

А. К. БЕЛЯЕВ

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗУБЧАТО-РЕМЕННОЙ ПЕРЕДАЧИ

Рассмотрена проблема динамической устойчивости зубчато-ременной передачи. Предложен метод и получены уравнения для построения областей устойчивого поступательного движения зубчатого ремня. Построены две области неустойчивости прямолинейного движения ремня: область дивергентной неустойчивости и область параметрического резонанса.

Ключевые слова: зубчато-ременные передачи, дивергентная неустойчивость, параметрический резонанс.

Введение. Зубчато-ременные передачи широко распространены в различных устройствах и механизмах: в средствах оргтехники (принтеры, плоттеры, сканеры), двигателях и коробках передач автомобилей и пр. Это обусловлено, в первую очередь, тем, что благодаря зубчато-ременной передаче достигается высокая точность позиционирования приспособлений, управляемых ремнем. К неоспоримым плюсам следует также отнести низкий уровень шума, что немаловажно во всех сферах деятельности человека и является одним из требований, предъявляемых организациями технического надзора. Кроме того, зубчато-ременная передача достаточно проста в обслуживании и контроль ее технического состояния не представляет особой трудности.

Основное требование к зубчато-ременным передачам — точная передача крутящего момента от ведущего колеса к ведомому. Это настолько важное условие, что во многих механических устройствах зубчатый ремень называется синхронным ремнем, гарантирующим синхронность вращений и тем самым точность позиционирования. Например, в двигателях автомобилей неточность в передаче крутящего момента от коленчатого вала к распределительному влечет за собой несвоевременное открытие впускных и выпускных клапанов, т.е. неустойчивую работу всего двигателя. Известно, что ошибка в 1 % приводит к повышенной эмиссии выхлопных газов, а ошибка в 3 % — к повреждению клапанов у дизельных двигателей. Другим примером точного позиционирования является использование зубчатых ремней в печатающих механизмах, где от точности подведения печатающей головки напрямую зависит качество печати.

В настоящей статье исследуется движение зубчатого ремня в зубчато-ременной передаче; предлагается вывод дифференциального уравнения движения ремня; приводятся расчет и метод построения областей устойчивого и неустойчивого движения в зависимости от скорости движения и силы натяжения ремня.

Постановка задачи динамической устойчивости. Зубчато-ременная передача схематически изображена на рис. 1. Исследуем устойчивость равномерного движения участка ремня $0 \leq x \leq l$, для чего он аппроксимируется двуопертой балкой. Для получения дифференциального уравнения применим принцип Гамильтона — Остроградского. Кинетическая энергия участка ремня $0 \leq x \leq l$ определяется как

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l V_{ab}^2 \rho A dx = \frac{1}{2} \int_0^l [V^2 + (\dot{y} + Vy')^2] \rho A dx,$$

где ρ — плотность материала ремня, A — площадь поперечного сечения; горизонтальная и вертикальная проекции абсолютной скорости V_{ab} элемента ремня равны соответственно V и

$(\dot{y} + Vy')$, где V — переносная скорость движения элемента ремня вдоль оси x , а точка и штрих обозначают соответственно производную по времени и по x .

