

В. В. ГРИГОРЬЕВ, Д. В. КОЗИС, А. Н. КОРОВЬЯКОВ, Ю. В. ЛИТВИНОВ

## АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ РАДИОДАЛЬНОМЕРОВ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Предлагается численная характеристика эффективности функционирования систем радиоавтоматики в условиях влияния случайных возмущений. Практическое использование теоретических результатов иллюстрируется применительно к типовой функциональной конфигурации автоматического радиодальномера.

*Ключевые слова:* радиодальномер, системы радиоавтоматики, случайные возмущения, следящий измеритель дальности.

**Введение.** Системы радиоавтоматики (РА) очень разнообразны по функциональному построению и схемотехническим решениям. Однако в представлении систем радиоавтоматики структурными схемами обнаруживается схожесть схем широкого класса систем РА различного назначения, разных физических принципов реализации и схемных решений [1]. Это позволяет использовать единые подходы к анализу динамики и синтезу устройств управления систем РА.

Следящие измерители дальности (СИД) представляют важный тип систем РА. На рис. 1 приведена обобщенная функциональная схема СИД — радиодальномера [1], состоящего из временного дискриминатора (датчика рассогласования), усилительно-преобразовательного

устройства и генератора временной задержки (исполнительного устройства). Входными сигналами СИД являются отраженные от выбранной цели видеоимпульсы, поступающие с выхода приемника. „Истинная“ дальность  $D$  до цели определяется интервалом времени  $t_1$  (при постоянном значении скорости распространения электромагнитной энергии). Время задержки  $t_2$  выходных следящих импульсов относительно прямых импульсов СИД соответствует измеряемому радиодальномером значению дальности до цели  $D_{изм}$ . Во временном дискриминаторе время задержки  $t_2$  следящих импульсов сравнивается с временем  $t_1$  запаздывания отраженных от цели импульсов. В режиме слежения сигнал управления генератором временной задержки пропорционален временной ошибке сопровождения  $t = t_1 - t_2$ .

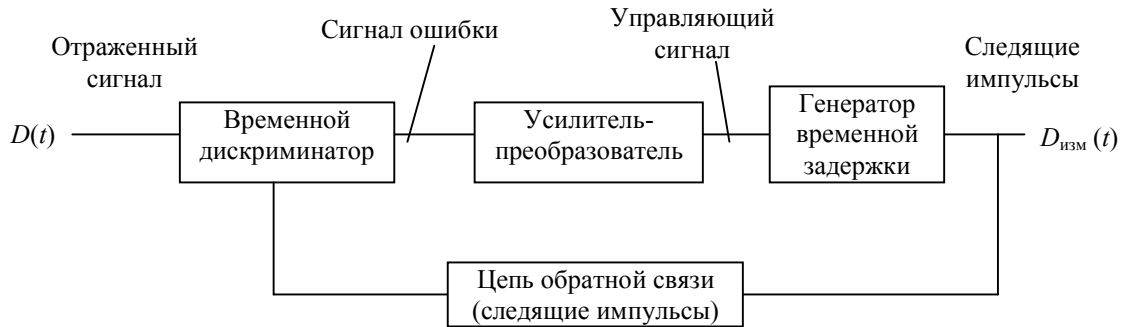


Рис. 1

**Оценка влияния возмущений.** Для описания динамики работы радиодальномера в режиме слежения используем модель, представленную уравнениями ее состояния [2, 3]:

$$\left. \begin{aligned} x(m+1) &= Fx(m) + Gw(m); \\ y(m) &= Cx(m), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $x$  — вектор состояния модели СИД;  $y$  — вектор выходных переменных;  $F = A - Bk$  — матрица замкнутого СИД;  $C$  — матрица связи векторов  $y$  и  $x$ ;  $w(m)$  — случайное возмущение, действующее на СИД; матрица  $G$  определяет входы СИД, по которым действует возмущение.

Рассмотрим влияние на СИД случайного возмущения при условии движения цели с малой скоростью, т.е. приближенно будем рассматривать задачу стабилизации системы относительно нулевого значения вектора состояния, для чего положим

$$M[x(0)] = \bar{x}(0) = 0,$$

где  $M[\bullet]$  — операция вычисления математического ожидания (МО) вектора  $x(0)$ .

