УДК 519.65

В. А. Козырев, А. Е. Куменко, А. Г. Рудых, В. А. Русанов

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕГРЕССИОННО-ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ НЕСАНКЦИОНИРОВАННОМ СКАНИРОВАНИИ ЕГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Предложена процедура оптимизации линейно-угловых координат электромагнитного источника излучения с позиции минимальной наблюдаемости интенсивности его электромагнитного поля в заданных точках трехмерного континуума (точках зондирования). Основа решения — представление ковариантными тензорами фиксированной валентности дистанционной интенсивности излучения в зависимости от пространственно-угловой ориентации его источника.

Ключевые слова: *нелинейная регрессия, ковариантный тензор конечной валентности, задача квадратичной оптимизации.*

Введение. Регрессионный анализ первоначально приобрел значительный теоретико-прикладной интерес в задачах определения оптимальных параметров линейных стационарных статических систем типа „вход—выход“; в большинстве случаев исследователи ограничивались применением этого анализа к конечномерным системам (см., например, [1, 2]). При этом задача регрессии формулировалась в терминах вычисления оптимальной (как правило, квадратичной) оценки этих параметров по методу наименьших квадратов с последующим применением [3] алгоритма построения соответствующей псевдообратной матрицы.

Способ представления регрессионного анализа в настоящей работе отличается от традиционного, поскольку авторы стремились выявить геометрическую, качественную сторону нелинейного регрессионного моделирования и его приложений. В соответствии с этим ниже приведен (в отличие от работы [2]) ряд понятий, которым ранее не уделялось должного внимания; поэтому пришлось представлять их достаточно подробно в рамках стандартных элементов тензорной алгебры [4] и функционального анализа [5]. Прикладной задачей в настоящей работе является определение (вычисление) линейно-угловых координат электромагнитного источника излучения (ЭИИ) в целях его минимальной „взвешенно-осредненной электромагнитной наблюдаемости“ в некоторых фиксированных точках возможной пеленгации сигнала ЭИИ. Такая постановка вопроса позволяет решать физическую задачу электронной защиты ПЭВМ от внешнего несанкционированного сканирования его побочных электромагнитных излучений и наводок (при этом в техническом плане проще всего решается задача перехвата информации, отображаемой на экране дисплея [1]).

Постановка задачи. Пусть R — поле вещественных чисел, R^n — n-мерное векторное пространство над R с евклидовой нормой $\|\cdot\|_R{}^n$, $\mathrm{col}(y_1,\ldots,y_n)\in R^n$ — вектор-столбец с элементами $y_1,\ldots,y_n\in R$, $M_{n,m}(R)$ — пространство всех $(n\times m)$-матриц с элементами из R и фробениусовой матричной нормой $\|D\|_F=(\sum d_{ij}{}^2)^{1/2}$, $D=[d_{ij}]$. Через $T_m{}^k$ обозначим пространство всех ковариантных тензоров k-й валентности (вещественных полилинейных форм $f^{k,m}$: $R^m\times\ldots\times R^m\to R$) с тензорной нормой $\| f^{k,m}\|_T=(\sum t^2{}_{i\ldots j})^{1/2}$, где $t_{i\ldots j}$ — коэффициенты (координаты [4, с. 96]) тензора $f^{k,m}$, значения которых заданы относительно стандартного базиса в R^m.

Пусть $\omega\in R^m$ — некоторый фиксированный вектор линейно-угловых координат ЭИИ. Выделим к рассмотрению класс многомерных нелинейных систем „вход—выход“ [6], описываемых векторно-тензорным уравнением регрессии вида

$$w(\omega+v)=c+Av+\mathrm{col}(\textstyle\sum_{j=2,\ldots,k} f_1^{j,m}(v,\ldots,v),\ldots,\sum_{j=2,\ldots,k} f_n^{j,m}(v,\ldots,v))+\varepsilon(\omega,v), \quad (1)$$

$w(\omega+v)\in R^n$, $v\in R^m$, $c\in R^n$, $A\in M_{n,m}(R)$, $f_i^{j,m}\in T_m^{\ j}$, вектор-функция $\varepsilon(\omega, v)$: $R^m\to R^n$ класса $\|\varepsilon(\omega,v)\|_{R^n}=o((v_1^2+\ldots+v_m^2)^{k/2})$, $v=\mathrm{col}(v_1,\ldots,v_m)$.

