УДК 62.50

Д. С. Бирюков, О. В. Слита, А. В. Ушаков

ОЦЕНКА ЗАТРАТ НА УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЖЕЛАЕМОЙ СТРУКТУРЫ МОД И ИХ РОБАСТНОСТИ

Рассматриваются вопросы синтеза непрерывной системы, обладающей свойством модальной робастности, путем задания желаемой структуры мод проектируемой системы. Предлагается зафиксировать желаемое значение времени переходного процесса, а структуру мод выбирать такой, чтобы минимизировать затраты на управление. В качестве основного результата приведен алгоритм такого синтеза с использованием грамиана затрат на управление.

Ключевые слова: динамическая система, грамиан, затраты на управление, робастность.

Введение. Постановка задачи. При проектировании систем управления с желаемыми показателями качества в переходном и установившемся режимах широкое применение нашли методы [1—4], основанные на обеспечении необходимой структуры собственных значений (мод) матрицы состояния синтезируемой системы. Наиболее полно данный подход реализован в современных методах модального управления [5—8], основанных на концепции векторного и матричного подобия, что позволяет алгоритмически обеспечивать модальное управление, опирающееся на решение матричного уравнения Сильвестра. При этом выбор необходимой структуры мод в соответствии с заданными показателями качества синтезируемой системы зачастую оказывается неоднозначным. Для решения задачи выбора той или иной необходимой структуры мод авторами предлагается оценка затрат на управление при решении задачи перевода объекта из начального положения на сфере начальных состояний в начало координат. Также в процессе синтеза системы возможен контроль структуры собственных векторов ее матрицы состояния с целью обеспечения робастности элементов спектра собственных значений матрицы при наличии неопределенности задания матрицы состояния исходного объекта [9, 10].

В настоящей статье поставлена задача объединить механизм контроля затрат на управление при выборе необходимой структуры мод и механизм контроля структуры собственных векторов при обеспечении модальной робастности.

Обеспечение модальной робастности необходимой структуры мод минимальными управлениями. Рассмотрим параметрически невозмущенный объект управления (ОУ) вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,,\ x(t)\big|_{t=0} = x(0)\,,\ y(t) = Cx(t)\,, \tag{1}$$

для которого требуется синтезировать закон управления (ЗУ) в виде прямой связи по задающему воздействию $g(t)$ и обратной связи по вектору состояния $x(t)$

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t)\,, \tag{2}$$

обеспечивающий желаемые показатели качества проектируемой системы.

Объединение ОУ (1) и ЗУ (2) образует замкнутую систему

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t);\ \ y = Cx(t)\,, \tag{3}$$

где $F = A - BK$, $G = BK_g$.

Пусть система обладает неопределенностью ΔF значений параметров матрицы F так, чтобы спектр собственных значений матрицы $F+\Delta F$ принял вид $\sigma\{F+\Delta F\} = \{\lambda_i + \Delta\lambda_i, i=\overline{1,n}\}$, $\Delta\lambda = \mathrm{col}\{\Delta\lambda_i,\ i=\overline{1,n}\}$. В работе [10] доказано, что оценка $\|\Delta F\|$ вариации ΔF и оценка $\|\Delta\lambda\|$ вариации $\Delta\lambda = \mathrm{col}\{\Delta\lambda_i,\ i=\overline{1,n}\}$ вектора собственных значений λ, порождаемая вариацией ΔF , связаны неравенством

$$\|\Delta\lambda\| \le C\{M\}\|\Delta F\|\,, \tag{4}$$

где $C\{M\}$ — число обусловленности матрицы M приведения матрицы F к диагональному виду (Λ):

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_i,\ i=\overline{1,n}\} \tag{5}$$

в соответствии с матричным условием подобия

$$M\Lambda = FM\,, \tag{6}$$

где $M: \|M_i\| = 1\ (i=\overline{1,n})$; M_i — i-й столбец M .

В силу вышеприведенных соотношений подзадача обеспечения модальной робастности сводится к минимизации числа обусловленности $C\{M\}$. Подзадача обеспечения необходимой структуры мод минимальными управлениями решается с помощью грамиана затрат на управление [11].

