

С. А. КАБАНОВ, Е. Н. НИКУЛИН, Б. Э. ЯКУШЕВ, Д. Б. ЯКУШЕВА
**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ГРУЗА
МОСТОВЫМ КРАНОМ**

Рассматривается задача управления перемещением груза мостовым краном с использованием различных методов оптимизации. Исследуется сходимость итерационной процедуры при решении краевой задачи. Представлены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: мостовой кран, принцип максимума, прогнозирующая модель.

Мостовой кран является неотъемлемой частью оборудования любого предприятия в сфере обрабатывающей промышленности, зачастую единственным устройством, позволяющим перемещать тяжелые предметы в ограниченном пространстве промышленного цеха. Однако из конструктивных особенностей мостового крана (невозможности жесткой фиксации тяжелого груза в процессе перемещения) вытекает существенный недостаток — трудность точного позиционирования груза вручную. Гибкая подвеска обуславливает возможность раскачивания груза как в процессе перемещения, так и в момент остановки в месте назначения. В связи с этим возникает проблема автоматизации управления тележкой мостового крана с целью обеспечения перевода захвата с грузом в заданное положение и его позиционной стабилизации. Учитывая актуальность проблемы, целесообразно оценить возможность реализации оптимальной динамики перемещения груза [1—3].

Разработку алгоритмов оптимального управления осложняет необходимость обеспечения сходимости итерационных процедур решения соответствующих краевых задач. Ввиду того что вычислительные трудности быстро возрастают при усложнении математической модели динамики крана, в настоящей статье рассматривается система дифференциальных уравнений, полученная при упрощающих предположениях: длина троса подвески груза постоянна

во время движения (внутренняя связь системы стационарна), угловые отклонения подвеса от вертикали малы, масса груза не изменяется.

При этих допущениях уравнения Лагранжа 2-го рода для рассматриваемой системы приобретают вид [3]

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{s} - ml\ddot{\theta} &= F, \\ -\ddot{s} + l\ddot{\theta} &= -g\theta, \end{aligned}$$

где M, m — масса тележки и груза; s — горизонтальная координата крана; θ — угловое отклонение подвеса; $l = \text{const}$ — длина подвеса; F — сила, управляющая положением тележки крана.

Принимая в качестве переменных вектора состояния: x_1 (текущий угол отклонения подвеса груза от вертикали), $x_2 = dx_1/dt$, $x_3 = s/l$, $x_4 = dx_3/dt$ при горизонтальных координатах, определяющих текущее и конечное положение груза соответственно s и s_f , получаем систему уравнений модели объекта в виде [1—3]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ — (4×4)-матрица. Элементы матрицы \mathbf{A} , кроме $a_{12} = 1$, $a_{21} = -a$, $a_{34} = 1$, $a_{41} = -c$, равны нулю; $\mathbf{B}^T = [0 \ b/u_{\max} \ 0 \ b/u_{\max}]$, $a = bg/l$, $b = (m + M)/M$, $c = mg/(lM)$, g — ускорение свободного падения, $u = u_{\max}F/[l(m + M)]$ — безразмерное управление ($i = \overline{1, 4}; j = \overline{1, 4}$).

Требуется обеспечить перевод системы из начального состояния $\mathbf{x}^T(t_0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ в конечное $\mathbf{x}^T(t_f) = [0 \ 0 \ s_f \ 0]$ при ограничении на управление $|u_{\max}| \leq 0,75$.

Представляет интерес в рамках одного исследования сопоставить результаты численных экспериментов с данной моделью, выполненных на основе различных алгоритмов оптимизации.

В настоящей статье рассматриваются возможности определения оптимального воздействия на тележку мостового крана с использованием различных методов оптимизации:

— на основании решения краевой задачи, вытекающей из принципа максимума Л. С. Понтрягина;

— алгоритма управления с фиксированной программой прогноза движения;

— алгоритма последовательной оптимизации по иерархии критериев качества.