Пусть $\{b_i\}_{1\le i\le n}\subset R^3$ — совокупность точек возможного несанкционированного зондирования электромагнитного сигнала ЭИИ, $v\in R^m$ — вектор пространственно-угловой *ориентации* ЭИИ[1] (с началом в ω), $w(\omega+v)$ — вектор *выходных* сигналов ЭИИ (интенсивность электромагнитного поля ЭИИ в точках b_i, $1\le i\le n$).

З а д а ч а

1. Для заданного аргумента $\omega\in R^m$ вектор-функции $w(\cdot)$: $\Omega\to R^n$ (интенсивность ЭИИ в точках b_i, $1\le i\le n$), $\Omega\subset R^m$ — открытая окрестность точки ω и фиксированного индекса k определить аналитические условия, при которых $w(\cdot)$ удовлетворяет системе (1) с некоторыми значениями c, A, $f_i^{j,m}$, $1\le i\le n$, $1\le j\le k$.

2. Построить векторно-матрично-тензорные апостериорные оценки для c, A, $f_i^{j,m}$, $1\le i\le n$, $1\le j\le k$ из решения двукритериальной задачи параметрической оптимизации (параметрическая идентификация нелинейной регрессионной модели (1)):

$$\left.\begin{array}{l}\min\left(\displaystyle\sum_{l=1}^{q}\left(\left\|w_{(l)}-c-Av_{(l)}-\mathrm{col}\left(\sum_{j=2}^{k} f_1^{j,m}\left(v_{(l)},\ldots,v_{(l)}\right),\ldots,\sum_{j=2}^{k} f_n^{j,m}\left(v_{(l)},\ldots,v_{(l)}\right)\right)\right\|_{R^n}\right)^2\right)^{1/2}, \\ \min\left(\|c\|_{R^n}^2+\|A\|_F^2+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{k}\left\|f_i^{j,m}\right\|_T^2\right)^{1/2}.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Здесь $w_{(l)}\in R^n$, $v_{(l)}\in R^m$, $1\le l\le q$ — векторы экспериментальных данных ($w_{(l)}$ — „реакция“ на „вариацию“ $v_{(l)}$ относительно координат вектора $\omega\in R^m$), q — число экспериментов (ограничений на величину q не накладываем; см. примечание 1);

3. Для заданного вектора $\omega\in R^m$ определить линейно-угловые координаты ЭИИ $v^*\in R^m$, обеспечивающие из решения задачи нелинейной „v-оптимизации“ минимальную взвешенно-осредненную интенсивность сигнала ЭИИ в точках b_i, $1\le i\le n$:

$$\min\{F(v)\colon v\in R^m\}, \quad (3)$$

$$F(v):=\sum_{i=1}^{n} r_i w_i\left(\omega+v\right),$$

где координаты вектора $\mathrm{col}(w_1(\omega+v),\ldots,w_n(\omega+v))=w(\omega+v)\in R^n$ имеют аналитическое представление согласно идентифицированной в силу п. 2 задачи, r_i — весовые коэффициенты, отражающие „приоритет“ точек зондирования b_i, $1\le i\le n$.

Векторная регрессия с переменными в тензорных классах $T_m^{\ j}$, $j\le k$. Кратко исследуем некоторые аналитические свойства нелинейных векторных регрессий многих переменных, которые „внешне“ похожи на поведение голоморфных функций (см. задачу). В связи с этим изложение будет основываться на понятии сильной производной (производной Фреше) [5, с. 481], что ставит задачу определения остальных аналитических понятий, и в частности дифференциалов высших порядков, через конструкции сильных производных. Известно [5, с. 491], что данные производные по существу можно (и удобно) трактовать как некоторые математические конструкции со специальной геометрической полилинейной структурой.

