

А. А. БОБЦОВ, Н. А. НИКОЛАЕВ

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ВЕРСИИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КОМПЕНСАТОРА ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ СО СТЕПЕННЫМИ СТАТИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассматривается задача стабилизации нелинейной параметрически и функционально неопределенной системы, подверженной влиянию внешнего ограниченного возмущения. Предполагается, что измерениям доступны только выходная переменная объекта и управляющий сигнал, а нелинейности являются статическими и имеют степенные ограничения.

*Ключевые слова:* компенсатор, стабилизация, нелинейная система.

**Введение. Постановка задачи.** В статье [1] была рассмотрена нелинейная система в форме „вход—состояние—выход“ вида

$$\dot{z} = Fz + Lu + D\varphi(y), \quad y = R_z^T z, \quad (1)$$

где  $z(t) \in R^n$  — вектор переменных состояний;  $F$ ,  $L$ ,  $D$  и  $R_z$  — неизвестные постоянные матрицы размерностью  $n \times n$ ,  $n \times 1$ ,  $n \times 1$  и  $n \times 1$  соответственно;  $y(t) \in R$  — выходная переменная. Неизвестная функция  $\varphi = \varphi(y, t)$  такая, что:

$$|\varphi(y, t)| \leq C_0 |y(t)|^s \quad \text{для всех } y(t), \quad (2)$$

где число  $C_0 > 0$  неизвестно, а целое число  $s \geq 1$  известно.

В работе [1] рассматривалась возможность использования алгоритма управления (метода последовательного компенсатора), представленного в [2], для обеспечения полуглобальной асимптотической устойчивости нелинейной системы без секторных ограничений. В настоящей статье с использованием результатов [1] будет доказана работоспособность алгоритма [2] для случая, когда объект управления (1) подвержен влиянию внешнего неизвестного ограниченного возмущающего воздействия.

Рассмотрим нелинейную систему в форме „вход—выход“

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)} [u(t) + w(t)] + \frac{c(p)}{a(p)} \varphi(y, t), \quad (3)$$

где  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования; выходная переменная  $y = y(t)$  измеряется, но ее производные  $b(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0$ ,  $c(p) = c_r p^r + c_{r-1} p^{r-1} + \dots + c_1 p + c_0$  и  $a(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$  — полиномы с неизвестными коэффициентами,  $r \leq n-1$ ; передаточная функция  $\frac{b(p)}{a(p)}$  имеет относительную степень  $\rho = n - m$ ;  $w(t)$  — неизвестное ограниченное гладкое возмущающее воздействие; полином  $b(p)$  гурвицев  $b_m > 0$ .

Пусть для стабилизации системы (3) используется управление следующего вида (см. [2]):

$$u = -a(p)(\mu + \kappa)\hat{y}, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \sigma \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \sigma \xi_3, \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{p-1} &= \sigma(-k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 - \dots - k_{p-1} \xi_{p-1} + k_1 y), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\hat{y} = \xi_1, \quad (6)$$

где число  $\mu$  и полином  $a(p)$  такие, что передаточная функция

$$W(p) = \frac{b(p)a(p)}{a(p) + \mu b(p)a(p)} \quad (7)$$

является строго вещественно положительной; параметр  $\kappa > 0$  используется для компенсации неопределенности  $\varphi(y, t)$  (см. ниже доказательство теоремы, условие (П.8)); число  $\sigma > \mu + \kappa$  (см. ниже доказательство теоремы, неравенство (П.6)); параметры  $k_i$  выбираются таким образом, чтобы система (5) была асимптотически устойчивой при нулевом входе  $y(t)$ .

*Замечание.* В силу следствия 3 из работы [2] существуют число  $\mu > \mu_0 > 0$  и любой гурвицев полином  $a(p)$  степени  $p-1$  такие, что передаточная функция (7) является строго вещественно положительной.

Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы доказать правомочность использования управления вида (4)—(6) (алгоритма последовательного компенсатора [2]) для обеспечения ограниченности выходной переменной  $y(t)$  для любого ограниченного гладкого возмущающего воздействия  $w(t)$ .

