

---

---

# ОПТИЧЕСКИЕ И ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫЕ ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ

---

---

УДК 535.317

А. Л. СУШКОВ

## ПАРАМЕТРЫ СФЕРОКОНЦЕНТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ И ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Приведено описание сфероконцентрического распределения показателя преломления в сферической и прямоугольной системах координат. Показана возможность преобразования полинома распределения показателя преломления из сферической системы координат в прямоугольную, что позволяет производить расчет коэффициентов аберраций, а также проводить компьютерное моделирование оптических элементов со сфероконцентрическим градиентом показателя преломления.

*Ключевые слова:* сферическая система координат, прямоугольная система координат, показатель преломления, сфероконцентрический градиент показателя преломления, коэффициенты аберраций.

Сфероконцентрическое распределение показателя преломления (РПП) (определяемое терминами „сферический градиент показателя преломления“, „сферический градиент“) соответствует изменению показателя преломления вдоль радиуса сферы с центром на оптической оси градиентного оптического элемента. Такое распределение можно получить, например, методами ионной диффузии исходной заготовки оптического элемента (ОЭ) со сферической поверхностью или химического послойного осаждения на сферическую поверхность; пример такой градиентной линзы на кристалле Ge / Si приведен в работе [1].

Аберрационный анализ линзы со сфероконцентрическим РПП в области первичных аберраций возможен при переходе из сферической системы координат в прямоугольную.

Впервые сфероконцентрическое РПП было изучено Мэрчандом (Marchand) [2], а основные принципы расчета первичных аберраций при наличии ОЭ со сферическим градиентом показателя преломления сформулированы в работе [3]. Однако некоторые вопросы требуют пояснения, и, кроме того, в расчетах присутствуют неточности, которые необходимо исправить.

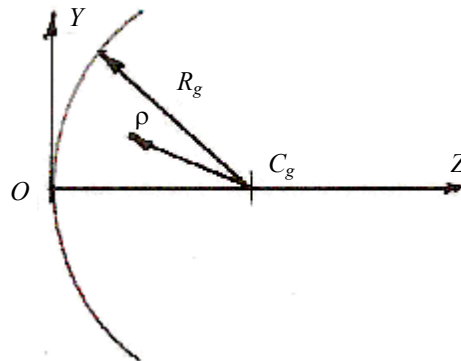
До настоящего времени работа по определению эффективности применения неоднородного показателя преломления концентрировалась вокруг двух видов РПП — радиального и осевого, которые являются частными случаями более общего полинома, описывающего показатель преломления для осесимметричных систем:

$$n(z, \xi) = n_{00} + n_{01}z + n_{02}z^2 + \dots + n_{10}\xi + n_{11}\xi z + n_{12}\xi z^2 + \dots + n_{20}\xi^2 + n_{21}\xi^2 z + n_{22}\xi^2 z^2 + \dots, \quad (1)$$

где  $\xi = x^2 + y^2$ ;  $n_{ij}$  — коэффициенты;  $i, j$  — индексы по  $\xi$  и  $z$ .

Сфероконцентрическое РПП обычно задается полиномами показателя преломления в сферической системе координат.

Геометрическое представление сферического градиента показано на рисунке. Поверхности с одинаковым показателем преломления — сферы с текущим радиусом  $\rho$  с центром в точке  $C_g$  с координатами  $(0, 0, R_g)$  в прямоугольной системе координат  $XOYZ$ . Плоскость  $YOX$  является полярной касательной плоскостью к этой поверхности, ось  $OZ$  — оптическая ось.



Полином показателя преломления в сферической системе координат с центром в точке  $C_g$  имеет вид

$$n(R_g - \rho) = n_{\rho 0} + n_{\rho 1}(R_g - \rho) + n_{\rho 2}(R_g - \rho)^2 + n_{\rho 3}(R_g - \rho)^3 + n_{\rho 4}(R_g - \rho)^4 + \dots, \quad (2)$$

где  $R_g$  — радиус технологической сферы градиентной поверхности линзы;  $\rho$  — текущее значение  $R_g$ ; при  $n(\rho)$  образуется эквирефракционная сферическая поверхность; для упрощения записи обозначим  $R_g = R$ .

При переходе в прямоугольную систему координат уравнение (2) преобразуется к виду

$$(R - \rho) = R - \left[ (R - z)^2 + y^2 + x^2 \right]^{1/2}, \quad (R - \rho) = R - (R^2 - 2Rz + z^2 + \xi)^{1/2}. \quad (3)$$

Если зависимость (3) записать как

$$R - \rho = R \left[ 1 - \left( 1 + \frac{z^2 + \xi - 2Rz}{R^2} \right)^{1/2} \right],$$

то ее можно представить в виде ряда [4]

$$R - \rho = -\frac{z^2 + \xi - 2Rz}{2R} + \frac{(z^2 + \xi - 2Rz)^2}{8R^3} + \dots \quad (4)$$

Полученное разложение в ряд является бесконечно длинным и для практического использования должно быть ограничено.

