
ПРИБОРЫ ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ

УДК 621.01

Г. Б. ЗАМОРУЕВ, А. Л. ТКАЧЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ПРИ МЕДЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Предложена математическая модель трибологического взаимодействия, рассмотрены варианты взаимодействия объектов с сухим трением. Результаты расчетов приведены в графической форме.

Ключевые слова: эффект сухого трения, моделирование, расчеты, графическое представление результатов.

Известно, что коэффициент трения скольжения по своей природе не является постоянным и зависит, в частности, от относительной скорости. При скорости, равной нулю, коэффициент трения выше, чем при движении. Тело „прилипает“ к месту и для его сдвига требуется большее, чем при равномерном движении, усилие. В момент начала движения коэффициент трения практически мгновенно падает на некоторую величину от f_0 до f_{00} . Далее происходит изменение (обычно уменьшение) коэффициента трения в зависимости от скорости относительного движения до более или менее стабильного значения f , которое и приводят в таблицах в качестве коэффициента трения. Если скорость движения очень мала, нестабильность коэффициента трения (особенно его конечный мгновенный скачок в момент трогания) приводит к скачкообразному характеру движения с остановками. Описанное явление затрудняет тонкое позиционирование объекта, так как при попытке сдвинуть его на малое расстояние происходит сначала накопление потенциальной энергии упругости связи, потом — скачкообразная „разрядка“ с нерегулируемым смещением на некоторое расстояние, которое и оказывается интервалом неопределенности. Эти особенности силы трения скольжения достаточно подробно на качественном уровне описаны Н. И. Колчиным в его работе [см. лит.].

Ситуация, описанная выше, проиллюстрирована на рис. 1. Объект с массой m расположен на горизонтальной поверхности и находится под действием движущей силы и силы трения. Усилие от кинематического привода, поддерживающего постоянную горизонтальную скорость v , передается объекту посредством упругой связи с коэффициентом c . Сила трения является функцией скорости, т.е. $F_{\text{тр}} = f(\dot{x})$. Коэффициент трения при этом — переменная величина — $f(\dot{x}) \equiv f(v)$.

Для моделирования зависимости $f(\dot{x})$ выберем гиперболоидальную зависимость в виде

$$f(\dot{x}) = \frac{d}{\dot{x} + a} + b, \quad f'(\dot{x}) = -\frac{d}{(\dot{x} + a)^2}. \quad (1)$$

Коэффициенты a , b и d найдем из следующих условий:

- при $\dot{x} = 0$ коэффициент трения равен f_{00} ;
- при некоторой „установившейся“ скорости $v_{уст}$ коэффициент трения равен f ;
- производная $f'(\dot{x})$ в момент трогания равна некоторой величине $f'(0)$.

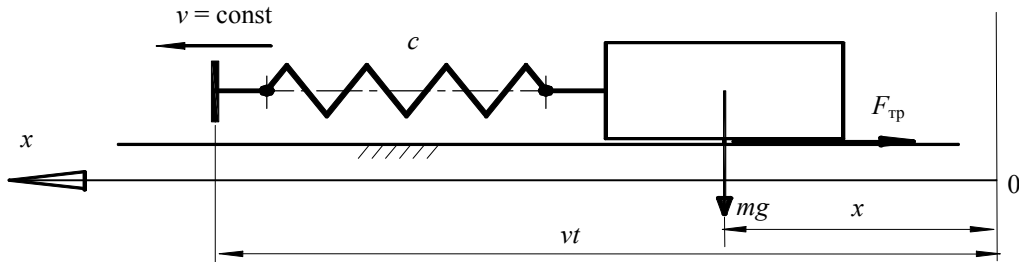


Рис. 1

Представим систему уравнений для нахождения коэффициентов в выражениях (1):

$$f_{00} = \frac{d}{a} + b, \quad f = \frac{d}{v_{уст} + a} + b, \quad f'(0) = -\frac{d}{a^2}. \quad (2)$$

Окончательный вид зависимость приобретает в момент трогания, когда значение коэффициента трения мгновенно падает от f_0 до f_{00} .

$$f(\dot{x}) = \left(\frac{d}{\dot{x} + a} + b \right) (\dot{x} > 0) + f_0 (\dot{x} \leq 0). \quad (3)$$

Зависимость, представленная выражением (3), приведена на рис. 2 (1 — f , 2 — $f(v)$).