**Модельные преобразования и основной результат.** Подставив (4) в уравнение (3), получим

$$\begin{aligned} y &= \frac{b(p)}{a(p)}[-a(p)(\mu + \kappa)\hat{y} + w] + \frac{c(p)}{a(p)}\varphi(y, t) = \\ &= \frac{b(p)}{a(p)}[-a(p)(\mu + \kappa)y + a(p)(\mu + \kappa)\varepsilon + w] + \frac{c(p)}{a(p)}\varphi(y, t). \end{aligned} \quad (8)$$

После простых преобразований для модели (8) имеем

$$a(p)y + \mu a(p)b(p)y = b(p)a(p)[(\mu + \kappa)\varepsilon - \kappa y + w] + c(p)\varphi(y)$$

и

$$y = \frac{b(p)a(p)}{a(p) + \mu b(p)a(p)}[-\kappa y + (\mu + \kappa)\varepsilon + w] + \frac{c(p)}{a(p) + \mu b(p)a(p)}\varphi(y, t), \quad (9)$$

где передаточная функция (7) является строго вещественно положительной, а функция

$$\varepsilon = y - \hat{y}.$$

Представим модель „вход—выход“ (9) в форме „вход—состояние—выход“

$$\dot{x} = Ax + b(-\kappa y + (\mu + \kappa)\varepsilon + w) + q\varphi(y, t), \quad (10)$$

$$y = c^T x, \quad (11)$$

где  $x \in R^n$  — вектор переменных состояния системы (10), (11);  $A$ ,  $b$ ,  $q$  и  $c$  — соответствующие матрицы перехода от модели (9) к модели (10), (11).

Так как передаточная функция  $W(p)$  строго вещественно положительная, то, в соответствии с известной леммой Якубовича—Калмана (см., например, обзор [3] или монографию [4]), существует симметрическая положительно определенная матрица  $P = P^T$ , удовлетворяющая двум матричным соотношениям

$$A^T P + PA = -Q_1, \quad Pb = c, \quad (12)$$

где  $Q_1 = Q_1^T$  — положительно определенная матрица и параметры матрицы  $Q_1$  зависят от  $\mu$  и не зависят от  $\kappa$ .

Перепишем модель (5), (6) в форме

$$\dot{\xi} = \sigma(\Gamma\xi + dk_1 y), \quad \hat{y} = h^T \xi,$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_{p-1} \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\eta = hy - \xi, \quad (13)$$

который связан с функцией  $\varepsilon$  следующим образом:

$$\varepsilon = y - \hat{y} = h^T hy - h^T \xi = h^T (hy - \xi) = h^T \eta.$$

Продифференцировав уравнение (13), получим

$$\dot{\eta} = h\dot{y} - \sigma(\Gamma(hy - \eta) + dk_1 y) = h\dot{y} + \sigma\Gamma\eta - \sigma(dk_1 + \Gamma h)y.$$

Так как  $dk_1 = -\Gamma h$  (может быть проверено подстановкой), то

$$\dot{\eta} = h\dot{y} + \sigma\Gamma\eta, \quad \varepsilon = h^T \eta, \quad (14)$$

где матрица  $\Gamma$  является гурвицевой в соответствии с параметром  $k_i$  системы (5) и

$$\Gamma^T N + N\Gamma = -Q_2, \quad (15)$$

где  $N = N^T > 0$  и  $Q_2 = Q_2^T > 0$ .

Теперь сформулируем теорему, в которой будут представлены условия ограниченности всех траекторий системы (10), (11), (14).

**Т е о р е м а .** Рассмотрим нелинейную систему (10), (11), (14) с допущениями на нелинейную функцию  $\varphi = \varphi(y, t)$  вида (2). Пусть положительные числа  $\kappa$  и  $\sigma$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} & -\sigma Q_2 + \delta^{-1}(\mu + \kappa)hh^T + (\mu + \kappa)Nhc^T bb^T ch^T N + \\ & + (\mu + \kappa)hh^T + \delta^{-1}Nhc^T AA^T ch^T N + \kappa Nhc^T bb^T ch^T N + \\ & + \kappa Nhc^T qq^T ch^T N + \delta^{-1}\kappa Nhc^T bb^T ch^T N \leq -Q \end{aligned}$$

и

$$\kappa \geq \psi_0 C_0^4 (\kappa^{-1} + \delta^{-1})^2,$$

где  $Q = Q^T$  — положительно определенная матрица, числа  $0 < \delta \leq 0,25$  и  $\psi_0 > 0$  такие, что

$$-Q_1 + \delta I + (\delta\mu + 2\delta\kappa - 0,5\kappa)Pbb^T P + \delta Pqq^T P \leq -Q < 0,$$

$$\psi_0 > \lambda_0^{-1} \lambda_1 (V(t_0))^{2s-2},$$

$$V(t_0) = x^T(t_0)Px(t_0) + \eta^T(t_0)N\eta(t_0).$$

Тогда все траектории системы (10), (11), (14) ограничены.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

**Выводы.** Из теоремы следует, что для каждого множества начальных условий функции  $V(t_0)$  найдутся положительные числа  $\kappa$ ,  $\psi_0$  и  $\sigma$ , для которых нелинейная система (10), (11),