1. Будем решать задачу перевода системы (1) из начального положения в конечное при ограничениях на управление вида $|u| \leq u_{\max}$ и минимизации критерия $I = V_f(x, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} dt$

(задача максимального быстрогодействия). Здесь $V_f(\mathbf{x}, t_f) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \rho \Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_f$,

$\rho = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ — матрица весовых коэффициентов, \mathbf{x}_f — заданный вектор. Канонические уравнения имеют вид [1—3]

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = \overline{1, 4}). \tag{2}$$

Здесь $H = \mathbf{p}^T (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}) + 1$ — гамильтониан системы, \mathbf{p} — вектор сопряженных переменных.

На интервале $t \in [t_0, t_f]$ интегрированием системы (1) с начальными условиями $x_i(t_0) = x_{i0}$, $p_i(t_0) = p_{i0}$ определяются $x_i(t_f)$ при значении u , принятом, согласно принципу максимума ($i = \overline{2, 4}$)

$$u = \begin{cases} -u_{\max}, & p_2 + p_4 > 0, \\ u_{\max}, & p_2 + p_4 < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Оптимизация движения механической системы основана на решении краевой задачи (2), (3).

Здесь, согласно теореме А. А. Фельдбаума об n интервалах для устойчивой системы [3], в соответствии с порядком модели предусматривается четыре интервала постоянства управления. Таким образом, воспроизводится реальная процедура ручного управления, особенно наглядно представляемая набором кусочно-постоянных функций.

Как известно, для большинства задач управления, представляющих практический интерес, затруднительно получить аналитическое решение в замкнутой форме. Но и их численное решение также сопряжено со значительными трудностями. Существует несколько методов численного решения, но их объединяет одна проблема: сходимость к приемлемому в рамках поставленной задачи результату напрямую связана с удачным выбором начального приближения.

В данном случае краевая задача (2), (3) решается методом Ньютона [4—7]. На первом шаге итерационного алгоритма задается вектор начальных условий, включающий компоненты вектора $\mathbf{x}(t_0)$, а также вектора сопряженных переменных $\mathbf{p}(t_0)$.

В соответствии с условиями трансверсальности вводится функция невязок выполнения граничных условий

$$\varphi(p_0^{(0)}) = [(p(t_f) - \rho \Delta x)^T H(t_f)]^T.$$

В алгоритме при исходных значениях констант $p_i(t_0) = C_i$ ($i = \overline{1,4}$), $t_f = C_5$ интегрированием системы (2) вычисляются значения $x_i(t_f)$ на правом конце интервала и выполняются переключения управления в соответствии с условиями (3). Затем последовательно задаются приращения к каждой из взятых с 1-го приближения констант $C_i^{(1)} = C_i + \Delta_i$ ($i = \overline{1,4}$), а также приращение к начальному значению t_f .

Вычисляется функция невязки и численно определяется матрица частных производных Якоби ($p_{05} = t_f$):

$$\Phi_{p_0^{(0)}} = \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{0j}} \right\} \quad (i, j = \overline{1,5}).$$

Здесь элементы i -й ($i = \overline{1,4}$) строки матрицы $\Phi_{p_0^{(0)}}$ получаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{01}} &= \frac{\varphi_i[p_{01} + \Delta p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, t_f] - \varphi_i(p_0, t_f)}{\Delta p_{01}}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{02}} &= \frac{\varphi_i[p_{01}, p_{02} + \Delta p_{02}, p_{03}, p_{04}, t_f] - \varphi_i(p_0, t_f)}{\Delta p_{02}}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{03}} &= \frac{\varphi_i[p_{01}, p_{02}, p_{03} + \Delta p_{03}, p_{04}, t_f] - \varphi_i(p_0, t_f)}{\Delta p_{03}}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{04}} &= \frac{\varphi_i[p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04} + \Delta p_{04}, t_f] - \varphi_i(p_0, t_f)}{\Delta p_{04}}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{05}} &= \frac{\varphi_i[p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, t_f + \Delta t_f] - \varphi_i(p_0, t_f)}{\Delta t_f}. \end{aligned}$$