[1] Случай $v\in V\subset R^m$, где V — ограниченная невыпуклая область, может составить предмет отдельной задачи.

Определение 1 [5, с. 480]. *Пусть* Ω — *открытая область в* R^m, w — *отображение множества* Ω *в* R^n *и* ω — *некоторая точка из* Ω. *Если существует такая матрица* $A\in M_{n,m}(R)$, *что имеет место соотношение*

$$\lim_{v\to 0}\left\{\frac{\|w(\omega+v)-w(\omega)-Av\|_{R^n}}{\|v\|_{R^m}}\in R^m\right\}=0\,, \qquad (4)$$

то данная матрица A *называется производной Фреше от функции* w *в точке* ω.

Замечание 1. Нетрудно установить, что производная Фреше определяется матрицей частных производных $\partial w_i/\partial v_j$ ($1\le i\le n$, $1\le j\le m$) в точке ω (матрица Якоби); отметим, однако, что факт существования в точке ω частных производных функций w_1, w_2, …, w_n (здесь $w=\mathrm{col}(w_1,\dots,w_n)$) не обеспечивает еще наличия производной Фреше, как показывает следующий достаточно простой пример:

Пример 1. Пусть $n=1$, $m=2$, $w(v_1,v_2)=v_1v_2/(v_1^2+v_2^2)^2$ и $w(0,0)=0$, $\omega=(0,0)$. Ясно, что $\partial w(0,0)/\partial v_1=\partial w(0,0)/\partial v_2=0$. Поэтому, если бы соответствующая производная Фреше существовала, то, очевидно, это дало бы ее нулевой оператор и, следовательно, из соотношения (4) вытекает следующее положение:

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\left|w\left(tv_1,tv_2\right)\right|}{t}\in R,\ \left(v_1^2+v_2^2\right)^{1/2}=1\right\}=0\,,$$

между тем в действительности этот предел равен бесконечности, если только $v_1\ne 0$ и $v_2\ne 0$.

Производную Фреше от w в точке ω будем обозначать через $w(\omega)^{(1)}$. При этом если производная $w(\omega)^{(1)}$ существует для каждой точки $\omega\in\Omega$ и если кроме того

$$\omega\mapsto w(\omega)^{(1)}$$

есть непрерывное отображение из области Ω в $M_{n,m}(R)$, то отображение w называется *непрерывно дифференцируемым* в Ω. В силу отмеченного имеет смысл говорить о производной для отображения $w^{(1)}$: $\Omega\to M_{n,m}(R)$ в точке $\omega\in\Omega$, которую, если она существует (при очевидном изоморфизме пространств $M_{n,m}(R)$ и $R^{n\times m}$), называют *второй производной* отображения w и обозначают $w(\omega)^{(2)}$.

Если вторая производная существует в каждой точке множества Ω, то тем самым математически корректно определен оператор $w^{(2)}$, производная которого называется *третьей производной* отображения w. *Производная* $w(\omega)^{(k)}$ *порядка* k в точке ω есть, по определению, производная оператора $w^{(k-1)}$: $\Omega\to R^{n\times(k-1)m}$, при этом можно каждой производной $w(\omega)^{(k)}$ естественным образом поставить в соответствие элемент пространства k-линейных (при $k=2$ *билинейных*) отображений из $R^m\times\ldots\times R^m$ в R^n [5, с. 488]. В такой постановке дифференциал k-го порядка допускает более удобную (и наглядную) интерпретацию в конструкциях ковариантных тензоров из $T_m{}^k$.