Пусть матрица ковариаций вектора начальных отклонений равна

$$M[x(0) x^T(0)] = X_0.$$

Возмущение будем считать скалярным случайным процессом  $w(m)$  с дискретным временем и следующими статистическими характеристиками:

— математическим ожиданием  $M[w(m)] = \bar{w}(m)$ ;

— дисперсией возмущения  $M[(w(m) - \bar{w}(m))^2] = \sigma_m^2$ , которую будем считать стационарной величиной  $\sigma_m^2 = \sigma_0^2$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Считаем также, что состояния СИД не коррелированы с возмущением

$$M[x(k)w(m)] = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad m=0, 1, 2, \dots,$$

и, кроме того, возмущение имеет нормальное распределение.

В соответствии с перечисленными упрощающими условиями проанализируем поведение во времени первых двух моментов от вектора состояния СИД, в случае нормального распределения возмущения полностью характеризующих вероятностные свойства процессов в радиодальном номере.

Вычислив математическое ожидание от выражений (1), получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(m+1) &= \bar{F}\bar{x}(m) + G\bar{w}(m), \\ \bar{y}(m) &= C\bar{x}(m). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если  $\bar{x}(0) = 0$  и  $w(m) = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , то МО вектора состояния СИД  $\bar{x}(m)$  равно нулю для любого момента времени.

Уравнение, характеризующее изменение во времени матрицы дисперсий СИД, получим [2] следующим образом. Вычтем уравнения (2) из системы уравнений (1) и умножим полученное выражение на результат его транспонирования; вычислив МО от обеих сторон равенства, найдем

$$X_{m+1} = P X_m F + G \sigma_m^2 G^T, \quad X_0 = X(0), \quad (3)$$

где  $X_m = M[(x(m) - \bar{x}(m))(x(m) - \bar{x}(m))^T]$  — матрица ковариаций (дисперсий) вектора состояния СИД;  $P$  — вероятность нахождения вектора состояния системы в замкнутой области.

Дисперсия выходной переменной (изменения дальности) СИД определяется выражением

$$M[y(m) - \bar{y}(m)]^2 = C X_m C^T. \quad (4)$$

Если дисперсия возмущения является стационарной величиной ( $\sigma_m^2 = \sigma_0^2$ ) и замкнутый СИД асимптотически устойчив (т.е. все собственные числа матрицы  $F$  лежат в единичном круге), то решение  $X_m$  разностного матричного уравнения (3) сходится к стационарному значению, являющемуся решением алгебраического матричного уравнения

$$X = F X F^T + G \sigma^2 G^T, \quad (5)$$

которое определяет матрицу дисперсий в установившемся режиме, т.е. значения этой матрицы после окончания переходных процессов.

Уравнение вычисления МО от вектора состояния СИД (2) и уравнение вычисления матрицы дисперсий (3) не связаны друг с другом, поэтому последовательности  $\bar{x}(m)$  и  $X_m$  можно вычислять раздельно.

Рассмотрим поведение СИД при возмущениях с нулевым МО  $\bar{w}(m) = 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , и  $\bar{x}(0) = 0$ . В этом случае МО от вектора состояния СИД равно нулю для любого момента времени и статистические свойства процессов в СИД полностью и наиболее наглядно характеризуются динамикой изменения матрицы дисперсий  $X_m$ . Анализ поведения этой матрицы представляет удобный практически, с вычислительной и иллюстративной точек зрения, способ оценки влияния на динамику СИД случайных возмущений.

Вероятность нахождения вектора состояния  $x$  внутри эллипсоида

$$(x - \bar{x})^T X_m^{-1} (x - \bar{x}) = \chi^2 \quad (6)$$

подчиняется  $\chi^2$ -распределению с  $n$  степенями свободы, где  $n$  — размерность вектора состояния СИД. Поверхность, описываемая уравнением (6), называется эллипсоидом правдоподобия. Значение вероятности нахождения вектора состояния СИД внутри эллипсоида правдоподобия целесообразно вычислять как значение функции  $\chi^2$ -распределения

$$P\left[(x-\bar{x})^T X_m^{-1} (x-\bar{x}) \leq \chi^2\right] = P\left[\chi^2\right] = F\left[\chi^2, n\right],$$

приведенной в таблице.

m	n				
	1	2	3	4	5
1	0,683	0,333	0,199	0,030	0,037
4	0,994	0,265	0,739	0,534	0,451
9	0,997	0,989	0,971	0,939	0,891