Пятая строка будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_5}{\partial p_{01}} &= \frac{H[p_{01} + \Delta p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, t_f] - H(p_0, t_f)}{\Delta p_{01}}, \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial p_{02}} &= \frac{H[p_{01}, p_{02} + \Delta p_{02}, p_{03}, p_{04}, t_f] - H(p_0, t_f)}{\Delta p_{02}}, \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial p_{03}} &= \frac{H[p_{01}, p_{02}, p_{03} + \Delta p_{03}, p_{04}, t_f] - H(p_0, t_f)}{\Delta p_{03}}, \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial p_{04}} &= \frac{H[p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04} + \Delta p_{04}, t_f] - H(p_0, t_f)}{\Delta p_{04}}, \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial t_f} &= \frac{H[p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, t_f + \Delta t_f] - H(p_0, t_f)}{\Delta t_f}. \end{aligned}$$

В соответствии с формулой Тейлора следующее приближение для вектора \mathbf{p}_0 определяется, согласно соотношению:

$$C_0^{(1)} = C_0^{(0)} - s \varphi_{C_0^{(0)}}^{-1} \varphi(C_0^{(0)}),$$

где $s \in (0, 1]$ — скалярный множитель, используемый для улучшения сходимости метода [4, 6, 7]. Таким образом, получается набор констант интегрирования на каждую следующую итерацию метода Ньютона:

$$\begin{pmatrix} C_1^{(n)} \\ C_2^{(n)} \\ C_3^{(n)} \\ C_4^{(n)} \\ C_5^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{(n-1)} \\ C_2^{(n-1)} \\ C_3^{(n-1)} \\ C_4^{(n-1)} \\ C_5^{(n-1)} \end{pmatrix} - s \varphi_{C_0^{(n-1)}}^{-1} \begin{pmatrix} p_1(t_f^{(n-1)}) - \rho_1[x_1(t_f^{(n-1)}) - x_{1f}] \\ p_2(t_f^{(n-1)}) - \rho_2[x_2(t_f^{(n-1)}) - x_{2f}] \\ p_3(t_f^{(n-1)}) - \rho_3[x_3(t_f^{(n-1)}) - x_{3f}] \\ p_4(t_f^{(n-1)}) - \rho_4[x_4(t_f^{(n-1)}) - x_{4f}] \\ H(t_f^{(n-1)}) - 0 \end{pmatrix}.$$

На каждом шаге проверяется условие $\|\varphi(\mathbf{p}_0^{(n)}, t_f^{(n)})\| < \varepsilon$, невыполнение которого возвращает к первому шагу алгоритма. Здесь $\varepsilon > 0$ — заранее выбираемая любая малая положительная величина. В качестве нормы φ можно принять, например

$$\sqrt{\sum_{i=1,5} \varphi_i^2(\mathbf{p}_0^{(n)})}.$$

Вычисления производились при следующих исходных данных: $M = 20$ т; $m = 10$ т; $l = 3$ м; $a = 4,9 \text{ с}^{-2}$; $c = 1,635 \text{ с}^{-2}$; $u_{\max} = 0,75 \text{ с}^2$; $s_f/l = 1,706$; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Численная реализация приведенного алгоритма показала, что, не имея приемлемых предварительных оценок компонента C_i ($i = \overline{1, 4}$), а также t_f , сложно рассчитывать на получение искомого результата.