Утверждение 1. *Пусть* Ω — *открытая область в* R^m, w — *отображение множества* Ω *в* R^n *и* ω — *некоторая точка из* Ω. *Если существует производная* $w(\omega)^{(k)}$ *порядка* k, *то дифференциал* k*-го прядка в точке* $\omega\in R^m$ *имеет аналитическое представление (при* $v\in R^m$*) вида*

$$w(\omega)^{(k)}(v,\dots,v)=\mathrm{col}(f_1^{k,m}(v,\dots,v),\dots,f_n^{k,m}(v,\dots,v)),$$

где $f_i^{k,m}\in T_m{}^k$, $i=1,\dots,n$.

Установим важное аналитическое свойство, которым должна обладать вектор-функция w, с целью прояснения: когда отображение w удовлетворяет (при некоторых разумных дополнительных предположениях о нем) понятию нелинейной тензорной регрессии класса (1).

У т в е р ж д е н и е 2. *Пусть* Ω *— открытая область в* R^m, w *— отображение множества* Ω *в* R^n *и* ω *— некоторая точка из* Ω. *Если существует производная* $w(\omega)^{(k)}$, *которая суть равномерно непрерывная функция от* ω *в* Ω, *то векторное отображение* w: $\Omega \to R^n$ *удовлетворяет системе* (1) *с некоторыми тензорами* $f_i^{j,m}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$, *вектором* $c = w(\omega)$ *и* $(n \times m)$*-матрицей* $A = w(\omega)^{(1)}$.

Утверждение 2 формулирует некоторый качественный факт для существования нелинейной регрессии класса (1), если не накладывать чрезмерно *слабых* требований (по образцу приведенных в примере 1) на конструкцию вектора-функции w.

Параметрическая идентификация билинейно-тензорной структуры нелинейной векторной регрессии. Начнем с уточнения конструкции уравнения (1); это уточнение имеет довольно специальный (частный) характер, но его использование позволяет не привлекать сложных вычислительных алгоритмов в оценке оптимального вектора координат установки ЭИИ.

Рассмотрим случай $k=2$. В такой постановке уравнение (1) примет вид

$$w(\omega+v) = c + Av + \mathrm{col}(v^T B_1 v, \ldots, v^T B_n v) + \varepsilon(\omega, v), \tag{5}$$

где $B_i \in M_{m,m}(R)$, $i=1,\ldots,n$, T — операция транспонирования, при этом считаем, что каждая B_i — суть верхняя треугольная матрица [7, с. 38]; в силу утверждения 2 полагаем, что $c=w(\omega)$, $A=w(\omega)^{(1)}$.

Параметрическую идентификацию в многокритериальной векторно-матрично-тензорной постановке (2) для многосвязной стационарной статической нелинейной модели типа „черный ящик“ [6] в классе регрессий (5) свяжем с понятием *нормального псевдорешения* (канонического решения по методу наименьших квадратов) для конечномерной системы линейных алгебраических уравнений.

О п р е д е л е н и е 2 [7, с. 501]. *Нормальным псевдорешением системы линейных алгебраических уравнений вида*

$$Dx = d,\ D \in M_{q,p}(R),\ d \in R^q$$

называется вектор $x \in R^p$, *имеющий наименьшую евклидову норму* $\|x\|_{R^p}$ *среди всех векторов, приносящих минимум величине нормы* $\|Dx-d\|_{R^q}$.

Далее, обозначим через E_q единичную $(q \times q)$-матрицу и пусть $D \in M_{q,p}(R)$. Через D^+ обозначим обобщенную обратную (псевдообратную) матрицу Мура—Пенроуза [7, с. 500] для матрицы D. Известно, что асимптотическая конструкция псевдообратной матрицы имеет следующий аналитический вид:

$$D^+ = \lim\{D^T(DD^T + \tau E_q)^{-1} : \tau \to 0\}.$$

Условимся, что везде далее знак „$^+$“ означает операцию псевдообращения соответствующей матрицы.