В качестве критерия точности при переходе от сферической системы координат к прямоугольной принята волновая абберация, возникающая из-за смены системы координат. Она обозначается как OPD и носит название волновой абберации преобразования:

$$\text{OPD} = Rn(R - \rho) - Rn(z, \xi) = R\Delta n,$$

где  $\Delta n$  — разность значений показателя преломления, обусловленная сменой системы координат.

Для уточнения параметров поверхности линзы в работе [3] введено понятие относительного отверстия поверхности  $S = R/2y_{\text{св}}$  (где  $2y_{\text{св}} = D_{\text{св}}$  — световой диаметр поверхности).

С учетом того, что обозначение  $\xi = x^2 + y^2$  в меридиональной плоскости преобразуется в  $\xi = y^2$ , получаем выражение для  $S$  через  $R$  и  $\xi$ :

$$S = \frac{R}{2\sqrt{\xi}},$$

откуда

$$\xi = \frac{R^2}{(2S)^2}. \quad (5)$$

При подстановке выражения (5) в член пятого порядка ряда (4) получим

$$-\frac{7}{256} \frac{\xi^5}{R^9} = -\frac{7R}{262144S^{10}}.$$

Величина волновой aberrации преобразования луча, идущего в направлении градиента, определяется как

$$\text{OPD} = n_{p1} \eta \frac{21R}{786432S^{10}},$$

где  $\eta$  — глубина зоны градиента.

Произведение  $n_{p1} \eta$  составляет перепад значений показателя преломления, который по аналогии с радиальным РПП стекла можно принять равным 0,05.

Тогда, ограничивая волновую aberrацию величиной  $\lambda/10$ , т.е. выполняя требование

$$\text{OPD} = 0,05 \frac{21R}{786432S^{10}} \leq \lambda/10,$$

можно получить условие ограничения относительного отверстия поверхности через величину  $R$ .

При  $\lambda = 0,0005$  мм граничное условие имеет вид

$$R \leq 3,745 \cdot S^{10}.$$

Например, при  $R = 100$  мм имеем  $S \geq 1,389$  или  $D_{\text{св}} \leq R/1,389 \leq 71,99$  мм.

Таким образом, на величину светового диаметра поверхности должно накладываться ограничение, критерием которого является допустимая волновая aberrация OPD.

В общем случае выражение для волновой aberrации преобразования сферической системы координат в прямоугольную имеет следующую запись:

$$\text{OPD}_e = 2,67 \cdot 10^{-5} \Delta n \frac{R}{S^{10}},$$

где  $\text{OPD}_e$  — ошибка, возникающая при смене системы координат.

С целью уменьшения ошибки уравнение (1) было расширено до 9-го порядка, т.е. для  $\xi^k z^m$  сумма степеней ( $2k+m$ ) не превышает 9.

Разложение зависимости (3) в ряд до 9-го порядка проведено с помощью программы FORMAC [3]. Результаты приведены в табл. 1—5: в табл. 1 — коэффициенты уравнения (1) в прямоугольной системе координат; в табл. 2—5 представление коэффициентов соответственно при  $n_{p1}$ ,  $n_{p2}$ ,  $n_{p3}$  и  $n_{p4}$  в прямоугольной системе координат.

Таблица 1

$z^m \backslash \xi^k$	$\xi^0$	$\xi^1$	$\xi^2$	$\xi^3$	$\xi^4$
$z^0$	$n_{00}$	$n_{10}$	$n_{20}$	$n_{30}$	$n_{40}$
$z^1$	$n_{01}$	$n_{11}$	$n_{21}$	$n_{31}$	$n_{41}$
$z^2$	$n_{02}$	$n_{12}$	$n_{22}$	$n_{32}$	
$z^3$	$n_{03}$	$n_{13}$	$n_{23}$	$n_{33}$	
$z^4$	$n_{04}$	$n_{14}$	$n_{24}$		
$z^5$	$n_{05}$	$n_{15}$	$n_{25}$		
$z^6$	$n_{06}$	$n_{16}$			
$z^7$	$n_{07}$				
$z^8$	$n_{08}$				
$z^9$	$n_{09}$				