Рассматривая численные результаты решения краевой задачи, вытекающей из принципа максимума, целесообразно оценить эффективность и чувствительность решения к точности задания начального приближения для искомых значений C_i . В работе [2] указывается, что в случае применения, например, метода стрельбы для получения решения требуется, чтобы начальное приближение отличалось от конечного результата на несколько процентов. Только в этом случае гарантируется сходимость итерационной процедуры решения краевой задачи. Полученные на основе использования описанного выше алгоритма результаты численных экспериментов подтверждают высокие требования к точности выбора начального приближения.

2. Эффективным инструментом выбора начальных приближений для постоянных интегрирования может служить какой-либо альтернативный метод оптимизации, также использующий фиксированную программу параметрического управления. В частности, при решении краевой задачи можно воспользоваться значениями сопряженных переменных $p_i(t_0)$, полученными при реализации алгоритма с прогнозирующей моделью, основанного на минимизации функционала А. А. Красовского [1, 8]. В результате применения этого алгоритма можно получить начальные условия для сопряженных переменных.

В рассматриваемом случае релейное управление с выбранным по теореме А. А. Фельдбаума фиксированным количеством интервалов постоянства предполагает возможность оптимизировать моменты переключения. Для этого в качестве управляющих параметров дополнительно вводятся производные $\dot{t}_k = w_k$ (здесь t_k — моменты переключения управления и завершения движения, $k = \overline{1,4}$; $t_4 = t_f$ [1, 3]).

Введение управлений моментами переключений добавляет к системе (1) уравнения

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{w}, \quad (4)$$

где $\dot{\mathbf{y}}^T = [\dot{t}_1 \ \dot{t}_2 \ \dot{t}_3 \ \dot{t}_4]$, $\mathbf{w}^T = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4]$. Таким образом, вводится расширенный вектор фазовых переменных $\mathbf{x}_p = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{y}^T]^T$.

Критерий качества целесообразно принять в виде функционала Красовского

$$I = V_f(\mathbf{x}, t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{w}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w} + \mathbf{w}_0^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w}_0) d\tau,$$

где $V_f(\mathbf{x}, t_f) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \boldsymbol{\rho} \Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_f$, $\boldsymbol{\rho} = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$, $\mathbf{k} = \text{diag}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ — матрицы весовых коэффициентов и коэффициентов усиления соответственно, которые первоначально определяются по принципу равных вкладов максимальных отклонений и уточняются в процессе моделирования.

Гамильтониан задачи имеет вид

$$H = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{x}}_p + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_0^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w}_0, \quad (5)$$

где $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_x^T \ \mathbf{p}_y^T]^T$ — вектор множителей Лагранжа; \mathbf{w} , \mathbf{w}_0 — векторы текущих и оптимальных управлений моментами переключения и завершения движения t_k ($k = \overline{1,4}$).

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид

$$\dot{\mathbf{p}}_x^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \dot{\mathbf{p}}_y^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}.$$

Применение критерия Красовского позволяет заменить решение двухточечной краевой задачи решением задачи Коши для прогнозирующей модели (система (2), (4) с нулевым управлением $\mathbf{w} = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_1 + x_5 [1 - 2\theta(t-t_1) + 2\theta(t-t_2) - 2\theta(t-t_3)], \\ \dot{x}_3 &= x_4, \quad \dot{x}_4 = -cx_1 + x_5 [1 - 2\theta(t-t_1) + 2\theta(t-t_2) - 2\theta(t-t_3)], \\ \dot{t}_1 &= 0, \quad \dot{t}_2 = 0, \quad \dot{t}_3 = 0, \quad \dot{t}_f = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $x_5 = u$, $\theta(t-t_i)$ — единичная функция ($i = \overline{1,3}$).

Сначала в прямом времени интегрируется система (6), а затем совместно с (6) в обратном времени на интервале оптимизации производится интегрирование системы уравнений для сопряженных переменных

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= ap_2 + cp_4, \dot{p}_2 = -p_1, \dot{p}_3 = 0, \dot{p}_4 = -p_3, \dot{p}_{t_1} = -2x_5\delta(t-t_1)(p_2 + p_4), \\ \dot{p}_{t_2} &= 2x_5\delta(t-t_2)(p_2 + p_4), \dot{p}_{t_3} = -2x_5\delta(t-t_3)(p_2 + p_4), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta(t-t_i)$ — дельта-функция.