Рассмотрим управление объектом ($g(t) = 0$) при его переводе из начального состояния $x(0)$ в конечное $x(\infty) = 0$ с помощью сигнала управления $u(t) = -Kx(t) = -Ke^{Ft}x(0)$. Для оценки затрат на управление ограничимся переводом объекта из начального состояния на сфере единичного радиуса в конечное состояние в начале координат. Введем в рассмотрение элемент $U_t = u_{[0,t]}$ линейного функционального пространства L_T^2, где $T = \{t : 0 \le t < \infty\}$. Тогда для квадрата евклидовой нормы элемента U_t функционального пространства в соответствии с определением можно записать

$$\|U_t\|^2 = \int_0^t U^T(\tau)U(\tau)d\tau = x^T(0)\int_0^t e^{F^T\tau}K^T K e^{F\tau}d\tau x(0) = x^T(0)W_U(t)x(0)\,, \tag{7}$$

где

$$W_U(t) = \int_0^t e^{F^T\tau}K^T K e^{F\tau}d\tau \tag{8}$$

— грамиан затрат на управление на интервале $[0,t]$, τ — текущее время.

Проинтегрируем выражение (8) по частям, тогда получим

$$W_U = \lim_{t\to\infty}\left(W_U\left(t\right)\right) = e^{F^T t} K^T K e^{Ft} F^{-1} - K^T K F^{-1} - F^T W_U\left(t\right) F^{-1}. \quad (9)$$

Из выражения (9) нетрудно видеть, что грамиан затрат на управление $W_U(t)$ может быть вычислен из решения матричного уравнения

$$F^T W_U\left(t\right) + W_U\left(t\right) F = -K^T K + e^{F^T t} K^T K e^{F\,t}. \quad (10)$$

Предельный переход в полученном матричном соотношении при $t\to\infty$ с учетом гурвицевости матриц F и F^T приводит к матричному уравнению типа Ляпунова относительно грамиана затрат на управление $W_U = \lim\limits_{t\to\infty} W_U(t)$ на бесконечном интервале $\left[0,\infty\right)$ матричного уравнения

$$F^T W_U + W_U F = -K^T K. \quad (11)$$

Для оценки затрат на управление на интервале $\left[0,\infty\right)$ как функции начального состояния с учетом выражений (7) и (8) становится справедливой система неравенств

$$\alpha_{\min}^{1/2}\left\{W_U\right\}\left\|x\left(0\right)\right\| \le \left\|U_\infty\right\| = \left(x^T\left(0\right) W_U x\left(0\right)\right)^{1/2} \le \alpha_{\max}^{1/2}\left\{W_U\right\}\left\|x\left(0\right)\right\|, \quad (12)$$

где $\alpha_{\min}\left\{W_U\right\}$, $\alpha_{\max}\left\{W_U\right\}$ — соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа грамиана W_U.

Если сравнение вариантов реализации структур собственных векторов осуществлять на единичной сфере начальных состояний $\left\|x\left(0\right)\right\| = 1$, то оценка максимальных затрат на управление определится выражением

$$\max_{\left\|x(0)\right\|=1}\left\|U_\infty\right\| = \alpha_{\max}^{1/2}\left\{W_U\right\}\left\|x(0)\right\|_{\left\|x(0)\right\|=1} = \alpha_{\max}^{1/2}\left\{W_U\right\}. \quad (13)$$

Таким образом, задача достижения модальной робастности, которая решается путем минимизации числа обусловленности матрицы собственных векторов и одновременным обеспечением минимальных затрат, приводит к необходимости введения агрегированного функционала следующего вида:

$$J_U = \alpha_{\max}^{1/2}\left\{W_U\right\} C\{M\}. \quad (14)$$

Для вычисления значений матрицы обратных связей K воспользуемся обобщенным модальным управлением, опирающимся на решение матричного уравнения Сильвестра [12—14].

Алгоритм решения поставленной задачи средствами обобщенного модального управления принимает следующий вид.

1. Сформировать матричные компоненты $\left(A,B,C\right)$ объекта управления вида (1) с управляемой парой $\left(A,B\right)$ и наблюдаемой парой $\left(A,C\right)$.