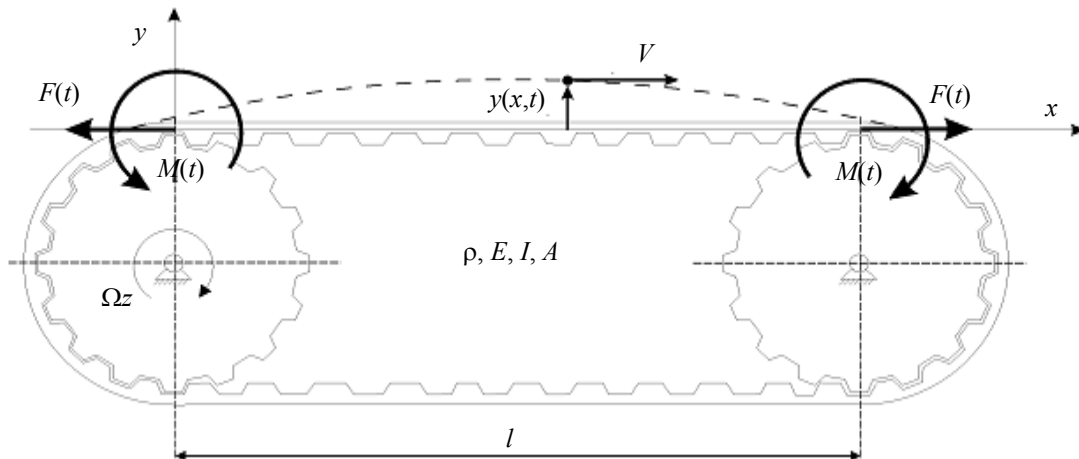


Рис. 1

Потенциальная энергия изгибной деформации ремня

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI (y'')^2 dx,$$

где EI — изгибная жесткость ремня.

Вследствие малости прогиба ремня выражение, характеризующее работу, вызванную силой натяжения ремня, допускает упрощение:

$$W_F = -F \int_0^l (1 - \cos y') dx \approx -\frac{1}{2} F \int_0^l y'^2(x, t) dx,$$

а работа моментов определяется выражением

$$W_M = M(0, t) y'(0, t) + M(l, t) y'(l, t).$$

Применяя принцип Гамильтона [1], получаем дифференциальное уравнение движения ремня

$$\rho A \ddot{y} + (V^2 \rho A - F) y'' + 2V \rho A \dot{y}' + EI y'''' = 0 \tag{1}$$

и следующие граничные условия

$$EI y''(0, t) = -M(t), \quad EI y''(l, t) = M(t). \tag{2}$$

Определение границ области устойчивости. Для сведения полученной граничной задачи, состоящей из дифференциального уравнения в частных производных (1) и граничных условий (2), к обыкновенному дифференциальному уравнению применим метод Галеркина. Решение будем искать в следующем виде:

$$y(x, t) = \frac{M(t)}{6EI} (2x^3 - 3lx^2 + l^2x) + q(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{3}$$

здесь первое слагаемое введено для преобразования граничных условий к однородным; $q(t)$ — обобщенная координата; выбрана базисная функция $\sin(\pi x/l)$, поскольку она одновременно является первой формой колебаний и формой потери статической устойчивости ремня.

Подставим выражение (3) в уравнение движения (1) и применим метод Галеркина, т.е. умножим полученное выражение на базисную функцию $\sin(\pi x/l)$ и проинтегрируем по переменной x . В результате получим

$$\ddot{q}(t) + \frac{\pi^2}{l^2} \left[\frac{1}{\rho A} \left(F + EI \frac{\pi^2}{l^2} \right) - V^2 \right] q(t) = \frac{4lV(12 - \pi^2)}{3EI\pi^3} \dot{M}(t). \quad (4)$$

Сила натяжения ремня имеет две составляющие: $F(t) = F_0 + F_1\Phi(t)$, здесь F_0 — постоянная составляющая, обозначающая силу первоначального натяжения ремня, а $F_1\Phi(t)$ — периодическая составляющая, вызванная контактами зубьев ремня и колеса при движении ремня, причем функция $\Phi(t)$ имеет период $T = \pi r/Vz$, где r — радиус зубчатого колеса, z — число зубьев колеса.

Полученное дифференциальное уравнение (4) может быть записано в форме классического уравнения Хилла:

$$\ddot{q}(t) + \Omega^2(1 + 2\mu\Phi(t))q(t) = \frac{4lV(12 - \pi^2)}{3EI\pi^2} \dot{M}(t), \quad (5)$$

где $\Omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \frac{F_0 + F_* - V^2\rho A}{F_*}}$ — собственная частота нагруженного ремня, $F_* = \frac{\pi^2}{l^2} EI$ —

критическая сила Эйлера, $\mu = \frac{F_1}{2(F_0 + F_* - V^2\rho A)}$ — коэффициент осевого возбуждения.

