

---

---

# ПРИБОРЫ ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ

---

---

УДК 621.01

Г. Б. ЗАМОРУЕВ, А. Л. ТКАЧЕВ

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ПРИ МЕДЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Предложена математическая модель трибологического взаимодействия, рассмотрены варианты взаимодействия объектов с сухим трением. Результаты расчетов приведены в графической форме.

*Ключевые слова:* эффект сухого трения, моделирование, расчеты, графическое представление результатов.

Известно, что коэффициент трения скольжения по своей природе не является постоянным и зависит, в частности, от относительной скорости. При скорости, равной нулю, коэффициент трения выше, чем при движении. Тело „прилипает“ к месту и для его сдвига требуется большее, чем при равномерном движении, усилие. В момент начала движения коэффициент трения практически мгновенно падает на некоторую величину от  $f_0$  до  $f_{00}$ . Далее происходит изменение (обычно уменьшение) коэффициента трения в зависимости от скорости относительного движения до более или менее стабильного значения  $f$ , которое и приводят в таблицах в качестве коэффициента трения. Если скорость движения очень мала, нестабильность коэффициента трения (особенно его конечный мгновенный скачок в момент трогания) приводит к скачкообразному характеру движения с остановками. Описанное явление затрудняет тонкое позиционирование объекта, так как при попытке сдвинуть его на малое расстояние происходит сначала накопление потенциальной энергии упругости связи, потом — скачкообразная „разрядка“ с нерегулируемым смещением на некоторое расстояние, которое и оказывается интервалом неопределенности. Эти особенности силы трения скольжения достаточно подробно на качественном уровне описаны Н. И. Колчиным в его работе [см. лит.].

Ситуация, описанная выше, проиллюстрирована на рис. 1. Объект с массой  $m$  расположен на горизонтальной поверхности и находится под действием движущей силы и силы трения. Усилие от кинематического привода, поддерживающего постоянную горизонтальную скорость  $v$ , передается объекту посредством упругой связи с коэффициентом  $c$ . Сила трения является функцией скорости, т.е.  $F_{\text{тр}} = f(\dot{x})$ . Коэффициент трения при этом — переменная величина —  $f(\dot{x}) \equiv f(v)$ .

Для моделирования зависимости  $f(\dot{x})$  выберем гиперболоидальную зависимость в виде

$$f(\dot{x}) = \frac{d}{\dot{x} + a} + b, \quad f'(\dot{x}) = -\frac{d}{(\dot{x} + a)^2}. \quad (1)$$

Коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $d$  найдем из следующих условий:

- при  $\dot{x} = 0$  коэффициент трения равен  $f_{00}$ ;
- при некоторой „установившейся“ скорости  $v_{уст}$  коэффициент трения равен  $f$ ;
- производная  $f'(\dot{x})$  в момент трогания равна некоторой величине  $f'(0)$ .

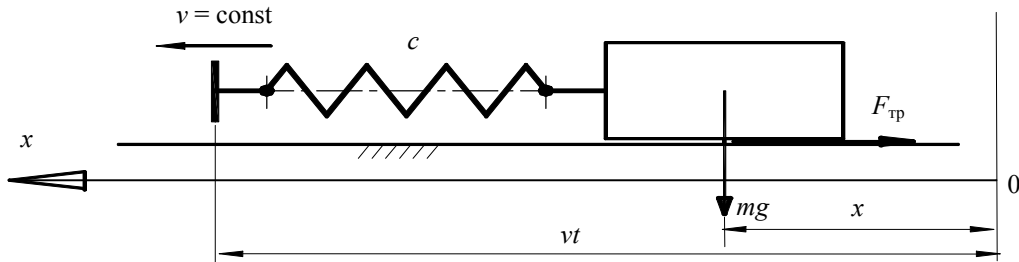


Рис. 1

Представим систему уравнений для нахождения коэффициентов в выражениях (1):

$$f_{00} = \frac{d}{a} + b, \quad f = \frac{d}{v_{уст} + a} + b, \quad f'(0) = -\frac{d}{a^2}. \quad (2)$$

Окончательный вид зависимость приобретает в момент трогания, когда значение коэффициента трения мгновенно падает от  $f_0$  до  $f_{00}$ .

$$f(\dot{x}) = \left( \frac{d}{\dot{x} + a} + b \right) (\dot{x} > 0) + f_0 (\dot{x} \leq 0). \quad (3)$$

Зависимость, представленная выражением (3), приведена на рис. 2 (1 —  $f$ , 2 —  $f(v)$ ).