Л е м м а [7, с. 501]. *Вектор* $x=D^+d$ *— суть нормальное псевдорешение линейной системы:* $Dx=d$, $D \in M_{q,p}(R)$, $d \in R^q$.

Для взаимоувязывания параметров системы (5) и данных генеральной выборки обозначим через $\hat{u}_{(l)} \in R^{1+m(m+3)/2}$ вектор, имеющий (с учетом верхней треугольной структуры матриц B_i, $i=1,\ldots,n$) следующее координатное представление:

$$\hat{u}_{(l)} = \mathrm{col}(1, v_{1(l)}, \ldots, v_{m(l)}, v_{1(l)}v_{1(l)}, \ldots, v_{r(l)}v_{s(l)}, \ldots, v_{m(l)}v_{m(l)}) \in R^{1+m(m+3)/2}, \tag{6}$$

$$1 \le r \le s \le m,$$

$$\mathrm{col}(v_{1(l)}, \ldots, v_{m(l)}) = v_{(l)} \in R^m,$$

$$1 \le l \le q.$$

Назовем $U=[\hat{u}_{(1)}, \ldots, \hat{u}_{(q)}]^T \in M_{q,1+m(m+3)/2}(R)$ *полной матрицей* экспериментальных данных входных воздействий[2], β_i:=col$(w_{i(1)}, \ldots, w_{i(q)}) \in R^q$ — *полным вектором* экспериментальных данных для выходного сигнала w_i (i=1,…,n). Далее, стремясь к линейно-параметрическому описанию коэффициентов нелинейной модели „вход—выход“ для выходного ЭИИ-сигнала w_i выпишем (согласно системе (5)) линейно-квадратичную форму правой части уравнения его регрессии

$$c_i + \sum_{1 \le j \le m} a_{ij} v_j + \sum_{1 \le g \le p \le m} b_{igp} v_g v_p,\ i=1,\ldots,n. \qquad (7)$$

Теперь введем в рассмотрение $(1+m(m+3)/2)$-вектор z_i параметров модели ЭИИ

$$c_i, a_{i1}, \ldots, a_{im}, b_{i11}, \ldots, b_{igp}, \ldots, b_{imm}$$

для модели регрессии (7). Ясно, что в силу уравнений (7) любой фиксированный набор из n таких векторов полностью определяет (задает) аналитическое представление модели относительно некоторой системы „вход—выход“ типа (5):

$$z_i = \mathrm{col}(c_i, a_{i1}, \ldots, a_{im}, b_{i11}, \ldots, b_{igp}, \ldots, b_{imm}) \in R^{1+m(m+3)/2},$$
$$1 \le g \le p \le m.$$

У т в е р ж д е н и е 3. *Параметрическая идентификация* (2) *в терминах регрессионной модели* (5) *имеет алгебраическое решение*

$$z_i^* = U^+ \beta_i,\ i=1,\ldots,n. \qquad (8)$$

Здесь U — полная матрица экспериментальных данных входных воздействий (6), β_i — *полный вектор экспериментальных данных выходного сигнала w_i* (i=1,…,n), *индуцированного воздействиями* (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система (5) для каждого l-го эксперимента, согласно (6), (7), приобретает компактный вид

$$w_{i(l)} = \hat{u}^T_{(l)} z_i + \varepsilon_{i(l)},\ i=1,\ldots,n.$$

Таким образом, если переформулировать оптимизационную задачу вида (2) в векторно-матричных терминах z_i, β_i, U, то приходим к следующей многокритериальной постановке относительно векторов z_i, i=1,…,n:

$$\left.\begin{array}{l} \min \|\beta_1 - Uz_1\|_{R^q}, \\ \min \|z_1\|_{R^{1+m(m+3)/2}}, \end{array}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left.\begin{array}{l} \min \|\beta_i - Uz_i\|_{R^q}, \\ \min \|z_i\|_{R^{1+m(m+3)/2}}, \end{array}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left.\begin{array}{l} \min \|\beta_n - Uz_n\|_{R^q}, \\ \min \|z_n\|_{R^{1+m(m+3)/2}}. \end{array}\right\}$$

Очевидно, что в силу леммы данная многокритериальная система имеет единственное нормальное псевдорешение (8) относительно переменных z_i, i=1,…,n.

