

С. И. ЗИАТДИНОВ

## ДИСКРЕТНЫЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЙ ФИЛЬТР С ПРОМЕЖУТОЧНЫМ СГЛАЖИВАНИЕМ ОТСЧЕТОВ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Рассмотрен интегродифференцирующий фильтр со взвешенным суммированием промежуточных сумм отсчетов входного сигнала. Показано, что предложенный алгоритм фильтрации по статистическим характеристикам практически не уступает известным алгоритмам и обладает значительно большей вычислительной эффективностью.

*Ключевые слова:* дискретизация сигнала, промежуточное суммирование, дискретная фильтрация, отношение сигнал/шум.

При реализации цифровых фильтров необходимо выполнять значительное количество математических операций умножения и сложения (вычитания), что требует либо быстродействующих вычислителей, либо больших временных затрат на реализацию алгоритма фильтрации. В месте с тем в случае, когда постоянная времени фильтра значительно превышает период следования отсчетов входного сигнала, можно подвергать взвешенному суммированию не каждый отсчет входного сигнала, а их промежуточные суммы. Очевидно, что в этом случае возникают определенные информационные потери, связанные с отклонением амплитудно-частотной характеристики фильтра (АЧХ) от желаемой АЧХ [1].

Целью настоящей работы является создание дискретного интегродифференцирующего фильтра, обладающего высокой вычислительной эффективностью при сохранении качества фильтрации.

Суть предлагаемого метода фильтрации заключается в том, что из последовательности отсчетов входного сигнала  $x[i]$  формируются промежуточные суммы из  $m$  отсчетов

$$x_{\Sigma}[n] = \sum_{i=0}^{m-1} x[nL - i],$$

которые далее с периодом  $T_{\Sigma} = LT$  ( $L \geq m$ ) поступают в дискретный интегродифференцирующий фильтр.

В качестве непрерывного аналога рассматриваемому фильтру рассмотрим фильтр верхних частот с АЧХ вида

$$W(p) = \frac{pT_{\Phi}}{1 + pT_{\Phi}}, \quad (1)$$

где  $T_{\Phi}$  — постоянная времени фильтра,  $p = j\omega$ .

Путем подстановки в (1)  $p = 2(z-1)/T_{\Sigma}(z+1)$  получим следующее выражение для частотной передаточной функции интегродифференцирующего фильтра в плоскости  $z$  [2]:

$$W(z) = \frac{a(1-z^{-1})}{1+bz^{-1}}, \quad (2)$$

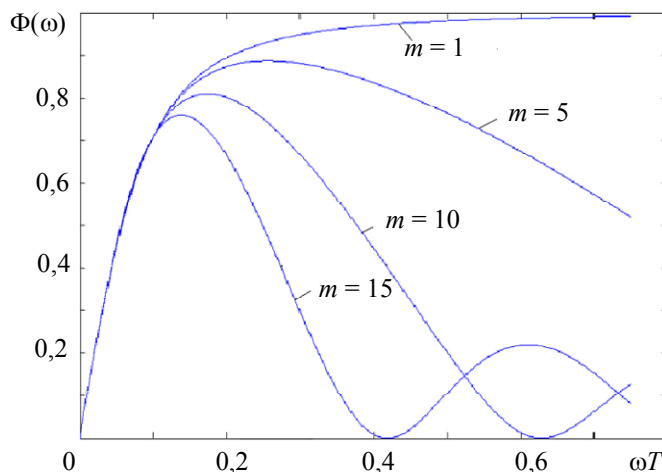
где  $z = e^{pT_{\Sigma}}$ ;  $a = 2T_{\Phi}/(T_{\Sigma} + 2T_{\Phi})$ ;  $b = (T_{\Sigma} - 2T_{\Phi})/(T_{\Sigma} + 2T_{\Phi})$ . Передаточной функции (2) будет соответствовать следующее разностное уравнение, определяющее выходной сигнал фильтра:

$$y[n] = a \sum_{i=0}^{m-1} x[nL-i] + a \sum_{i=0}^{m-1} x[nL-i-1] - by[n-1]. \quad (3)$$

Соотношение (2) после несложных преобразований позволяет получить следующее выражение для АЧХ рассматриваемого фильтра:

$$\Phi(\omega) = K \sqrt{\frac{2a^2 \left[ \left( \sum_{i=0}^{m-1} \cos i\omega T \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^{m-1} \sin i\omega T \right)^2 \right] (1 - \cos \omega LT)}{1 + 2b \cos \omega LT + b^2}}.$$

На рисунке показаны нормированные АЧХ интегродифференцирующего фильтра при  $T_{\Phi}/T = 10$ ,  $T_{\Phi} = 0,001$  с,  $L=m$  для различных значений суммируемых отсчетов входного сигнала  $m$ . Из представленных графиков видно, что промежуточное сглаживание отсчетов входного сигнала приводит к заметному сужению полосы пропускания фильтра. Вместе с тем в диапазоне  $\omega T = 0-0,15$  АЧХ фильтра практически не зависит от числа суммируемых отсчетов входного сигнала.



Для определения статистических характеристик выходного сигнала рассматриваемого фильтра необходимо знать его импульсную характеристику, значения которой в моменты времени  $t_n = nT_{\Sigma}$  можно представить следующим образом [3]:

$$G[n] = c_n,$$

где  $c_0 = a$ ;  $c_1 = -a - b$ ;  $c_2 = -c_1 b$ ;  $c_3 = -c_2 b$ ; ...;  $c_k = -c_k b$  и т.д.