Если в результате решения разностного матричного уравнения (3) вычислены матрицы дисперсий  $X_m$  с начальной матрицей  $X_0$ , то для любого момента времени  $m$  можно построить эллипсоид правдоподобия с заданным значением  $\chi^2$ , соответствующим некоторому значению вероятности  $P\left[\chi^2\right]$  нахождения траектории СИД в данный момент времени в этом эллипсоиде. Совокупность таких эллипсоидов правдоподобия образует „трубку“ равновероятностного уровня  $P\left[\chi^2\right]$ , характеризующую поведение СИД при случайных воздействиях описанного выше типа. В каждый из моментов времени  $m$  вероятность нахождения траектории движения СИД внутри „трубки“ равна  $P\left[\chi^2\right]$ . При стационарности дисперсии возмущения  $\sigma_m^2 = \sigma_0^2$  эллипсоиды правдоподобия с течением времени стремятся к постоянному эллипсоиду

$$(x-\bar{x})^T X^{-1} (x-\bar{x}) = \chi^2, \tag{7}$$

где  $X^{-1}$  — матрица, обратная по отношению к матрице  $X$ , определяемой из решения матричного уравнения (5).

Стационарная „трубка“ равновероятностного уровня, построенная на основе соотношения (7), характеризует установившийся режим работы СИД.

„Трубки“ равновероятностного уровня содержат информацию о статических и динамических свойствах СИД в наглядной графической форме. Однако для многомерных процессов наглядность геометрических образов теряется, и трудоемкость построения эллипсоидов правдоподобия растет с увеличением размерности вектора состояния СИД  $x$ . Поэтому введем скалярную характеристику, связанную с эллипсоидом правдоподобия и отражающую его свойства. Вычислим объем  $V_m$  эллипсоида правдоподобия (6):

$$V_m = [\det X_m^{-1}]^{-1/2} V^0 = [\det X_m]^{1/2} V^0,$$

где  $V$  — объем сферы  $(x-\bar{x})^T (x-\bar{x}) = \chi^2$  радиусом  $\chi$ .

Значение  $V_m$  в момент времени  $m$  характеризует тот объем в пространстве состояний, в котором с вероятностью  $P\left[\chi^2\right]$  может находиться траектория СИД. Характер изменения во времени объема  $V_m$  связан с динамическими свойствами СИД, а именно со сходимостью процессов. Значение объема эллипсоида правдоподобия в установившемся режиме (см. формулу (7)) характеризует точностные показатели СИД.

Вычисление матрицы  $X_m^{-1}$  для построения эллипсоида правдоподобия (6) можно проводить как на основе решения матричного уравнения (3) с последующим обращением матрицы  $X_m$ , так и на основе рекуррентного соотношения

$$X_m = (F^{-1})^T X_m^{-1} F^{-1} \left( I + (F^{-1})^T X_m^{-1} G \sigma_m^2 G^T \right)^{-1}, \quad X_0^{-1} = X^{-1}(0),$$

которое следует из уравнения (3).

**Пример.** В дальномерных системах РЛС для обеспечения требуемых динамических свойств и точности измерителей дальности широко используются следующие типовые структуры СИД: дальномер с одним интегратором, дальномер с интегратором и фильтром, дальномер с двумя интеграторами. Рассмотрим влияние случайных возмущений на дальномер с двумя интеграторами, структурная схема непрерывной модели которого приведена на рис. 2.

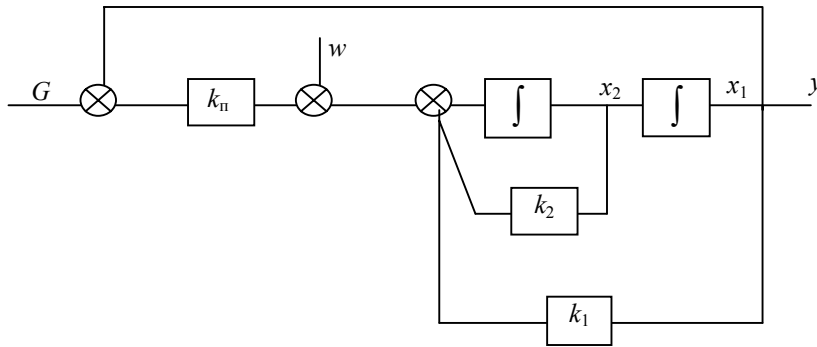


Рис. 2

Уравнения дискретизированной модели последовательного соединения экстраполятора (запоминающего элемента) и исполнительной части (ИЧ) дальномера (см. рис. 3) имеют вид:

$$\begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \cdot u(m);$$

$$y(m) = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix},$$

где  $T$  — интервал дискретности (интервал следования импульсов дальномера).