С л е д с т в и е 1 [8, с. 263]. *Пусть* $z_i^* = U^+\beta_i$ (i=1,…,n). *Тогда каждый вектор z параметров регрессионной модели* (5) *(характеризующей интенсивность ЭИИ), такой, что имеет место $z \ne z_i^*$, удовлетворяет одному из следующих двух условий:*

а) $\|\beta_i - Uz\|_{R^q} > \|\beta_i - Uz_i^*\|_{R^q}$

[2] Здесь „модель входных воздействий“ — некоторый набор тестовых координат ЭИИ при его „эталонном“ излучении. Точная зависимость модели (1) от координатной ориентации ЭИИ, как правило, неизвестна, и ее желательно представить приближенно в линейной или квадратичной аппроксимации, что выражено моделью (5), при этом аппроксимация (5) более обоснована для небольших отклонений аргумента v относительно координат ω.

или, в противном случае,

б) $\|\beta_i - Uz\|_R{}^q = \|\beta_i - Uz_i^*\|_R{}^q$ *и* $\|z\|_R{}^{1+m(m+3)/2} > \|z_i^*\|_R{}^{1+m(m+3)/2}$.

З а м е ч а н и е 2. Качественные оценки следствия 1 в основном зависят от „объема“ апостериорной информации (количества экспериментов q), а именно: если $q>1+m(m+3)/2$, то, как правило, реализуется пункт *а*, если $q\le 1+m(m+3)/2$ — весьма вероятно, что имеет место методологическая позиция *б*.

Далее приступим к многомерному геометрическому исследованию „минимаксных“ свойств решений нелинейной векторной регрессии (5); важной чертой полученных ниже аналитических результатов в решении оптимизационной задачи (3) является их явная алгебраическая зависимость от идентифицированных параметров билинейно-тензорной структуры системы (5).

Ориентация ЭИИ на базе билинейно-тензорной интерполяции его функциональной модели. Параметрическая идентификация функциональной модели ЭИИ класса (5), исследовавшаяся выше, является необходимым требованием при выборе вектора ориентации v. Однако вариантов подобной ориентации, очевидно, много, и необходимо выбрать среди них оптимальный с точки зрения некоторого формального критерия, характеризующего определенное „физико-техническое“ качество данной геометрической установки ЭИИ. Рассмотрим критерий оптимальности (3) (с приоритетным выбором коэффициентов r_i, $1\le i\le n$, согласно, например, [9]) и обсудим для него алгоритмическую технику получения *оптимальных* координат v*.

У т в е р ж д е н и е 4. *Пусть* $D_i = (B_i + B_i^T)$, *где матрица* B_i *идентифицирована согласно билинейно-тензорной регрессионной модели* (5). *Тогда при варьировании координат вектора* $v\in R^m$ *показатель интенсивности ЭИИ (в точке* b_i*) вида*

$$J_i(v) = w_i(\omega + v),\ i=1,\dots,n$$

может в силу идентифицированных уравнений (5) *иметь внутренний экстремум только в точке* $v_i^*\in R^m$:

$$v_i^* = -D_i^{-1}A^T e_i, \tag{9}$$

где $\{e_1,\dots,e_n\}$ *— стандартный базис в* R^n.