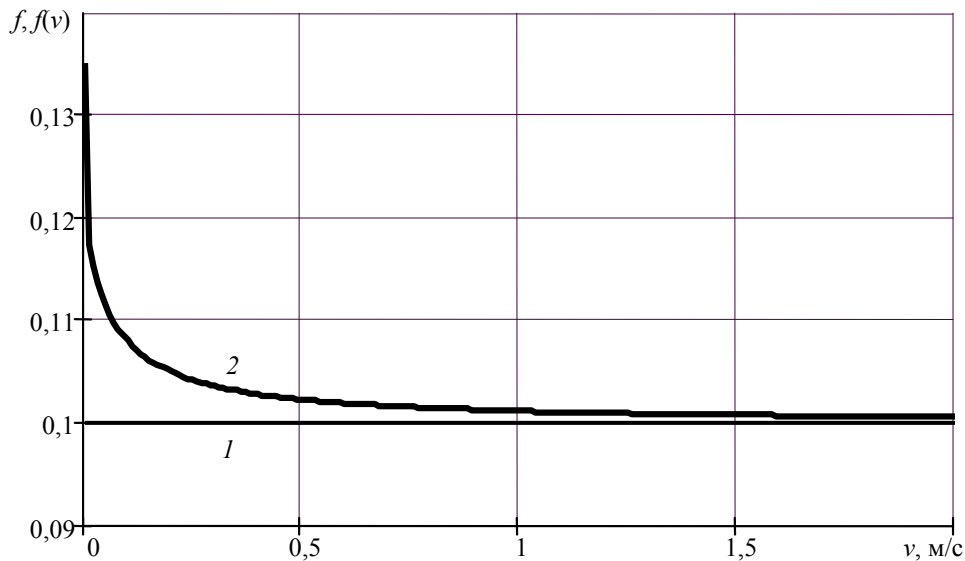


Рис. 2

Рассмотрим силы, действующие на объект. Роль движущей силы выполняет упругая связь. Действие упругой связи в данной модели будем считать „односторонним“, т.е. связь формирует силу, только когда она „растянута“ ( $vt > x$ ). Выражение для упругой связи будет следующим:

$$c(vt - x) (vt > x). \quad (4)$$

Действие силы трения в различных ситуациях:

- $F_{тр} = 0$ , если  $vt \leq x$  и  $\dot{x} = 0$  — связь „провисает“, объект неподвижен;
- $F_{тр} = c(vt - x)$ , если  $vt > x$ ,  $\dot{x} = 0$  и  $c(vt - x) < mg f_0$  — объект неподвижен, связь „натянута“, но сила трения покоя не достигнута;
- $F_{тр} = mg f_0$  — в момент, когда связь „натянулась“ до значения силы трения покоя;
- $F_{тр} = mg f(\dot{x})$  — в процессе движения объекта ( $\dot{x} > 0$ ).

Исходя из указанных предпосылок составим динамическую модель в форме дифференциального уравнения второго порядка:

$$m\ddot{x} - c(vt - x)(vt \geq x) + c(vt - x)[\dot{x} \leq 0,001 \wedge vt \geq x \wedge c(vt - x) < mgf_0] + mgf(\dot{x})(\dot{x} > 0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (5)$$

Интегрирование выражения (5) затруднено вследствие сильной нелинейности, особенно в момент перехода от движения объекта к неподвижности под действием силы трения и при отрицательном ускорении. С помощью численных методов интегрирования сложно определить момент, когда скорость и ускорение становятся равными нулю. При отрицательном ускорении скорость переходит через нуль, только затем ускорение принимается равным нулю, таким образом, на участке неподвижности объекта может сохраняться небольшая (а иногда и значительная) отрицательная скорость. Результат интегрирования выражения (5) приведен на рис. 3, а. На втором неподвижном участке можно заметить очень малый обратный наклон линии графика, свидетельствующий об описанном явлении.