(14) будет устойчива. Однако изменение начальных условий функции  $V(t_0)$  в сторону их увеличения при фиксированных значениях  $\kappa$ ,  $\psi_0$  и  $\sigma$  может привести к нарушению условия (П.10), а следовательно, к невыполнимости неравенства (П.11). Таким образом, при фиксированных значениях  $\kappa$ ,  $\psi_0$  и  $\sigma$  можно говорить лишь о полуглобальной устойчивости нелинейной системы (10), (11), (14), и следовательно, о полуглобальной устойчивости положения равновесия  $y=0$ . Также заметим, что из неравенства (П.11) следует, что увеличение коэффициента  $\kappa$  закона управления (4) приводит к уменьшению функции  $V(t)$  и, как следствие — уменьшению значений  $y(t)$ . В предельном случае для  $\kappa \rightarrow \infty$  имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = x^T P x + \eta^T N \eta. \quad (\text{П.1})$$

Продифференцировав (П.1) в соответствии с уравнениями (10), (11) и (14), получим

$$\begin{aligned} \dot{V} = & x^T (A^T P + P A) x + 2(\mu + \kappa) x^T P b h^T \eta + \\ & + 2x^T P q \varphi(y, t) - 2\kappa x^T P b y + \eta^T \sigma (\Gamma^T N + N \Gamma) \eta + 2x^T P b w + \\ & + 2\eta^T N h c^T A x + 2(\mu + \kappa) \eta^T N h c^T b h^T \eta + 2\eta^T N h c^T b w + \\ & + 2\eta^T N h c^T q \varphi(y, t) - 2\kappa \eta^T N h c^T b y. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Подставив в (П.2) уравнения (12), (15) и принимая во внимание неравенства

$$\begin{aligned} 2x^T P b h^T \eta & \leq \delta x^T P b b^T P x + \delta^{-1} \eta^T h h^T \eta, \\ 2x^T P q \varphi(y, t) & \leq \delta x^T P q q^T P x + \delta^{-1} [\varphi(y, t)]^2, \\ 2x^T P b w & \leq \frac{\kappa}{2} y^2 + \frac{2}{\kappa} w^2, \\ 2\eta^T N h c^T b h^T \eta & \leq \eta^T N h c^T b b^T c h^T N \eta + \eta^T h h^T \eta, \\ 2\eta^T N h c^T A x & \leq \delta^{-1} \eta^T N h c^T A A^T c h^T N \eta + \delta x^T x, \\ 2\eta^T N h c^T q \varphi(y, t) & \leq \kappa \eta^T N h c^T q q^T c h^T N \eta + \kappa^{-1} [\varphi(y, t)]^2, \\ -2\kappa \eta^T N h c^T b y & \leq \delta^{-1} \kappa \eta^T N h c^T b b^T c h^T N \eta + \delta \kappa x^T P b b^T P x, \\ 2\eta^T N h c^T b w & \leq \kappa (\eta^T N h c^T b)^2 + \frac{1}{\kappa} w^2, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -x^T Q_1 x - \sigma \eta^T Q_2 \eta - \frac{1}{2} \kappa x^T P b b^T P x - \kappa y^2 + \\ & + \delta (\mu + \kappa) x^T P b b^T P x + \delta^{-1} (\mu + \kappa) \eta^T h h^T \eta + \\ & + \delta x^T P q q^T P x + \delta^{-1} [\varphi(y, t)]^2 + (\mu + \kappa) \eta^T N h c^T b b^T c h^T N \eta + \\ & + (\mu + \kappa) \eta^T h h^T \eta + \delta^{-1} \eta^T N h c^T A A^T c h^T N \eta + \delta x^T x + \\ & + \kappa \eta^T N h c^T q q^T c h^T N \eta + \kappa (\eta^T N h c^T b)^2 + \frac{3}{\kappa} w^2 + \\ & + \kappa^{-1} [\varphi(y, t)]^2 + \delta^{-1} \kappa \eta^T N h c^T b b^T c h^T N \eta + \delta \kappa x^T P b b^T P x, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где число  $0 < \delta \leq 0,25$  такое, что

$$-Q_1 + \delta I + (\delta \mu + 2\delta \kappa - 0,5\kappa) P b b^T P + \delta P q q^T P \leq -Q < 0. \quad (\text{П.4})$$

