

Б. В. Видин, И. О. Жаринов, О. О. Жаринов, О. В. Ульянова

**ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА
В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ В НЕРАВНОВЕСНОМ РЕЖИМЕ
С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕННОГО РЕСУРСА УПРАВЛЕНИЯ**

Исследуется нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая движение центра масс летательного аппарата в вертикальной плоскости при прямолинейной траектории. Получены оценки скорости и дальности в зависимости от ограничений на управление.

Ключевые слова: динамика летательного аппарата, ресурс управления, ограничения.

Введение. Движение центра масс летательного аппарата в скоростной системе координат в вертикальной плоскости, на прямолинейном участке траектории после выбора направления, описывается следующей системой соотношений [1]:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha - C_x \frac{\rho V^2}{2} S - mg \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 0, \\ \frac{dh}{dt} &= V \sin \theta, \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta, \\ \frac{dm}{dt} &= -q, \quad q > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь m — масса летательного аппарата; \mathbf{V} — вектор скорости; θ — угол наклона траектории, $\theta = \text{const}$; α — угол атаки, $\alpha = \text{const}$; h — высота полета; x — дальность полета; q — мгновенный расход массы топлива (в секунду); P — тяга двигателя, $P \leq K$, K — ресурс управления (величина, ограничивающая тягу двигателя), S — площадь крыльев, $\rho(h)$ — плотность атмосферы, зависящая от высоты полета, $\rho(h) = C \exp(-h/R)$, R — радиус Земли, C_x — коэффициент лобового сопротивления, при этом

$$\frac{dC_x}{d\alpha} > 0.$$

В качестве управляющей функции выбирается тяга двигателя: необходимо найти значение $P(t)$ такое, чтобы решение системы (1) удовлетворяло

— начальным условиям, $t = t_0$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0, \quad h = h_0, \quad x = x_0, \quad m = m_0, \quad P = P_0; \quad (2)$$

— конечным $t = t'$:

$$h = h_k, \quad x = x_k, \quad m = m_k.$$

Предлагаемый подход к решению. Совокупность функций $\mathbf{V}(t)$, $h(t)$, $x(t)$, $m(t)$, $P(t)$ будем называть решением задачи (1)—(2).

Разделив все уравнения системы (1) на $\frac{dx}{dt} = V \cos \theta$, приходим к системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= \frac{1}{mV \cos \theta} \left(P \cos \alpha - C_x \frac{\rho V^2}{2} S - mg \sin \theta \right), \\ \frac{dh}{dx} &= \text{tg} \theta, \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{V \cos \theta}, \\ \frac{dm}{dx} &= \frac{-q}{V \cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Требуется найти значение $P(t)$ такое, чтобы решение системы (3) удовлетворяло

— начальным условиям, $x = x_0$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0, \quad h = h_0, \quad m = m_0, \quad P = P_0; \quad (4)$$

— конечным $x = x_k$: $h = h_k$, $m = m_k$.

Совокупность функций $V(x)$, $h(x)$, $m(x)$, $P(x)$ будем называть решением задачи (3)—(4).

Поскольку в соответствии с исходными данными $\theta = \text{const}$, необходимо найти функцию $h(x)$:

$$h(x) = \text{tg}\theta \int_{x_0}^{x_k} dx.$$

Продифференцируем обе части первого уравнения системы (3):

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{mV \cos\theta} \left(P \cos\alpha - C_x \frac{\rho V^2}{2} S - mg \sin\theta \right) = f(V, h, m, P),$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{df}{dV} \frac{dV}{dx} + \frac{df}{dh} \frac{dh}{dx} + \frac{df}{dm} \frac{dm}{dx} + \frac{df}{dP} \frac{dP}{dx},$$

откуда получим производную тяги по дальности

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{df}{dV} \frac{dV}{dx} - \frac{df}{dh} \frac{dh}{dx} - \frac{df}{dm} \frac{dm}{dx}}{\frac{df}{dP}},$$

где

$$\frac{df}{dV} = \frac{1}{\cos\theta} \left(-\frac{P \cos\alpha}{V^2 m} - \frac{C_x \rho S}{2m} + \frac{g \sin\theta}{V^2} \right),$$

$$\frac{df}{dh} = -\frac{C_x \rho V S}{2m \cos\theta} \frac{C}{R} \exp(-h/R),$$

$$\frac{df}{dm} = \frac{1}{m^2 \cos\theta} \left(-\frac{P \cos\alpha}{V} + \frac{C_x \rho V S}{2} \right),$$

$$\frac{df}{dP} = \frac{\cos\alpha}{mV \cos\theta}.$$

Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{df}{dV} \frac{dV}{dx} - \frac{df}{dh} \frac{dh}{dx} - \frac{df}{dm} \frac{dm}{dx}}{\frac{df}{dP}}, \\ \frac{dh}{dx} &= \text{tg}\theta, \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{V \cos\theta}, \\ \frac{dm}{dx} &= \frac{-q}{V \cos\theta} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

с учетом начальных условий $x = x_0$:

$$t = t_0, \quad h = h_0, \quad m = m_0, \quad P = P_0 \quad (6)$$

на траектории $[x_0, x_k]$.