Как показано в работе [2], уравнение Хилла имеет области неустойчивости, причем первое приближение к границе области устойчивости может быть получено, если ограничиться первой гармоникой ряда Фурье периодической функции $\Phi(t)$, т.е. принять $\Phi(t) = \Phi_1 \cos \omega t$. Тогда уравнение Хилла преобразуется в уравнение Матье [2] (ниже рассматривается только однородное уравнение Матье):

$$\ddot{q}(t) + \Omega^2(1 + 2\mu\Phi_1 \cos \omega t)q(t) = 0. \quad (6)$$

Верхняя и нижняя границы области неустойчивости определяются выражением $\omega = 2\Omega\sqrt{1 \pm \mu}$ (см. [2]). Так как в выражениях (5) и (6) Ω и μ зависят от силы первоначального натяжения F_0 и скорости движения ремня V , то область устойчивости строится на плоскости параметров F_0, V .

Проанализируем формулу для критической скорости. Как следует из выражения для собственной частоты ремня, Ω обращается в нуль при критической скорости

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{F_0 + F_*}{\rho A}},$$

т.е. при $V > V_{\text{кр}}$ наблюдается дивергентная неустойчивость поперечного движения ремня.

Пример. Рассмотрим построение областей неустойчивости зубчатого ремня трапециевидального профиля DIN 7721-16T10×880 / DIN 7721-18T10N2. Расчеты контактного взаимодействия при движении зубчатого ремня по зубчатому колесу, с момента начального контакта до момента полного схода зуба ремня с зуба шестерни, были проведены с использованием конечно-элементного пакета ANSYS. Были приняты следующие физико-механические характеристики зубчатого ремня: модуль Юнга $E = 1 \cdot 10^9$ Н/м² и коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$, а для зубчатого колеса $E = 1 \cdot 10^{11}$ Н/м² и $\nu = 0,3$. Значения горизонтальной проекции силы, воз-

никающей при движении, иллюстрируются графиком, представленным на рис. 2. Номер задачи (N) по оси абсцисс соответствует определенному углу поворота φ зуба, так что фактически горизонтальная ось соответствует повороту колеса на один зуб.

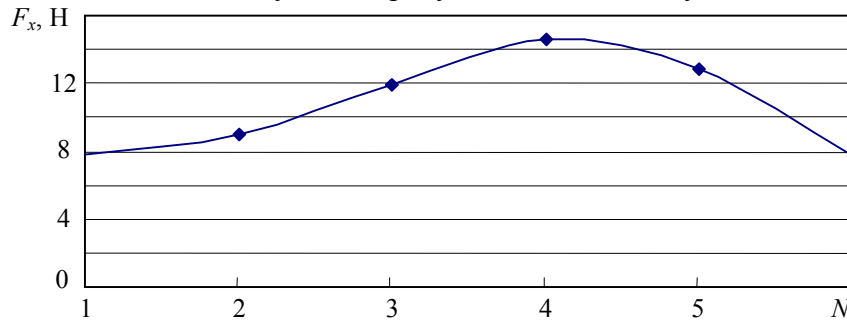


Рис. 2

Аппроксимация данной зависимости функции на интервале от 0 до 2π имеет следующий вид:

$$F_x = 0,00139\varphi^5 + 0,0337\varphi^4 - 0,685\varphi^3 + 2,89\varphi^2 - 1,71\varphi + 7,29.$$

Разложение данной зависимости в ряд Фурье позволяет вычислить значение переменной составляющей силы, возникающей при движении зубчатого ремня: $F_1 = 3,058$ Н.

Для построения областей неустойчивости были взяты следующие параметры:

$$A = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2, \rho = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3, l = 0,3 \text{ м}, EI = 0,045 \text{ Н}\cdot\text{м}^2, z = 16, r = 24 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Построенные области динамической неустойчивости (дивергентная неустойчивость и параметрический резонанс) графически представлены на рис. 3, а; область параметрического резонанса (неустойчивость) представлена в увеличенном масштабе на рис. 3, б.