Подставив неравенство (П.4) в (П.3), имеем

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -x^T Qx - \sigma \eta^T Q_2 \eta - \kappa y^2 + \delta^{-1} (\mu + \kappa) \eta^T h h^T \eta + \\
& + \delta^{-1} [\varphi(y, t)]^2 + (\mu + \kappa) \eta^T N h c^T b b^T c h^T N \eta + \\
& + (\mu + \kappa) \eta^T h h^T \eta + \delta^{-1} \eta^T N h c^T A A^T c h^T N \eta + \\
& + \kappa \eta^T N h c^T q q^T c h^T N \eta + \kappa^{-1} [\varphi(y, t)]^2 + \kappa (\eta^T N h c^T b)^2 + \frac{3}{\kappa} w^2 + \\
& + \delta^{-1} \kappa \eta^T N h c^T b b^T c h^T N \eta.
\end{aligned} \tag{П.5}$$

Пусть число  $\sigma$  такое, что

$$\begin{aligned}
& -\sigma Q_2 + \delta^{-1} (\mu + \kappa) h h^T + (\mu + \kappa) N h c^T b b^T c h^T N + \\
& + (\mu + \kappa) h h^T + \delta^{-1} N h c^T A A^T c h^T N + \kappa N h c^T b b^T c h^T N + \\
& + \kappa N h c^T q q^T c h^T N + \delta^{-1} \kappa N h c^T b b^T c h^T N \leq -Q.
\end{aligned} \tag{П.6}$$

Подставив выражение (П.6) в неравенство (П.5), получим

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -x^T Qx - \eta^T Q_2 \eta - \kappa y^2 + (\delta^{-1} + \kappa^{-1}) [\varphi(y, t)]^2 + \frac{3}{\kappa} w^2 \leq \\
& \leq -\lambda_0 V - \kappa y^2 + (\kappa^{-1} + \delta^{-1}) C_0^2 y^{2s-1} y + \frac{3}{\kappa} w^2 \leq \\
& \leq -\lambda_0 V - \kappa y^2 + \psi_0 C_0^4 (\kappa^{-1} + \delta^{-1})^2 y^2 + \psi_0^{-1} y^{4s-2} + \frac{3}{\kappa} w^2,
\end{aligned} \tag{П.7}$$

где в силу условия (2)  $[\varphi(y, t)]^2 \leq C_0^2 |y(t)|^{2s}$ , а  $\lambda_0 > 0$  и  $\psi_0 > 0$ .

Пусть число  $\kappa$  такое, что

$$\kappa \geq \psi_0 C_0^4 (\kappa^{-1} + \delta^{-1})^2, \tag{П.8}$$

тогда

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -\lambda_0 V + \psi_0^{-1} y^{4s-2} + \frac{3}{\kappa} w^2 \leq -\lambda_0 V + \psi_0^{-1} \lambda_1 (x^T P x)^{2s-1} + \frac{3}{\kappa} w^2 \leq \\
& \leq -\lambda_0 V + \psi_0^{-1} \lambda_1 V^{2s-1} + \frac{3}{\kappa} w^2 = -V (\lambda_0 - \psi_0^{-1} \lambda_1 V^{2s-2}) + \frac{3}{\kappa} w^2,
\end{aligned} \tag{П.9}$$

где число  $\lambda_1 > 0$  такое, что

$$\lambda_1 (x^T P x)^{2s-1} \geq (c^T x)^{4s-2} = y^{4s-2}.$$

Выбирая число

$$\psi_0 > \lambda_0^{-1} \lambda_1 (V(t_0))^{2s-2}, \tag{П.10}$$

для неравенства (П.9) получаем

$$\dot{V} < -\lambda_0 V \left( 1 - \frac{(V(t))^{2s-2}}{(V(t_0))^{2s-2}} \right) + \frac{3}{\kappa} C_1 < 0 \text{ для любого } t \geq t_0. \tag{П.11}$$

Из последнего выражения следует ограниченность всех траекторий системы (10), (11), (14), что и требовалось доказать.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-08-00139-а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобцов А. А., Николаев Н. А. Управление по выходу некоторой нелинейной системой с неизвестными параметрами и нелинейностью // АиТ. 2007. № 6. С. 150—156.

2. Бобцов А. А., Николаев Н. А. Синтез управления нелинейными системами с функциональными и параметрическими неопределенностями на основе теоремы Фрадкова // *АиТ*. 2005. № 1. С. 118—129.
3. Барабанов Н. Е., Гелиг А. Х., Леонов Г. А. и др. Частотная теорема (лемма Якубовича — Калмана) в теории управления // *АиТ*. 1996. № 10. С. 3—40.
4. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000.

**Сведения об авторах**

- Алексей Алексеевич Бобцов** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: bobtsov@mail.ru
- Николай Анатольевич Николаев** — канд. техн. наук; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики; кафедра систем управления и информатики

Рекомендована кафедрой  
систем управления и информатики

Поступила в редакцию  
01.07.09 г.