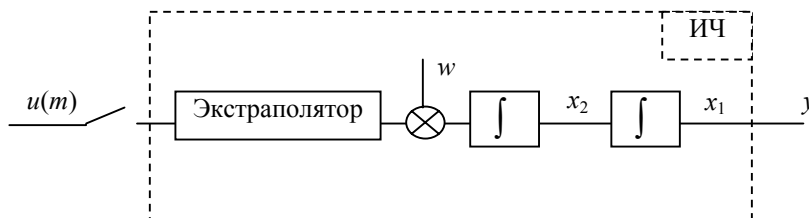


Рис. 3

Использование в дальномере закона управления

$$u(m) = -k'_1 x_1(m) - k_2 x_2(m) - k_n x_1(m) = -k_1 x_1(m) - k_2 x_2(m),$$

где  $k'_1, k_1, k_2$  — коэффициенты (параметры) закона управления,  $k_n$  — коэффициент передачи линеаризованной модели пеленгационного устройства дальномера, приводит к следующим уравнениям замкнутого СИД:

$$\begin{bmatrix} x_1(m+1) \\ x_2(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (k_1 T^2)/2 & T - (k_2 T^2)/2 \\ -k_1 T & 1 - k_1 T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix},$$

$$y(m) = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(m) \\ x_2(m) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, динамическая матрица  $F$  замкнутого СИД будет иметь вид

$$F = \begin{bmatrix} 1 - (k_1 T^2)/2 & T - (k_2 T^2)/2 \\ -k_1 T & 1 - k_1 T \end{bmatrix}.$$

Матрица  $G$ , определяющая входы, по которым действует возмущение, равна

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

что видно из анализа схемы СИД, приведенной на рис. 2.

Выберем следующие значения параметров:  $T=1/500$  (500 импульсов за секунду),  $k_1=400$ ,  $k_2=400$ , тогда матрица  $F$  в модели замкнутого СИД и матрица  $G$  будут равны

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0,002 \\ -0,8 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения матрицы  $F$  замкнутого СИД по модулю меньше единицы ( $z_1=0,20$ ,  $z_2=0,99$ ). Замкнутый СИД устойчив, и существует установившийся режим отслеживания измеряемой дальности.

Для оценки влияния шумов на работу дальномера в установившемся режиме измерения фиксированной (не изменяющейся) дальности при дисперсии возмущения  $\sigma^2=1$  решаем уравнение (5) относительно матрицы ковариаций  $X$ :

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 10^{-3} \\ -0,8 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0,8 \\ 2 \cdot 10^{-3} & 0,2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

тогда

$$X = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-3} & -10^{-3} \\ -10^{-3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что матрица  $X$  положительно определена (в соответствии с критерием Сильвестра положительной определенности матриц). Обратная к матрице  $X$  матрица  $X^{-1}$  равна

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 333,44 & 0,33344 \\ 0,33344 & 1 \end{bmatrix}.$$

Дисперсия выходной координаты СИД (измеренной дальности) в установившемся режиме в соответствии с выражением (4) определяется как

$$d_y = CXC^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-3} & -10^{-3} \\ -10^{-3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot 10^{-3}.$$

Установившийся режим работы СИД, описываемый соотношением (7), в рассматриваемом конкретном примере оценивается соотношением

$$(x - \bar{x})^T \cdot \begin{bmatrix} 333,44 & 0,33344 \\ 0,33344 & 1 \end{bmatrix} \cdot (x - \bar{x}) = \chi^2.$$

Стационарная „трубка“ равновероятностного уровня, определяемая этим соотношением, оказывается очень „сплюсненной“.

**Заключение.** Время сходимости процессов в СИД к установившемуся режиму оценивается несколькими десятками интервалов дискретности  $T$ , но в силу малого значения  $T$  ( $T=1/500=0,002$  с) это время вполне приемлемо и оценивается величиной порядка 0,04 с.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дудник П. И., Чересов Ю. И. Авиационные радиолокационные устройства. М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1986.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
3. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.

*Сведения об авторах*

- Валерий Владимирович Григорьев** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: grigvv@yandex.ru
- Дмитрий Владимирович Козис** — канд. техн. наук, доцент; филиал РАН „Спецтехника“, Санкт-Петербург; директор; E-mail: fcd.kdv@gmail.com
- Анатолий Николаевич Коровьяков** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: 06kan@mail.ru
- Юрий Володарович Литвинов** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: yurl13@yandex.ru

Рекомендована кафедрой  
систем управления и информатики  
СПбГУ ИТМО

Поступила в редакцию  
11.09.09 г.