Интегрирование системы (7) в обратном времени по траектории свободного движения выполняется при начальных условиях на правом конце $p_i(t_f)$, которые определяются из условий трансверсальности $p(t_f) = \left(\frac{\partial V_f}{\partial x}\right)^T$ по невязкам конечного вектора состояния, вычисленного посредством интегрирования прогнозирующей модели (6) на интервале оптимизации $[t, t_f]$. Здесь $p_i(t_f) = \rho_i(x_i(t_f) - x_{if})$ ($i = \overline{1,4}$). При этом $p_{t_i}(t) = 2(-1)^i u_{\max} [p_2(t_i) + p_4(t_i)]$ ($i = \overline{1,3}$), $p_{t_4}(t) = H(t_f)$ [3].

Управления определяются, согласно соотношениям

$$w_k = -k_k^2 p_{t_k} \quad (k = \overline{1,4}),$$

которые следуют из условия минимизации гамильтониана (5) по параметрам управления $\frac{\partial H}{\partial w_k} = 0$.

Длительность цикла ограничивается сверху величиной Δt_{\max} — допустимой дискретностью управления процессом, а снизу — Δt_{\min} — производительностью ЭВМ, осуществляющей вычисления в режиме реального времени.

Результаты расчетов по определению компонентов вектора состояния и управления при $\rho_1 = 0,1$; $\rho_2 = 0,7$; $\rho_3 = 0,4$; $\rho_4 = 0,4$; $\rho_5 = 0,1$; $\rho_6 = 0,001$; $k_1 = 0,1$; $k_2 = 0,1$; $k_3 = 0,1$; $k_{t_f} = 2,0$ приведены на рис. 1. Алгоритм позволяет эффективно удовлетворять всем краевым условиям, наиболее точно — по координатам прихода x_3 и углу отклонения подвеса x_1 .

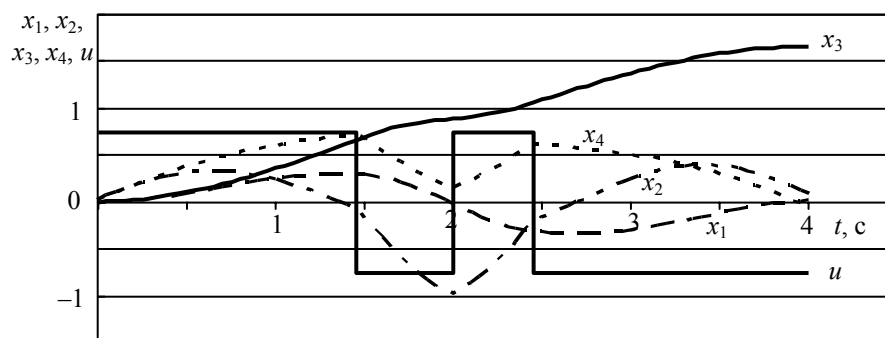


Рис. 1

Более гибкий вариант алгоритма можно получить, предположив возможность управления интенсивностью силового воздействия u_{\max} . В этом случае к системе (1) кроме (2) следует добавить уравнение $\dot{\mathbf{u}}_{\max} = \mathbf{v}$, где $\mathbf{u}_{\max} = (u_{\max 1} \ u_{\max 2} \ u_{\max 3} \ u_{\max 4})^T$ — вектор интенсивностей силовых воздействий ($i = \overline{1,4}$), $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)^T$ — вектор управления величинами $u_{\max i}$.