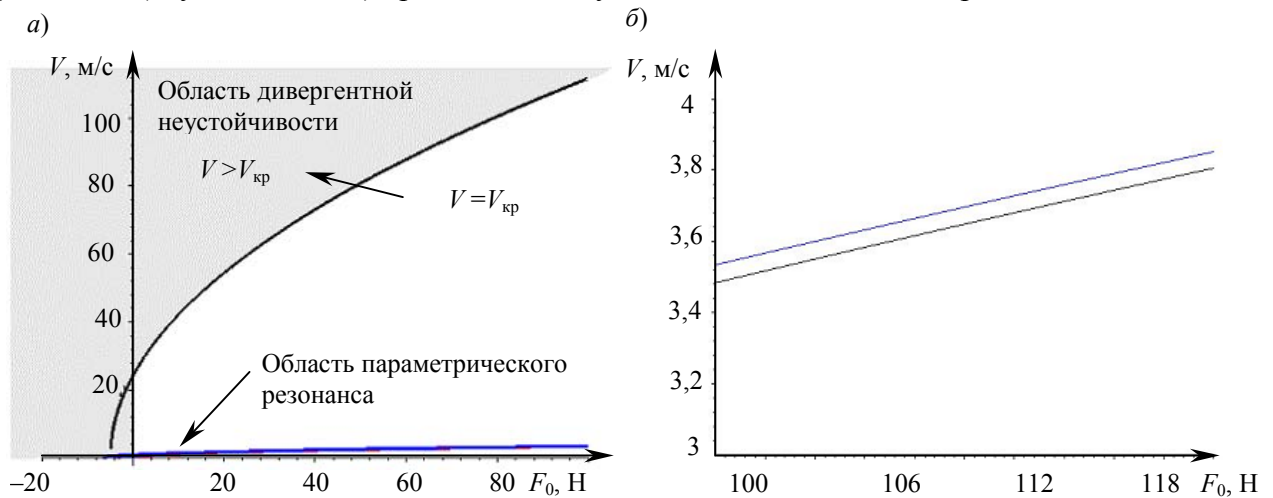


Рис. 3

Выводы. Рассмотрена проблема динамической устойчивости зубчато-ременной передачи. Предложен метод и получены уравнения для построения областей устойчивого поступательного движения зубчатого ремня.

Построены две области неустойчивости прямолинейного движения ремня принципиально различной природы. Первая — область дивергентной неустойчивости — расположена над кривой критической скорости; вторая, гораздо меньшая область является областью параметрического резонанса.

Как известно, в процессе эксплуатации любой системы в ней происходят некоторые изменения характеристик и настроек. В зубчато-ременных передачах одной из таких характеристик является сила натяжения ремня, изменение которой может повлечь попадание рабочего состояния системы в область неустойчивости. Изменения силы натяжения ремня вызывается множеством причин. В первую очередь, это естественный износ и вытягивание ремня,

ослабление крепежных и натягивающих механизмов, а также изменение температурного режима в процессе работы. Как следует из диаграммы устойчивости, неустойчивость возможна не только при превышении некой критической скорости для конкретной силы натяжения (т.е. дивергентная неустойчивость), но и изменение силы натяжения может привести к попаданию в область параметрического резонанса. Несмотря на кажущуюся узость области параметрического резонанса для выбранных параметров, она может оказать существенное влияние на рабочую область системы.

Таким образом, при проектировании систем с зубчато-ременными передачами необходимо учитывать существование дополнительных областей неустойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Наука, 1956.

Александр Константинович Беляев — *Сведения об авторе*
д-р физ.-мат. наук; Институт проблем машиноведения РАН; зам.
директора по научной работе; E-mail: vice.ipme@gmail.com

Рекомендована кафедрой
мехатроники СПбГУ ИТМО

Поступила в редакцию
15.06.09 г.