Таблица 2

$z^m \backslash \xi^k$	$\xi^0$	$\xi^1$	$\xi^2$	$\xi^3$	$\xi^4$
$z^0$		$-\frac{1}{2R}$	$\frac{1}{8R^3}$	$-\frac{1}{16R^5}$	$\frac{5}{128R^7}$
$z^1$	1	$-\frac{1}{2R^2}$	$\frac{3}{8R^4}$	$-\frac{5}{16R^6}$	$\frac{35}{128R^8}$
$z^2$		$-\frac{1}{2R^3}$	$\frac{3}{4R^5}$	$-\frac{15}{16R^7}$	
$z^3$		$-\frac{1}{2R^4}$	$\frac{5}{4R^6}$	$-\frac{35}{16R^8}$	
$z^4$		$-\frac{1}{2R^5}$	$\frac{15}{8R^7}$		
$z^5$		$-\frac{1}{2R^6}$	$\frac{21}{8R^8}$		
$z^6$		$-\frac{1}{2R^7}$			
$z^7$		$-\frac{1}{2R^8}$			

Таблица 3

$z^m \backslash \xi^k$	$\xi^0$	$\xi^1$	$\xi^2$	$\xi^3$	$\xi^4$
$z^0$			$\frac{1}{4R^2}$	$-\frac{1}{8R^4}$	$\frac{5}{64R^6}$
$z^1$		$-\frac{1}{R}$	$\frac{3}{4R^3}$	$-\frac{5}{8R^5}$	$\frac{35}{64R^7}$
$z^2$	1	$-\frac{1}{R^2}$	$\frac{3}{2R^4}$	$-\frac{15}{8R^6}$	
$z^3$		$-\frac{1}{R^3}$	$\frac{5}{2R^5}$	$-\frac{35}{8R^7}$	
$z^4$		$-\frac{1}{R^4}$	$\frac{15}{4R^6}$		
$z^5$		$-\frac{1}{R^5}$	$\frac{21}{4R^7}$		
$z^6$		$-\frac{1}{R^6}$			
$z^7$		$-\frac{1}{R^7}$			

Таблица 4

$z^m \backslash \xi^k$	$\xi^0$	$\xi^1$	$\xi^2$	$\xi^3$	$\xi^4$
$z^0$				$-\frac{1}{8R^3}$	$\frac{3}{32R^5}$
$z^1$			$\frac{3}{4R^2}$	$-\frac{3}{4R^4}$	$\frac{45}{64R^6}$
$z^2$		$-\frac{3}{2R}$	$\frac{15}{8R^3}$	$-\frac{39}{16R^5}$	
$z^3$	1	$-\frac{3}{2R^2}$	$\frac{27}{8R^4}$	$-\frac{95}{16R^6}$	
$z^4$		$-\frac{3}{2R^3}$	$\frac{21}{4R^5}$		
$z^5$		$-\frac{3}{2R^4}$	$\frac{15}{2R^6}$		
$z^6$		$-\frac{3}{2R^5}$			
$z^7$		$-\frac{3}{2R^6}$			

Таблица 5

$z^m \backslash \xi^k$	$\xi^0$	$\xi^1$	$\xi^2$	$\xi^3$	$\xi^4$
$z^0$					$\frac{1}{16R^4}$
$z^1$				$-\frac{1}{2R^3}$	$\frac{5}{8R^5}$
$z^2$			$\frac{3}{2R^2}$	$-\frac{9}{4R^4}$	
$z^3$		$-\frac{2}{R}$	$\frac{7}{2R^3}$	$-\frac{25}{4R^5}$	
$z^4$	1	$-\frac{2}{R^2}$	$\frac{6}{R^4}$		
$z^5$		$-\frac{2}{R^3}$	$\frac{9}{R^5}$		
$z^6$		$-\frac{2}{R^4}$			
$z^7$		$-\frac{2}{R^5}$			

Сферический градиент описан распределением показателя преломления

$$n_1(\rho) = n_{\rho 0} + n_{\rho 1}(R - \rho).$$

Согласно данным табл. 2 равноценный градиент в прямоугольной системе координат будет иметь следующую запись:

$$\begin{aligned} n_1(z, \xi) = & n_{\rho 0} + n_{\rho 1}z - n_{\rho 1}\xi \left( \frac{1}{2R} + \frac{z}{2R^2} + \frac{z^2}{2R^3} + \frac{z^3}{2R^4} + \frac{z^4}{2R^5} + \frac{z^5}{2R^6} + \frac{z^6}{2R^7} + \frac{z^7}{2R^8} \right) + \\ & + n_{\rho 1}\xi^2 \left( \frac{1}{8R^3} + \frac{3z}{8R^4} + \frac{3z^2}{4R^5} + \frac{5z^3}{4R^6} + \frac{15z^4}{8R^7} + \frac{21z^5}{8R^8} \right) - n_{\rho 1}\xi^3 \left( \frac{1}{16R^5} + \frac{5z}{16R^6} + \frac{15z^2}{16R^7} + \frac{35z^3}{16R^8} \right) + \\ & + n_{\rho 1}\xi^4 \left( \frac{5}{128R^7} + \frac{35z}{128R^8} \right) + n_{\rho 1}0 \left( \xi^k z^{10-2k} \right), \quad k=0, 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Для сферического градиента  $n_2(\rho) = n_{\rho 0} + n_{\rho 4}(R - \rho)^4$  равноценный градиент в прямоугольной системе координат равен (по данным табл. 5)