Приведенное решение дает физически оправданное начальное приближение констант интегрирования для краевой задачи. В качестве начальных значений указанных констант для данной задачи можно принять следующие:

$$\begin{aligned} p_1(0) = C_1 = 0,346; p_2(0) = C_2 = -0,158; p_3(0) = C_3 = 0,146; \\ p_4(0) = C_4 = 0,138. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученное выше время доставки груза $t_f = 4,04$ в назначенную точку используется как начальная оценка оптимального времени для принципа максимума. Решение краевой задачи методом Ньютона [7], при выбранном таким образом начальном приближении, показывает приемлемую и достаточно равномерную сходимость к искомому результату за 25 итераций с нормой невязки $\|\varphi(\mathbf{p}_0^{(n)})\| = 0,798$. В результате итерационного процесса получается следующий набор констант интегрирования при $t_f = 3,879$ с: $C_1 = -0,022 19$; $C_2 = 0,064 49$; $C_3 = -0,233 38$; $C_4 = -0,453 85$.

В точке прихода фазовые переменные имеют следующие значения $x_1 = -0,056$; $x_2 = -0,1564$; $x_3 = 1,780$; $x_4 = 0,0966$. Графики изменения управления и фазовых переменных приведены на рис. 2.

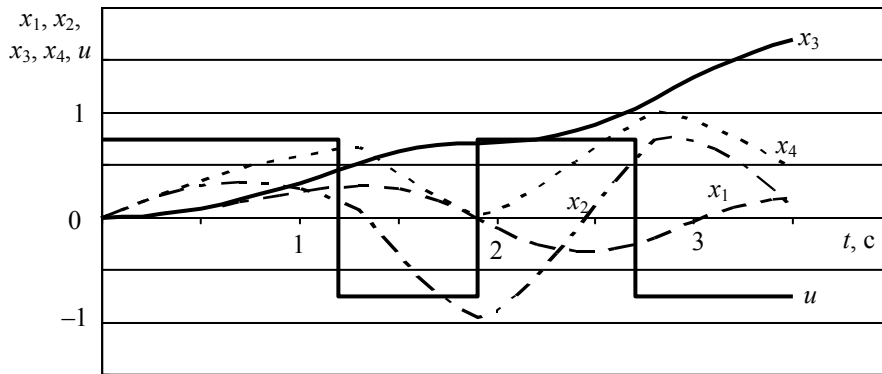


Рис. 2

Алгоритм с фиксированной программой прогноза движения может служить как основным инструментом для получения оптимального по критерию Красовского управления перемещением груза, так и вспомогательным — для определения начальных значений сопряженных переменных при решении краевой задачи принципа максимума методом Ньютона.

3. С учетом трудностей, возникающих при попытке удовлетворения всего набора краевых условий задачи с одинаковой точностью, необходимо разделять условия по уровню значимости. В подобной ситуации эффективной является последовательная оптимизация движения механической системы по иерархии критериев оптимальности на основе использования прогнозирующей модели. Возможно введение приоритетов точности удовлетворения граничным условиям по разным компонентам вектора состояния и соответственно выработки управления. При решении рассматриваемой задачи применяется упрощенный двухуровневый вариант алгоритма, изложенного в работе [3].

Динамика управляемого процесса описывается системой уравнений для вектора состояния (1), дополненных уравнением

$$(\dot{x}_5 \ \dot{x}_6)^T = u, \quad (9)$$

$$u = u_1 + u_2, \quad (10)$$

где $x_6 = t_f$, а управления u_1 и u_2 минимизируют соответственно следующие целевые функционалы I_1, I_2 :

$$I_i = V_{f_i}(\mathbf{x}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_{0i}(\mathbf{x}, t) dt,$$

$$V_{f_1}(x, t_f) = \frac{1}{2} \rho_3 (x_3(t_f) - x_{3f})^2,$$

$$V_{f_2}(x, t_f) = \frac{1}{2} \rho_1 (x_1(t_f) - x_{1f})^2 + \frac{1}{2} \rho_2 (x_2(t_f) - x_{2f})^2 + \frac{1}{2} \rho_4 (x_4(t_f) - x_{4f})^2 + \frac{1}{2} \rho_5 t_f^2,$$

где $f_{01}(\mathbf{x}, t) = 0$, $f_{02}(\mathbf{x}, t) = u_2^T k^2 u_2 + u_{20}^T k^{-2} u_{20}$, $k = \text{diag}(k_5, k_6)$, ρ_i ($i = \overline{1, 5}$) и k_5, k_6 — заданные коэффициенты.