Если $v^T D_i v$ *— суть отрицательно определенная квадратичная форма, то функционал качества* $J_i(v)$ *имеет в точке* v_i^* *максимум, если* $v^T D_i v$ *— положительно определенная квадратичная форма, то* $J_i(v)$ *претерпевает в* v_i^* *минимум; в обоих случаях* v_i^* *— стационарная точка эллиптического типа.*

Наконец, если $v^T D_i v$ *может принимать как положительные, так и отрицательные значения (с* $v^T D_i v\ne 0$ *при* $v\ne 0$*), то экстремум отсутствует, а* v_i^* *— точка гиперболического типа (седловая).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для показателя качества $J_i(v)$ на множестве значений линейно-квадратичной модели (5) необходимое условие локального экстремума определяет следующее условие:

$$\mathrm{col}\left(\frac{\partial\left(e_i^T Av + 2^{-1}v^T D_i v\right)}{\partial v_1},\dots,\frac{\partial\left(e_i^T Av + 2^{-1}v^T D_i v\right)}{\partial v_n}\right) = 0\in R^n$$

в пространстве R^m [5, с. 500] геометрические координаты (9) для стационарной точки v_i^* относительно функционала $J_i(v)$, в то время как знак второго дифференциала

$$d^2 J_i(v^*) = \sum_{1\le g\le m}\sum_{1\le p\le m} \partial^2 J_i(v)/\partial v_g \partial v_p \big|_{v^*} v_g v_p$$

в точке размещения ЭИИ с координатами (9) определяет достаточные условия [5, с. 504] экстремума для стационарной точки v_i^*.

З а м е ч а н и е 3. Координаты стационарной точки (9) позволяют ответить на вопрос о значении функционала $J_i(v)$, когда данная точка является точкой относительно минимума или максимума.

С л е д с т в и е 2. *Если матрица D_i является положительно (отрицательно) определенной, то минимальное (максимальное) значение $J_i(v^*)$ равно*

$$c_i - e_i^T A D_i^{-1} A^T e_i/2,$$

где c_i — i-я координата вектора $c \in R^n$ системы (5).

Каждый функционал $J_i(v)$, $i=1,\ldots,n$, при соответствующем истолковании может быть обобщен на случай комплексного целевого функционала (3), который рассмотрим ниже. Таким образом, утверждение 4 и формула (9) позволяют за конечную последовательность простых действий вычислять геометрические координаты стационарной точки задачи оптимизации (3); данные координаты v определяют в терминах идентифицированных стационарных коэффициентов системы (5) геометрические параметры режима защиты функционирования ЭИИ.

У т в е р ж д е н и е 5. *Пусть $D_i = (B_i + B_i^T)$, $i=1,\ldots,n$. Тогда стационарная точка $v^* \in R^m$ задачи* (3) *(задача минимизации „взвешенно-осредненной“ интенсивности сигнала ЭИИ в комплексе точек зондирования $\{b_i\}_{1\le i\le n}$) имеет вид*

$$v^* = -(r_1 D_1 + \ldots + r_n D_n)^{-1} A^T (r_1 e_1 + \ldots + r_n e_n), \tag{10}$$

при этом достаточным условием, что решение v^* обеспечивает качество

$$\min\{F(v)\colon v \in R^m\},$$

является следующее: стационарная точка v^* имеет эллиптический тип, т.е.

$$\det\,[d_{ij}]_p > 0,\ p=1,\ldots,m, \tag{11}$$

где $[d_{ij}]_p \in M_{p,p}(R)$ — главные подматрицы [7, с. 30] *матрицы*

$$D = (r_1 D_1 + \ldots + r_n D_n),$$

собственные числа λ_i матрицы D отвечают неравенствам

$$\lambda_i > 0,\ i=1,\ldots,m. \tag{12}$$

З а м е ч а н и е 4. Если алгебраические условия (11), (12) не выполняются, то критическая точка (10) является либо гиперболической (т.е. седловой), либо параболической, и следовательно, требуется дополнительный геометрический анализ „параметров-координат“ ЭИИ (10). Говоря более формально, наличие седловой точки гарантирует замена хотя бы в одном (но не во всех) отношении неравенства „>“ из (11), (12) на „<“, при этом аналогичная замена „>“ на „≥“, возможно, вызывает структуру параболической точки.