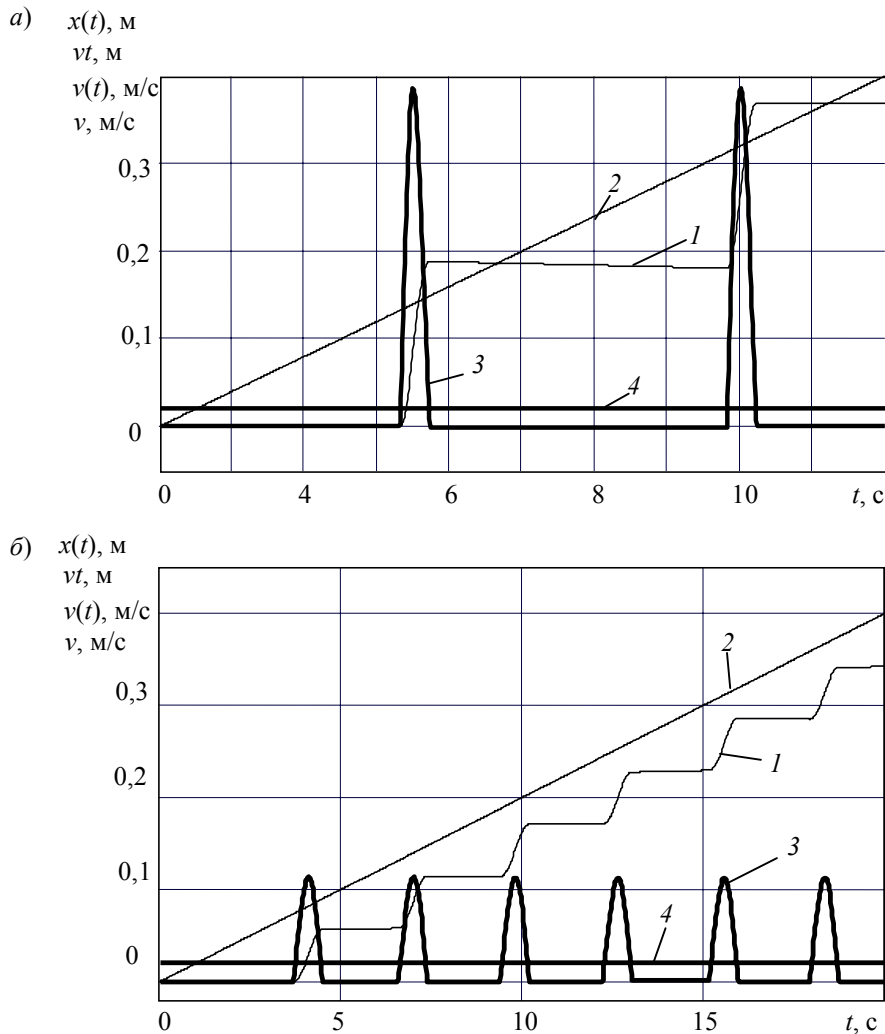


Рис. 3

Кривые 2 и 4 на рис. 3 отображают перемещение  $vt$  и скорость  $v$  кинематического привода соответственно. Пересечение графиков перемещения объекта и кинематического привода на рис. 3, а объясняется тем, что в какой-то момент объект „обгоняет“ привод, и участки графика, лежащие выше линии движения привода, соответствуют ненапряженной упругой связи. Последнее явление хорошо иллюстрирует график силы ( $F_0$ ), развиваемой упругой связью и показанный на рис. 4, в кривой 1. На рис. 3 скорость объекта и его кинематического привода приведены кривыми 1 и 3. Графики ускорения объекта приведены на рис. 4, а, б.

Для сглаживания описанных выше трудностей возможно использовать другие варианты модели рассматриваемого явления. Так, можно редуцировать порядок дифференциального уравнения и построить модель в виде системы из двух уравнений первого порядка. Если обозначить  $\dot{x} = x_1$ , то система будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} - x_1 &= 0, \\ m \dot{x}_1 - c(vt - x)(vt \geq x) + \\ &+ c(vt - x)[x_1 < 0,001 \wedge vt \geq x \wedge c(vt - x) < mg f_0] + \\ &+ mg f(x_1)(x_1 > 0,001) = 0, \\ x(0) &= 0, \quad x_1(0) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Проинтегрировав систему (6), получим значения перемещения и скорости объекта.