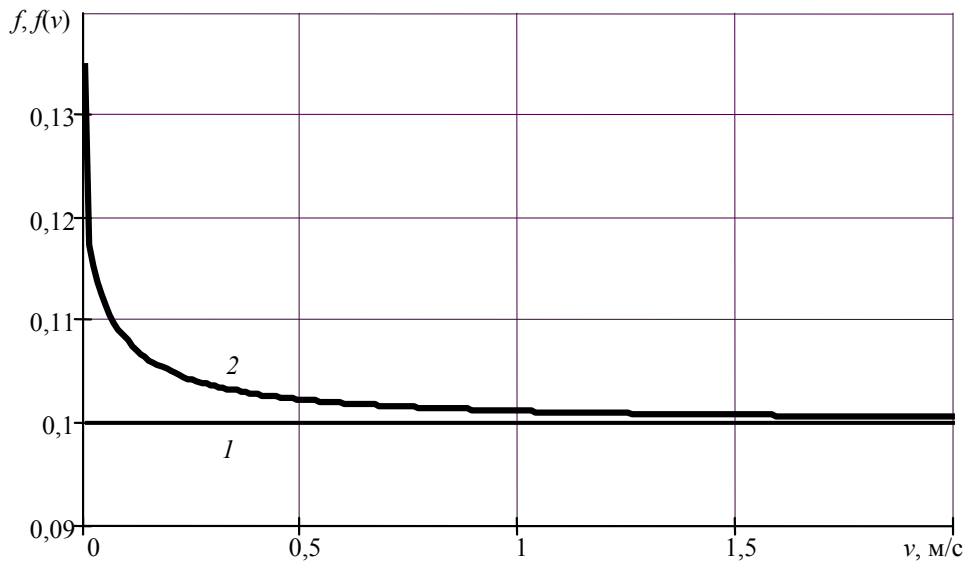


Рис. 2

Рассмотрим силы, действующие на объект. Роль движущей силы выполняет упругая связь. Действие упругой связи в данной модели будем считать „односторонним“, т.е. связь формирует силу, только когда она „растянута“ ($vt > x$). Выражение для упругой связи будет следующим:

$$c(vt - x) (vt > x). \quad (4)$$

Действие силы трения в различных ситуациях:

- $F_{тр} = 0$, если $vt \leq x$ и $\dot{x} = 0$ — связь „провисает“, объект неподвижен;
- $F_{тр} = c(vt - x)$, если $vt > x$, $\dot{x} = 0$ и $c(vt - x) < mg f_0$ — объект неподвижен, связь „натянута“, но сила трения покоя не достигнута;
- $F_{тр} = mg f_0$ — в момент, когда связь „натянулась“ до значения силы трения покоя;
- $F_{тр} = mg f(\dot{x})$ — в процессе движения объекта ($\dot{x} > 0$).

Исходя из указанных предпосылок составим динамическую модель в форме дифференциального уравнения второго порядка:

$$m\ddot{x} - c(vt - x)(vt \geq x) + c(vt - x)[\dot{x} \leq 0,001 \wedge vt \geq x \wedge c(vt - x) < mgf_0] + mgf(\dot{x})(\dot{x} > 0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (5)$$

Интегрирование выражения (5) затруднено вследствие сильной нелинейности, особенно в момент перехода от движения объекта к неподвижности под действием силы трения и при отрицательном ускорении. С помощью численных методов интегрирования сложно определить момент, когда скорость и ускорение становятся равными нулю. При отрицательном ускорении скорость переходит через нуль, только затем ускорение принимается равным нулю, таким образом, на участке неподвижности объекта может сохраняться небольшая (а иногда и значительная) отрицательная скорость. Результат интегрирования выражения (5) приведен на рис. 3, а. На втором неподвижном участке можно заметить очень малый обратный наклон линии графика, свидетельствующий об описанном явлении.