2. Сформировать начальный набор желаемых корней матрицы F в максимальном секторе локализации, характеризующемся углом раскрытия $2\varphi = 180°$.

3. Сформировать диагональную $\left(n\times n\right)$-матрицу $\Lambda = \mathrm{diag}\left\{\lambda_i;\, i=\overline{1,n}\right\}$ состояния модальной модели, являющуюся носителем желаемой структуры мод матрицы F состояния синтезируемой системы для текущего набора желаемых корней.

4. Задать матрицу H, согласованную по размерности с матрицей B и образующую с матрицей Λ наблюдаемую пару.

5. Решить матричное уравнение Сильвестра

$$M\Lambda - AM = -BH \tag{15}$$

при заданных значениях матриц Λ, A, B и H относительно матрицы M и вычислить $C\{M\}$.

6. Вычислить значения матрицы K отрицательной обратной связи по вектору $x(t)$ состояния ОУ (1) с помощью соотношения

$$K = HM^{-1}. \tag{16}$$

7. Решить уравнение (11) относительно грамиана затрат и вычислить его максимальное сингулярное число.

8. Вычислить значение функционала (14).

9. Если полученное значение функционала (14) меньше минимального из предыдущих итераций, зафиксировать его как новое минимальное значение. Сформировать новый набор желаемых корней путем уменьшения сектора их локализации на некоторый шаг $\Delta\varphi$. Если сектор локализации уже сужен до нуля, перейти к п. 10, иначе — к п. 3.

10. Сформировать матрицу K_g закона ОМУ в форме (2) с целью обеспечения требуемых свойств отношения вход—выход проектируемой системы, обязательным из которых является свойство равенства выхода $y(t)$ входу $g(t)$ в установившемся режиме при неподвижном состоянии системы с помощью соотношения

$$K_g = \arg\left\{\Phi(s) = C(sI - F)^{-1} BK_{g|s=0} = I\right\} = -\left(CF^{-1}B\right)^{-1}. \tag{17}$$

Пример решения задачи синтеза ОМУ для объекта третьего порядка. Рассмотрим объект управления 3-го порядка, описываемый следующими матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Будем задавать желаемую структуру собственных значений $\sigma\{F\}$ матрицы $F = A - BK$ замкнутой системы в секторе с углом раскрытия 2φ в форме

$$\sigma\{F\} = \left\{\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \cos(180°-\varphi) + i\sin(180°-\varphi),\ \lambda_3 = \cos(180°-\varphi) - i\sin(180°-\varphi)\right\}.$$

Сформируем матрицу состояния модальной модели в блочно-диагональной форме

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(180°-\varphi) & \sin(180°-\varphi) \\ 0 & -\sin(180°-\varphi) & \cos(180°-\varphi) \end{bmatrix}$$

и матрицу M подобия матриц F и Λ, сконструированную по обобщенной схеме Вандермонда, так, что она принимает вид

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos(180°-\varphi) & \sin(180°-\varphi) & -1 \\ \cos^2(180°-\varphi) - \sin^2(180°-\varphi) & 2\cos(180°-\varphi)\sin(180°-\varphi) & 1 \end{bmatrix}.$$

Решим матричное уравнение Сильвестра (14) относительно матрицы M и вычислим матрицу K по вектору $x(t)$ состояния ОУ (1) и матрицу F замкнутой системы.

Решим уравнение Ляпунова (11) относительно грамиана затрат W_U и найдем его наибольшее сингулярное число $\alpha_{\max}\{W_U\}$.

Выясним, при какой структуре желаемых корней, определяемых значением угла φ, функционал (14) принимает минимальное и максимальное значения.

График зависимости функционала J_U от значения угла φ приведен на рис. 1, видно, что функционал J_U принимает минимальное значение $J_U = 5,3958$ при $\varphi = 80°$. Таким образом, матрица обратных связей, с помощью которой происходит назначение структуры собственных векторов, обеспечивающих модальную робастность, принимает значение $K = [1 \quad 1{,}3456 \quad 1{,}3456]$.