$$\begin{aligned} n_2(z, \xi) = & n_{\rho 0} + n_{\rho 4}z^4 - 2n_{\rho 4}\xi \left( \frac{1}{R}z^3 + \frac{1}{R^2}z^4 + \frac{1}{R^3}z^5 + \frac{1}{R^4}z^6 + \frac{1}{R^5}z^7 \right) + \\ & + n_{\rho 4}\xi^2 \left( \frac{3}{2R^2}z^2 + \frac{7}{2R^3}z^3 + \frac{6}{R^4}z^4 + \frac{9}{R^5}z^5 \right) + n_{\rho 4}\xi^3 \left( -\frac{1}{2R^3}z - \frac{9}{4R^4}z^2 - \frac{25}{4R^5}z^3 \right) + \\ & + n_{\rho 4}\xi^4 \left( \frac{1}{16R^4} + \frac{5}{8R^5}z \right) + 0 \left( \xi^k z^{10-2k} \right), \quad k=0, 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Для градиента  $n_3(\rho) = n_{\rho 0} + n_{\rho 1}(R - \rho) + n_{\rho 4}(R - \rho)^4$  равноценный градиент в прямоугольной системе координат равен сумме двух градиентов минус  $n_{\rho 0}$ :

$$n_3(z, \xi) = n_1(z, \xi) + n_2(z, \xi) - n_{\rho 0},$$

т.е.

$$\begin{aligned} n_3(z, \xi) = & n_{\rho 0} + n_{\rho 1}z + n_{\rho 4}z^4 - \xi \left( \frac{n_{\rho 1}}{2R} + \frac{n_{\rho 1}}{2R^2}z + \frac{n_{\rho 1}}{2R^3}z^2 + \left( \frac{n_{\rho 1}}{2R^4} + \frac{2n_{\rho 4}}{R} \right) z^3 + \dots \right) + \\ & + \xi^2 \left( \frac{n_{\rho 1}}{8R^3} + \frac{3n_{\rho 1}}{8R^4}z + \left( \frac{3n_{\rho 1}}{4R^5} + \frac{3n_{\rho 4}}{2R^2} \right) z^2 + \dots \right) + \xi^3(\dots) + \xi^4(\dots). \end{aligned}$$

В области аббераций третьего порядка запись РПП ограничивается степенями для  $\xi$  и  $z$ , не превышающими 2.

Например, исходное сферическое РПП

$$n(R - \rho) = n_{\rho 0} + n_{\rho 1}(R - \rho)$$

при переходе к прямоугольной системе координат можно записать как

$$n_1(z, \xi) = n_{\rho 0} + n_{\rho 1}z - n_{\rho 1}\xi \left( \frac{1}{2R} + \frac{z}{2R^2} \right) + n_{\rho 1}\xi^2 \left( \frac{1}{8R^3} + \frac{3z}{8R^4} \right).$$

В меридиональной плоскости имеем

$$n_1(z, y^2) = n_{p0} + n_{p1}z - n_{p1}y^2 \left( \frac{1}{2R} + \frac{z}{2R^2} \right) + n_{p1}y^4 \left( \frac{1}{8R^3} + \frac{3z}{8R^4} \right).$$

Рассмотренный математический аппарат позволяет осуществить математическое моделирование оптических элементов со сферическим градиентом показателя преломления в области аббераций третьего порядка, а также компьютерное моделирование оптических систем с градиентными элементами с помощью программных комплексов (например, "OPAL-PC"), в которых неоднородный показатель преломления описывается в декартовой системе координат.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Howard J. W., Ryan-Howard D. P. Optical design of thermal imaging systems utilizing gradient-index optical materials // Opt. Eng. 1985. Vol. 24, N. 2. P. 263—266.
2. Marchand E. W. Ray tracing in gradient – index media // J. Opt. Soc. Amer. 1970. Vol. 60, N. 1. P. 1—6.
3. Fantone S. D. Optical design with spherical index gradients // Appl. Opt. 1983. Vol. 22, N. 12.
4. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1983.

#### *Сведения об авторе*

**Александр Леонидович Сушков**

— канд. техн. наук, доцент; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, кафедра оптико-электронных приборов научных исследований; E-mail: ale-sushkov@yandex.ru

Рекомендована кафедрой  
оптико-электронных приборов  
научных исследований

Поступила в редакцию  
25.03.08 г.