Поскольку $\theta = \text{const}$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, отсюда

$$P \sin \alpha + C_y \frac{\rho V^2}{2} S - mg \cos \theta = 0, \quad \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} > 0,$$

C_y — коэффициент подъемной силы,

Задав интервал $m_1 \leq m \leq m_2$, получим ограничения на V :

$$C_y \frac{\rho V^2}{2} S = mg \cos \theta - P \sin \alpha,$$

$$V^2 = \frac{2}{C_y \rho S} (mg \cos \theta - P \sin \alpha).$$

Далее получим

$$V^2 \leq \frac{2}{C_{y \min} \rho S} (m_2 g \cos \theta - K \sin \alpha) = V_{\max}^2,$$

$$V^2 \geq \frac{2}{C_{y \max} \rho S} m_1 g \cos \theta = V_{\min}^2,$$

$$V_{\min}^2 \leq V^2 \leq V_{\max}^2; \quad V_{\min} = \sqrt{V_{\min}^2}, \quad V_{\max} = \sqrt{V_{\max}^2}; \quad V_{\min} \leq V \leq V_{\max}.$$

Получим оценку скорости при конечном значении дальности:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_0} + \int_{x_0}^{x_k} \frac{dV}{dx} dx,$$

$$\frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{m_0 V_0 \cos \theta} \left(P_0 \cos \alpha - C_{x_0} \frac{\rho_0 V_0^2}{2} S - m_0 g \sin \theta \right),$$

$$V_{\min} \leq V \leq V_{\max},$$

$$V = V_0 + \int_{x_0}^{x_k} \frac{dV}{dx} dx,$$

выберем $V_{\min} \leq V_0 \leq V_{\max}$

$$V_{\min} - V_0 < \int_{x_0}^{x_k} \frac{dV}{dx} dx < V_{\max} - V_0,$$

$$\int_{x_0}^{x_k} \frac{dV}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_k} \frac{dV}{dx} dx \Big|_{x=x_0} + \int_{x_0}^{x_k} \int_{x_0}^{x_k} \frac{d^2 V}{dx^2} dx^2,$$

$$V_{\min} - V_0 - \int_{x_0}^{x_k} \frac{dV}{dx} dx \leq \frac{d^2 V}{dx^2} (x_k - x_0)^2 \leq V_{\max} - V_0 - \int_{x_0}^{x_k} \frac{dV}{dx} dx.$$

Введем обозначения

$$V_{\min} - V_0 - \int_{x_0}^{x_k} \frac{dV}{dx} dx = \bar{\beta}_1, \quad V_{\max} - V_0 - \int_{x_0}^{x_k} \frac{dV}{dx} dx = \bar{\beta}_2,$$

где фазовые координаты удовлетворяют ограничениям

$$\beta_1 \leq \frac{d^2 V}{dx^2} \leq \beta_2, \quad \beta_1 = \frac{\bar{\beta}_1}{(x_k - x_0)^2}, \quad \beta_2 = \frac{\bar{\beta}_2}{(x_k - x_0)^2}, \quad \left| \frac{dP}{dx} \right| \leq K(x_k - x_0), \quad \bar{K} = \max \left| \frac{dP}{dx} \right|.$$

С учетом дополнительных соотношений

$$\rho(h) = C \exp(-h/R),$$

$$\rho_1 \leq \rho(h) \leq \rho_2,$$

$$\rho_1 = C(-h_2/R), \quad \rho_2 = C \exp(-h_1/R),$$

аналогичным образом могут быть получены оценки угла крена

$$\gamma_1 \leq \frac{dV}{dx} \leq \gamma_2, \quad \gamma_3 \leq \frac{dh}{dx} \leq \gamma_4, \quad \gamma_5 \leq \frac{dm}{dx} \leq \gamma_6,$$

$$\delta_1 \leq \frac{df}{dV} \leq \delta_2, \quad \delta_3 \leq \frac{df}{dh} \leq \delta_4, \quad \delta_5 \leq \frac{df}{dm} \leq \delta_6, \quad \delta_7 \leq \frac{df}{dP} \leq \delta_8,$$

тогда ограничение на ресурс управления составит

$$\bar{K} = \frac{\beta_2 + \gamma_2 \delta_2 + \gamma_4 \delta_4 + \gamma_6 \delta_6}{\delta_7}, \quad \bar{K} (x_k - x_0) \leq K, \quad x_k - x_0 \leq \frac{K}{\bar{K}}.$$

Заключение. Таким образом, для описания движения летательного аппарата в вертикальной плоскости в неравновесном режиме с учетом ограниченного ресурса управления получены оценки скорости и дальности, при которых управляющая функция удовлетворяет заданным ограничениям $P \leq K$.

Предлагаемая модель движения летательного аппарата может быть использована при разработке программного обеспечения пилотажно-навигационных комплексов, на которые возложены задачи управления полетом в условиях ограниченного ресурса управления, с отработкой на этапе предварительных стендовых испытаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 523 с.
2. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полетов. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 354 с.

Сведения об авторах

- Борис Викторович Видин** — канд. техн. наук, профессор; ОКБ „Электроавтоматика“, Санкт-Петербург; зам. главного конструктора; E-mail: postmaster@elavt.spb.ru
- Игорь Олегович Жаринов** — канд. техн. наук, доцент; ОКБ „Электроавтоматика“, Санкт-Петербург; нач. отдела; E-mail: igor_rabota@pisem.net
- Олег Олегович Жаринов** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра вычислительных и электронных систем; E-mail: zharinov@hotmail.ru
- Ольга Владимировна Ульянова** — ОКБ „Электроавтоматика“, Санкт-Петербург; E-mail: postmaster@elavt.spb.ru

Рекомендована кафедрой
вычислительных и электронных систем

Поступила в редакцию
08.07.09 г.