На рис. 2 показана зависимость оценки затрат на управление $\alpha_{\max}\{W_U\}$ и норма управления для одного из значений начальных условий $x_0 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$. Из рисунка видно, что найденное значение угла $\varphi = 80°$ действительно соответствует минимальному управлению, а оценка затрат адекватно описывает норму управления.

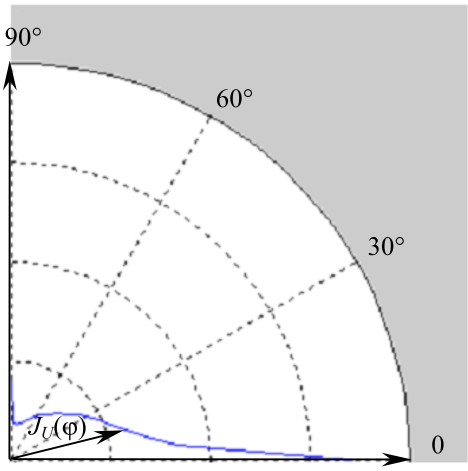

Рис. 1

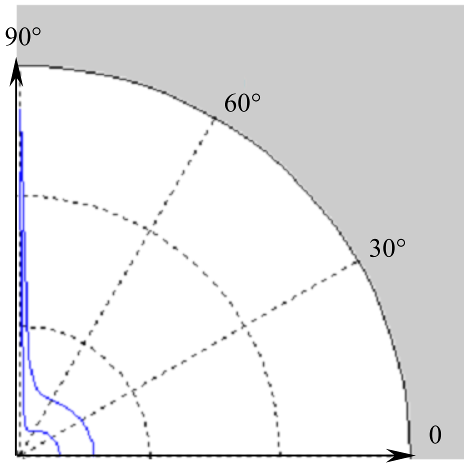

Рис. 2

Заключение. В работе сформулирован алгоритм синтеза модальной робастной системы, обеспечивающий минимальные затраты на управление. Желаемая структура мод проектируемой системы выбирается с учетом затрат, оцененных сингулярными числами грамиана затрат на управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ackermann J.* Robust control systems with uncertain physical parameters. London: Springer-Verlag, 1993.

2. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / *В. В. Григорьев, В. Н. Дроздов, В. В. Лаврентьев, А. В. Ушаков.* Л.: Машиностроение, 1983.

3. *Arzelier D., Bernoussou J., Garsia G.* Pole assignment of linear uncertain system in a sector via a Lyapunov-type approach // IEEE Transact. Automatic Control. 1993. Vol. 38, N 7. P. 1128—1132.

4. *Chilali M., Gabinet P., Apkarian P.* Robust pole placement in LMI regions // IEEE Transact. Automatic Control. 1999. Vol. 44, N 12. P. 2257—2270.

5. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. М.: Наука, 1970.

6. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

7. *Портер У. А.* Современные основания общей теории систем: Пер. с англ. М.: Наука, 1971.

8. *Cavin R.K., Bhattacharyya S.P.* Robust and well-conditioned eigenstructure assignment via Sylvester equation // Proc. American Control Conf. 1982. P. 1053—1057.

9. *Ушаков А. В.* Обобщенное модальное управление // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 3. С. 8—15.

10. *Акунов Т. А., Слита О. В., Ушаков А. В.* Назначение структуры собственных векторов, доставляющей динамической системе модальную робастность минимальными управлениями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 1. С. 6—9.

11. *Игнатьев М. Б., Мироновский Л. А, Юдович В. С.* Контроль и диагностика робототехнических систем. Л.: ЛИАП, 1985.

12. *Никифоров В. О., Ушаков А. В.* Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2002.

13. *Акунов Т. А., Ушаков А. В.* Синтез систем гарантированной модальной стабильности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. С. 9—17.

14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1973.

Сведения об авторах

Дмитрий Сергеевич Бирюков — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: dbiryukov@list.ru

Ольга Валерьевна Слита — канд. техн. наук, доцент; Балтийский государственный технический университет „Военмех“, кафедра мехатроники и робототехники, Санкт-Петербург; E-mail: o-slita@yandex.ru

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики;
E-mail: Ushakov-AVG@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
01.07.09 г.