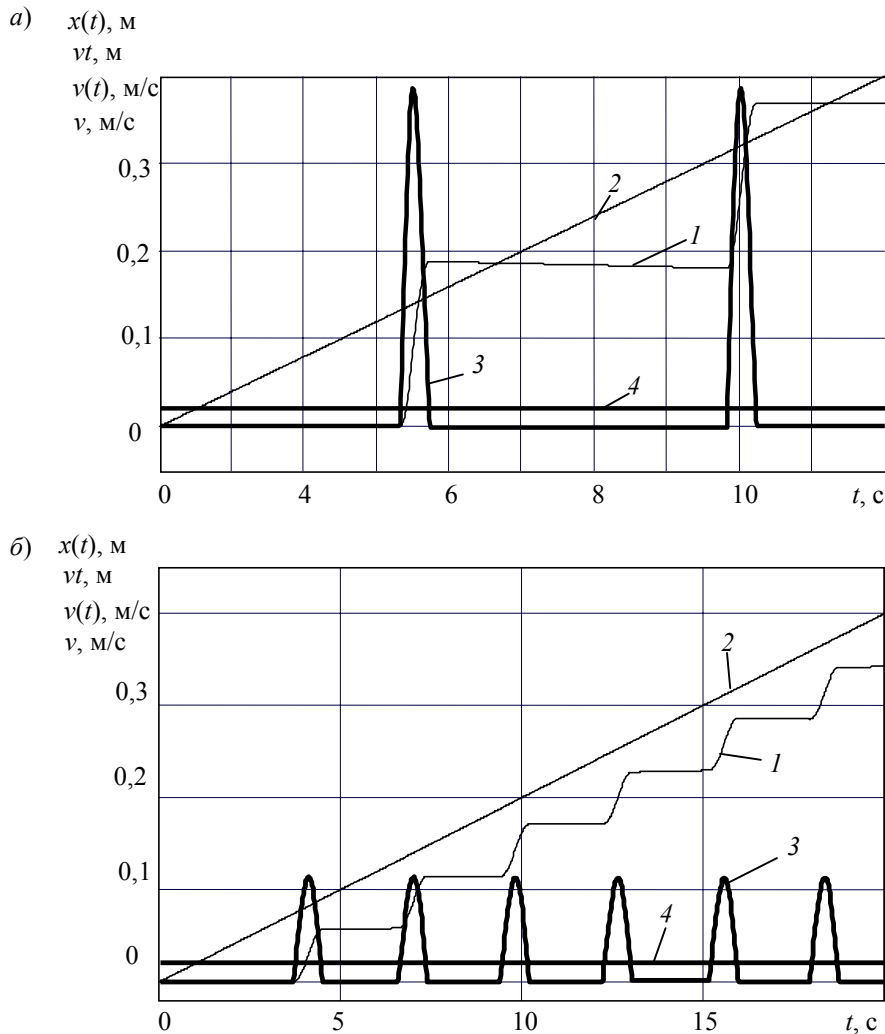


Рис. 3

Кривые 2 и 4 на рис. 3 отображают перемещение vt и скорость v кинематического привода соответственно. Пересечение графиков перемещения объекта и кинематического привода на рис. 3, а объясняется тем, что в какой-то момент объект „обгоняет“ привод, и участки графика, лежащие выше линии движения привода, соответствуют ненапряженной упругой связи. Последнее явление хорошо иллюстрирует график силы (F_0), развиваемой упругой связью и показанный на рис. 4, в кривой 1. На рис. 3 скорость объекта и его кинематического привода приведены кривыми 1 и 3. Графики ускорения объекта приведены на рис. 4, а, б.

Для сглаживания описанных выше трудностей возможно использовать другие варианты модели рассматриваемого явления. Так, можно редуцировать порядок дифференциального уравнения и построить модель в виде системы из двух уравнений первого порядка. Если обозначить $\dot{x} = x_1$, то система будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} - x_1 &= 0, \\ m \dot{x}_1 - c(vt - x)(vt \geq x) + \\ &+ c(vt - x)[x_1 < 0,001 \wedge vt \geq x \wedge c(vt - x) < mg f_0] + \\ &+ mg f(x_1)(x_1 > 0,001) = 0, \\ x(0) &= 0, \quad x_1(0) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Проинтегрировав систему (6), получим значения перемещения и скорости объекта.