Пусть на входе рассматриваемого интегродифференцирующего фильтра действует аддитивная смесь отсчетов полезного сигнала и помехи, причем полезный сигнал примем в виде последовательности отсчетов гармонического колебания

$$u_c(iT) = U_c \sin(\omega iT)$$

с амплитудой  $U_c$  и частотой  $\omega$ . Отсчеты помехи будем считать некоррелированными с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma_x^2$ . Тогда дисперсию помехи на выходе сумматора, формирующего промежуточные суммы отсчетов входного сигнала, можно найти из выражения

$$\sigma_\Sigma^2 = m\sigma_x^2.$$

При этом дисперсия помехи на выходе фильтра будет равна

$$\sigma_\Phi^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_\Sigma^2 G^2(iTL), \quad (4)$$

где  $G(t_i)$  — значения импульсной характеристики в моменты времени  $t_i = iTL$ .

Средняя мощность полезного сигнала на выходе фильтра будет определяться соотношением

$$P_c = \overline{\left[ \sum_{i=0}^{\infty} u_{c\Sigma}(t_i) G(iTL) \right]^2}, \quad (5)$$

где черта сверху означает усреднение по времени,

$$u_{c\Sigma}(t_i) = \sum_{k=0}^{m-1} U_c \sin \omega T(iL + k). \quad (6)$$

В результате отношение сигнал/шум на выходе фильтра принимает вид

$$q = \frac{P_c}{\sigma_\Phi^2} = \frac{\overline{\left[ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} U_c \sin \omega T(iL + k) G(iLT) \right]^2}}{\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_\Sigma^2 G^2(iLT)}. \quad (7)$$

Для интегродифференцирующего фильтра без промежуточного сглаживания отсчетов входного сигнала дисперсию помехи, среднюю мощность выходного сигнала и отношение сигнал/помеха можно записать в виде

$$(\sigma_\Phi^*)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_x^2 G^2(iT); \quad P_c^* = \overline{\left[ \sum_{i=0}^{\infty} u_c(iT) G(iT) \right]^2}; \quad (8)$$

$$q = \frac{P_c^*}{(\sigma_\Phi^*)^2} = \frac{\overline{\left[ \sum_{i=0}^{\infty} u_c(iT) G(iT) \right]^2}}{\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_x^2 G^2(iT)}. \quad (9)$$

Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай, когда постоянная времени фильтра  $T_\Phi$  значительно превышает период следования  $T_\Sigma = LT$  промежуточных сумм отсчетов входного сигнала. При этом в соотношениях (4)—(9) можно без заметных погрешностей перейти от сумм к интегралам

$$\sigma_\Phi^2 = \frac{m\sigma_x^2}{LT} \int_0^{\infty} G^2(t) dt; \quad P_c = \frac{U_c^2}{(LT)^2} \overline{\left[ \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sin \omega(t + kT) G(t) dt \right]^2};$$

$$(\sigma_{\phi}^*)^2 = \frac{\sigma_x^2}{T} \int_0^{\infty} G^2(t) dt; \quad P_c^* = \frac{U_c^2}{T^2} \left[ \int_0^{\infty} \sin \omega t G(t) \right]^2.$$

Из представленных на рисунке нормированных АЧХ фильтров следует, что в диапазоне  $\omega T = 0—0,15$  коэффициенты передачи фильтра практически совпадают. Поэтому для данного диапазона частот можно без существенной погрешности записать, что

$$P_c = m^2 P_c^* / L^2.$$

Тогда выигрыш в отношении сигнал/шум для фильтра без промежуточного сглаживания по сравнению с рассматриваемым интегрирующим фильтром составит

$$d = \frac{P_c^* / (\sigma_{\phi}^*)^2}{P_c / \sigma_{\phi}^2} = \frac{L}{m}. \quad (10)$$

Из соотношения (10) видно, что при количестве суммируемых отсчетов  $m=L$  предлагаемый дискретный интегрирующий фильтр по своим статистическим характеристикам практически не уступает интегрирующему фильтру без промежуточного сглаживания.

В качестве примера положим период поступления отсчетов входного сигнала  $T=100$  мкс, количество суммируемых импульсов  $m=10$  и  $L=m$ . В данном случае при реализации дискретного интегрирующего фильтра без промежуточного сглаживания за одну секунду необходимо выполнить 30 000 операций суммирования и 30 000 операций умножения. При реализации предлагаемого алгоритма дискретной фильтрации с промежуточным сглаживанием за одну секунду необходимо выполнить 30 000 операций суммирования и всего 3000 операций умножения без заметной потери качества фильтрации.

Полученные в работе математические соотношения носят общий характер и могут быть использованы для дискретных фильтров с практически любой импульсной характеристикой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
2. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976. 575 с.
3. Зиатдинов С. И., Осипов Л. А. Нерекурсивные алгоритмы оценки параметров сигналов // Изв. вузов. Приборостроение. 2002. Т. 45, № 3. С. 19—22.

#### Сведения об авторе

**Сергей Ильич Зиатдинов**

— д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: kaf53@guar.ru

Рекомендована кафедрой  
информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию  
08.07.09 г.