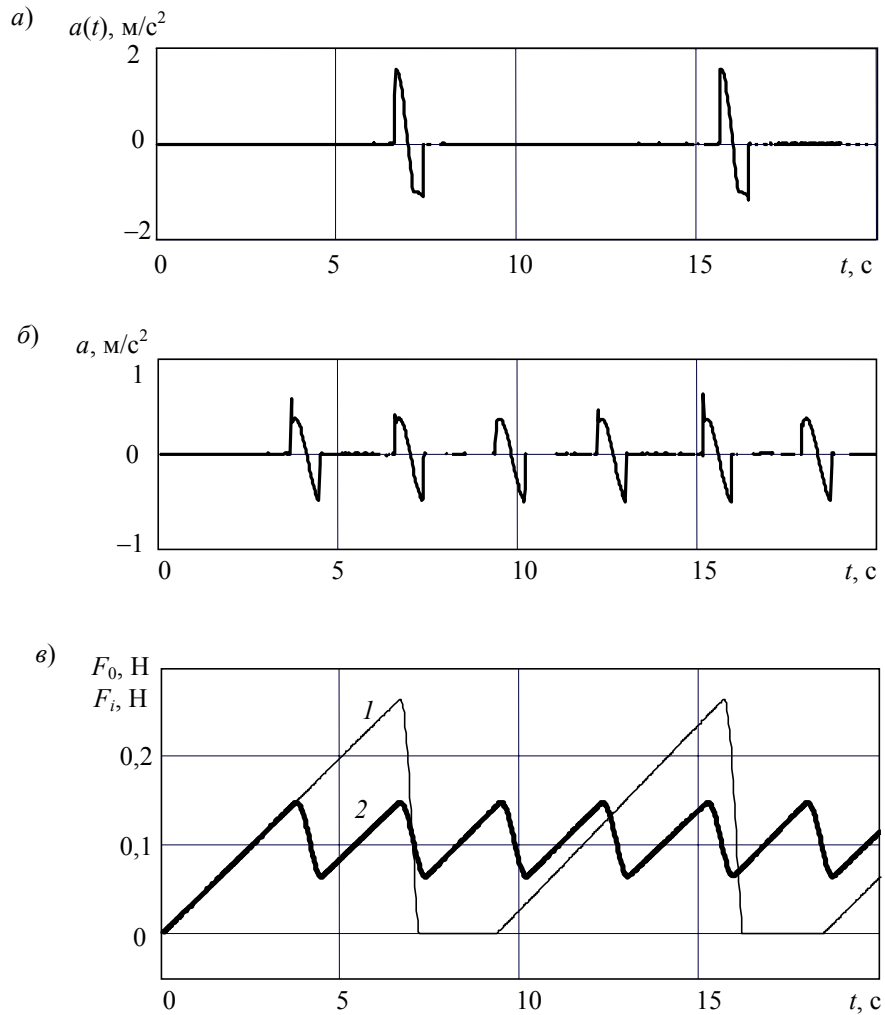


Рис. 4

Также может быть использован конечно-разностный метод. В данной задаче можно использовать принцип импульс силы (количество движения). Введем обозначения: число участков для расчета —  $n$ ; время моделирования —  $T$ ; интервал времени  $\Delta t = T/n$ ; переменная — счетчик цикла —  $i = 0, \dots, n$ ; начальные условия следующие  $x_0 = 0, v_0 = 0, a_0 = 0$  ( $v$  и  $a$  — скорость и ускорение объекта).

Суммарная сила на  $i$ -м интервале:

$$F_i = c(vt_i - x_i)(vt_i \geq x_i) - \\ -c(vt_i - x_i)[vv_i < 0,001 \wedge vt_i \geq x_i \wedge c(vt_i - x_i) < m g f_0] - \\ -m g f_i(v_i > 0,001). \quad (7)$$

Скорость объекта на интервале  $i+1$ :

$$v_{i+1} = v_i + \frac{F_i}{m} \Delta t. \quad (8)$$

Перемещение и ускорение объекта на интервале  $i+1$ :

$$x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t, \quad a_{i+1} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}. \quad (9)$$

Все три варианта динамической модели (5)—(9) фактически являются расчетными формулами и используются для расчетов при различных исходных параметрах в среде математического моделирования MathCAD. В частности, в приведенном на рис. 3, б варианте разница между коэффициентами трения покоя  $f_0$  и движения  $f$  не так велика, как в случае, показанном на рис. 3, а. Остановки объекта происходят при „напряженной“ упругой связи, и координаты объекта постоянно смещены относительно уровня перемещения кинематического привода. На рис. 4, в представлен график состояния упругой связи (кривая 2), соответствующего режиму движения (см. рис. 3, б). Ускорение объекта при этом режиме приведено на рис. 4, б.

В заключение следует отметить, что все представленные варианты модели дают одинаковые числовые результаты. Модель подтвердила высокую нелинейность описываемого явления, особенно проявляющуюся на чрезвычайно коротком временном промежутке перехода объекта от движения к покою. Решить указанную проблему удастся за счет значительного увеличения количества точек (участков) интегрирования. Число участков доводится до 1500—2500 при 10—20 с модельного времени, причем изменение числа участков даже на единицу может сдвинуть границы интервала и изменить результат.

#### ЛИТЕРАТУРА

Колчин Н. И. Механика машин. Л.: Машиностроение, 1972. Т. 2.

#### Сведения об авторах

- Георгий Борисович Заморюев** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники; E-mail: georgyz09@gmail.com
- Алексей Леонидович Ткачев** — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники

Рекомендована кафедрой  
мехатроники

Поступила в редакцию  
25.12.09 г.