Изложенный подход методологически расширяет [10] стандартную процедуру планирования эксперимента [2]. При этом если расчетные (прогнозируемые) координаты стационарной точки (10) по каким-либо физико-техническим параметрам выходят за область адекватности идентифицированной модели (5), то необходимо провести дополнительный натурный эксперимент, т.е. осуществить замер (с вектором v, максимально близким к точке (10)) координат ЭИИ с внесением полученного результата в расширенную матрицу экспериментальных данных U. После этого необходимо сделать пересчет [3] всех вышеизложенных этапов процесса оптимизации координат ЭИИ. При необходимости подобный эксперимент, параметрическую идентификацию (5) и оптимизацию (3) необходимо повторить.

Заключение. В работе дано точное и удобное определение нелинейной векторной регрессии на языке тензорной алгебры, чтобы нелинейные регрессионные модели были компактны и удобны в обращении. При этом определена процедура построения нелинейной модели, описывающей взвешенно-осредненную интенсивность электромагнитного поля ПЭВМ в точках возможного несанкционированного приема его сигнала; получен алгоритм расчета оптимальных координат установки ПЭВМ.

Изложенные в статье идеи можно развить в нескольких направлениях теоретико-прикладных изысканий по совершенствованию предложенных выше алгоритмов оптимальной пространственно-угловой ориентации ЭИИ, а также расширению рамок адекватности регрессионных уравнений дистанционной интенсивности ЭИИ за счет дополнительного исследования факторов ее нелинейности:

— на разработку процедуры выбора весовых коэффициентов r_i, $1 \le i \le n$, критерия (3), обеспечивающих эллиптический характер стационарной точки (10) целевого функционала $F(v)$ исходя из алгебраических условий (11), (12);

— на расширение, согласно утверждению 2, билинейно-тензорной формы уравнений регрессии (5) „тейлоровским разложением“ вектора-функции $v \to w(\omega+v)$ ковариантными тензорами ранга $k>2$;

— на задачу оптимизации (3) в постановке невыпуклого нелинейного программирования, когда $k>2$ и $v \in V \subset R^m$, где V — ограниченная, несвязная, невыпуклая область (возможно, с квазифрактальной границей [11]).

Работа поддержана программой фундаментальных исследований № 15 Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (№ НШ-1676.2008.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жигунова Я. А., Носков С. И.* Определение гармоник информативного сигнала монитора на основе методов регрессионного анализа // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2008. № 4. С. 89—90.
2. *Бернштейн А. В., Кулешов А. П., Бурнаев Е. В.* Об одной методологии построения аппроксимаций многомерных зависимостей // Докл. IV Междунар. конф. „Параллельные вычисления и задачи управления“ РАСО’2008. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2008. С. 56—62.
3. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB и SCILAB. СПб: Наука, 2001. 288 с.
4. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979. 624 с.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
6. *Месарович М., Такахара Я.* Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978. 312 с.
7. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 656 с.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 268 с.
9. *Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. А., Соколов В. Б.* Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982. 328 с.
10. Патент РФ № 2009612490. Регрессионно-тензорный анализ „РЕТАН“ / *С. Н. Думнов, Д. Б. Лабаров, В. А. Козырев, А. Е. Куменко, А. Г. Рудых.* 19.05.2009 г.
11. *Потапов А. А.* Фракталы и хаос как основа прорывных технологий в современных радиосистемах // Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006. С. 374—457.

Сведения об авторах

Владимир Александрович Козырев — аспирант; Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Антон Евгеньевич Куменко — канд. техн. наук, старший научный сотрудник НПО „ОРИОН“, Краснознаменск

Алексей Геннадьевич Рудых — аспирант; Иркутское высшее военное авиационное инженерное училище

Вячеслав Анатольевич Русанов — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск; E-mail: V.Rusanov@mail.ru

Рекомендована институтом

Поступила в редакцию 29.10.09 г.