)$$

где в силу условия (2) $\left[\varphi(y,t)\right]^2 \le C_0^2\left|y(t)\right|^{2s}$, а $\lambda_0 > 0$ и $\psi_0 > 0$.

Пусть число κ такое, что

$$\kappa \ge \psi_0 C_0^4(\kappa^{-1}+\delta^{-1})^2, \qquad (П.8)$$

тогда

$$\dot{V} \le -\lambda_0 V + \psi_0^{-1}y^{4s-2} + \frac{3}{\kappa}w^2 \le -\lambda_0 V + \psi_0^{-1}\lambda_1(x^T Px)^{2s-1} + \frac{3}{\kappa}w^2 \le$$
$$\le -\lambda_0 V + \psi_0^{-1}\lambda_1 V^{2s-1} + \frac{3}{\kappa}w^2 = -V(\lambda_0 - \psi_0^{-1}\lambda_1 V^{2s-2}) + \frac{3}{\kappa}w^2, \qquad (П.9)$$

где число $\lambda_1 > 0$ такое, что

$$\lambda_1(x^T Px)^{2s-1} \ge (c^T x)^{4s-2} = y^{4s-2}.$$

Выбирая число

$$\psi_0 > \lambda_0^{-1}\lambda_1(V(t_0))^{2s-2}, \qquad (П.10)$$

для неравенства (П.9) получаем

$$\dot{V} < -\lambda_0 V\left(1 - \frac{(V(t))^{2s-2}}{(V(t_0))^{2s-2}}\right) + \frac{3}{\kappa}C_1 < 0 \text{ для любого } t \ge t_0. \qquad (П.11)$$

Из последнего выражения следует ограниченность всех траекторий системы (10), (11), (14), что и требовалось доказать.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-08-00139-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобцов А. А., Николаев Н. А.* Управление по выходу некоторой нелинейной системой с неизвестными параметрами и нелинейностью // АиТ. 2007. № 6. С. 150—156.

2. *Бобцов А. А., Николаев Н. А.* Синтез управления нелинейными системами с функциональными и параметрическими неопределенностями на основе теоремы Фрадкова // АиТ. 2005. № 1. С. 118—129.

3. *Барабанов Н. Е., Гелиг А. Х., Леонов Г. А.* и др. Частотная теорема (лемма Якубовича — Калмана) в теории управления // АиТ. 1996. № 10. С. 3—40.

4. *Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000.

Сведения об авторах

Алексей Алексеевич Бобцов — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: bobtsov @mail.ru

Николай Анатольевич Николаев — канд. техн. наук; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики; кафедра систем управления и информатики

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
01.07.09 г.