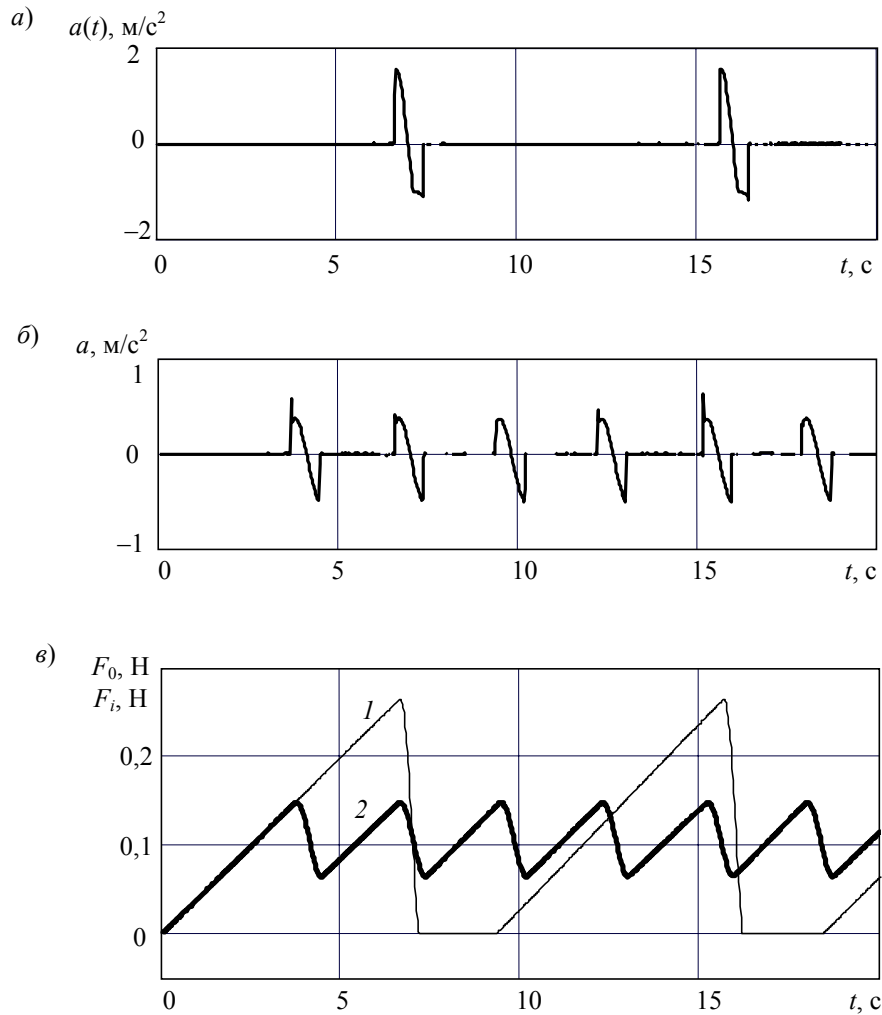


Рис. 4

Также может быть использован конечно-разностный метод. В данной задаче можно использовать принцип импульс силы (количество движения). Введем обозначения: число участков для расчета — n ; время моделирования — T ; интервал времени $\Delta t = T/n$; переменная — счетчик цикла — $i = 0, \dots, n$; начальные условия следующие $x_0 = 0, v_0 = 0, a_0 = 0$ (v и a — скорость и ускорение объекта).

Суммарная сила на i -м интервале:

$$F_i = c(vt_i - x_i)(vt_i \geq x_i) - \\ -c(vt_i - x_i)[vv_i < 0,001 \wedge vt_i \geq x_i \wedge c(vt_i - x_i) < m g f_0] - \\ -m g f_i(v_i > 0,001). \quad (7)$$

Скорость объекта на интервале $i+1$:

$$v_{i+1} = v_i + \frac{F_i}{m} \Delta t. \quad (8)$$

Перемещение и ускорение объекта на интервале $i+1$:

$$x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t, \quad a_{i+1} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}. \quad (9)$$

Все три варианта динамической модели (5)—(9) фактически являются расчетными формулами и используются для расчетов при различных исходных параметрах в среде математического моделирования MathCAD. В частности, в приведенном на рис. 3, б варианте разница между коэффициентами трения покоя f_0 и движения f не так велика, как в случае, показанном на рис. 3, а. Остановки объекта происходят при „напряженной“ упругой связи, и координаты объекта постоянно смещены относительно уровня перемещения кинематического привода. На рис. 4, в представлен график состояния упругой связи (кривая 2), соответствующего режиму движения (см. рис. 3, б). Ускорение объекта при этом режиме приведено на рис. 4, б.

В заключение следует отметить, что все представленные варианты модели дают одинаковые числовые результаты. Модель подтвердила высокую нелинейность описываемого явления, особенно проявляющуюся на чрезвычайно коротком временном промежутке перехода объекта от движения к покою. Решить указанную проблему удастся за счет значительного увеличения количества точек (участков) интегрирования. Число участков доводится до 1500—2500 при 10—20 с модельного времени, причем изменение числа участков даже на единицу может сдвинуть границы интервала и изменить результат.

ЛИТЕРАТУРА

Колчин Н. И. Механика машин. Л.: Машиностроение, 1972. Т. 2.

Сведения об авторах

- Георгий Борисович Заморюев** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники; E-mail: georgyz09@gmail.com
- Алексей Леонидович Ткачев** — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники

Рекомендована кафедрой
мехатроники

Поступила в редакцию
25.12.09 г.