На первом уровне оптимизации итеративным путем из условия минимума критерия I_1 подбирается оптимальное начальное значение x_5^0 управляющего фактора x_5 , с которым выполняется интегрирование системы (1), (9) при $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ на интервале времени $[t, t_f]$. Затем производится вычисление значений сопряженных переменных $p_i(t_f)$ по невязкам выполнения краевых условий $p_i(t_f) = \rho_i (x_i(t_f) - x_{if})$. При найденных граничных значениях $\mathbf{x}(t_f)$, $\mathbf{p}(t_f)$ осуществляется совместное интегрирование систем (1), (9) и сопряженной системы в обратном времени на интервале $[t_f, t]$ с последующим получением значений $\mathbf{p}(t)$.

Управление 1-го уровня может быть вычислено различными способами. В данном случае используется упрощенный алгоритм коррекции его начального значения на ближайший интервал управляемого движения длительностью Δt

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{x_5^0 - x_5^t}{\Delta t} \ 0 \right)^T,$$

где $x_5^t = x_5(t)$. Вычисление x_5 производится любым численным методом итерационным путем из условия $x_3 = x_{3f}$ при некотором начальном оценочном значении времени прихода t_f , x_5^t на первом шаге решения принимается равным начальному значению x_5 , а на последующих — получается из решения задачи Коши для уравнения $\dot{x}_5 = u$, в которой за начальное значение принимается x_5 с предыдущего шага.

Импульс, обеспечивающий механической системе быстрое действие, получается согласно соотношению

$$p_t = H_M + \rho_6 t_f,$$

где ρ_6 — весовой коэффициент, $H_M = p_1 x_2 + p_2 (-a x_1 + x_5) + p_3 x_4 + p_4 (-c x_1 + x_5)$ — гамильтониан, соответствующий неуправляемому движению модели.

Управление 2-го уровня имеет вид

$$\mathbf{u}_2 = (-k_5 p_5 \ -k_6 p_t)^T.$$

Таким образом, искомое управление получается как сумма управлений, определяемых на 1-м и 2-м уровнях.

С управлением, вычисленным согласно (10), производится интегрирование системы (1), (9) на один шаг Δt вперед. После этого все описанные процедуры повторяются при уточненном значении момента конца интервала. Получаемое управление представляет собой кусочно-постоянную функцию на каждом промежутке времени Δt . Для сглаживания кривых изменения скоростей (x_2, x_4) применяется специальный способ вычисления управляющего фактора x_5 . Он определяется как среднее арифметическое значений x_5 , вычисленных для движения на два последовательных шага вперед (при этом первый шаг по траектории проходит виртуально

с управлением, вычисленным согласно описанному выше алгоритму, а для второго управление только вычисляется, но последующее управляемое перемещение не осуществляется). С этим значением x_5 осуществляется один шаг по траектории управляемого движения. Затем вся процедура повторяется.

Результаты вычислений по указанному алгоритму при $\rho_1 = 0,1$; $\rho_2 = 0,0$; $\rho_3 = 10$; $\rho_4 = -30$; $\rho_5 = 0,1$; $\rho_6 = 0,001$; $k_5 = 1,0$; $k_6 = 0,001$ представлены на рис. 3. Шаг вычислений $\Delta t = 0,05$ с. В точке прихода при $t_f = 3,85$ с зафиксированы следующие значения фазовых переменных: $x_1 = 0,1097$; $x_2 = -0,0579$; $x_3 = 1,6208$; $x_4 = 0,6907$.

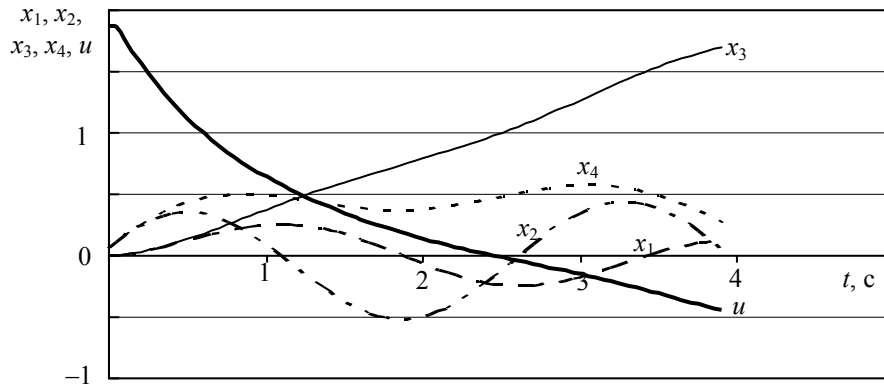


Рис. 3

В статье исследованы возможности построения оптимального управления тележкой мостового крана с использованием различных методов оптимизации. Показано, что алгоритм управления с заданной программой прогноза движения может служить как основным инструментом для получения оптимального по критерию Красовского управления перемещением груза, так и вспомогательным — для нахождения начальных значений сопряженных переменных при решении краевой задачи принципа максимума для максимального быстродействия методом Ньютона.

Исследования, описанные в настоящей статье, выполнены по гранту Российского фонда фундаментальных исследований № 09-08-008-29.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
2. Troch I. Parametrisierung – Ein Werkzeug zur Berechnung optimaler Steuerungen // Automatisierungstechnik AT. 1990. Bd 38. N 6. S. 230—236.
3. Кабанов С. А. Управление системами на прогнозирующих моделях. СПб. Изд-во СПбГУ, 1997. 200 с.
4. Кабанов С. А. Оптимизация динамики систем при действии возмущений. М.: Физматлит, 2008. 200 с.
5. Кабанов Д. С. Оптимальное управление ядерным реактором с учетом случайных возмущений // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 5. С. 27—30.
6. Якушева Д. Б. Решение навигационной задачи Цермело при линейно-вихревой структуре течения // Процессы управления и устойчивость: Тр. 40-й Междунар. науч. конф. СПб: Издат. дом СПбГУ, 2009. С. 91—96.
7. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
8. Кабанов С. А., Якушев Б. Э. Использование неклассического критерия оптимальности в задаче управления работой подъемно-транспортного оборудования // Докл. 55-й конф. СПбГАСУ. Ч. I. СПб: Изд-во СПбГАСУ, 1998. С. 63—65.

Сведения об авторах

Сергей Александрович Кабанов

— д-р техн. наук, профессор; Балтийский государственный технический университет „ВОЕНМЕХ“ им. Д. Ф. Устинова, кафедра систем обработки информации и управления; E-mail: kaba-sa@mail.ru

- Евгений Николаевич Никулин** — д-р техн. наук, профессор; Балтийский государственный технический университет „ВОЕНМЕХ“ им. Д. Ф. Устинова, кафедра средств поражения и боеприпасов; E-mail: enikulin@onixmail.ru
- Борис Эдуардович Якушев** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, кафедра теоретической механики; E-mail: yakushev.spb@mail.ru
- Дарья Борисовна Якушева** — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет, кафедра информационных систем; E-mail: dariayakusheva@gmail.com

Рекомендована кафедрой
систем обработки информации и управления

Поступила в редакцию
14.12.09 г.