

А. А. БОБЦОВ, А. В. КРЫЛОВ, А. А. ПЫРКИН

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ЧАСТОТЫ СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНОГО ФИЛЬТРА

Рассматривается новая схема идентификации частоты измеряемого синусоидального сигнала с использованием нелинейного фильтра. В отличие от большинства известных аналогов, предлагаемый алгоритм позволяет получить более точные оценки за меньшее время.

*Ключевые слова:* идентификация, гармонический сигнал, фильтрация.

**Введение.** Актуальность проблемы идентификации частоты измеряемого синусоидального сигнала в условиях влияния внешних возмущений и шумов подтверждается наличием большого числа публикаций, посвященных идентификации частоты синусоидального или частот мультигармонического сигналов [1—17]. Однако в большинстве указанных работ не обсуждается задача качества идентификации, а именно ускорения вычислительной процедуры и повышения точности оценок при неучтенных возмущениях, присутствующих в канале измерения полезного сигнала. Анализ и рекомендации по увеличению скорости сходимости оценки частоты синусоидального сигнала к истинному значению были опубликованы в работах [11, 14—16], а их робастность к неучтенным возмущениям и помехам исследована в работах [13—16]. В частности, в работе [15] была предложена новая схема идентификации частоты измеряемого синусоидального сигнала в условиях неучтенных возмущающих воздействий и шумов, присутствующих в канале измерения полезного сигнала. Одно из отличий схемы, предложенной в работе [15], от известных аналогов заключается в возможности компенсации неучтенных возмущений путем подбора коэффициентов алгоритма идентификации. Однако такой подход характеризуется потерей скорости параметрической сходимости при устранении влияния возмущений и шумов. По мнению авторов настоящей статьи, назрела необходимость совершенствования имеющихся методов с учетом сохранения одновременно двух показателей качества, т.е. скорости параметрической сходимости и точности оценок.

В данной статье на основе ранних работ Первозванского [18] предлагается новый подход к идентификации частоты синусоидального сигнала с использованием нелинейного фильтра, что позволит решить задачу сохранения качества.

**Постановка задачи.** Рассмотрим, как и в работе [15], измеряемый сигнал

$$\bar{y}(t) = y(t) + \delta(t); \quad (1)$$

$$y(t) = \sigma \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

где амплитуда  $\sigma$ , частота  $\omega$  и фаза  $\varphi$  — неизвестные постоянные величины, а ограниченный гладкий сигнал  $\delta(t)$  характеризует неучтенное возмущающее воздействие или шум в канале измерения полезного сигнала  $y(t)$ .

Ставится задача синтеза схемы идентификации частоты  $\omega$ , обеспечивающей сходимость оценки частоты  $\hat{\omega}$  к ее истинному значению  $\omega$  с минимальной ошибкой. Иными словами, необходимо обеспечить следующее целевое условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\omega - \hat{\omega}(t)| \leq \bar{\delta} \text{ при } \delta(t) \neq 0, \quad (3)$$

где число  $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\delta(t))$ .

**Схема идентификации частоты синусоидального сигнала с использованием нелинейного фильтра.** Для синтеза схемы идентификации частоты  $\omega$  сначала рассмотрим сигнал (1) при отсутствии возмущения  $\delta(t)$ , т.е.

$$\bar{y} = y = \sigma \sin(\omega t + \varphi). \quad (4)$$

Кратко повторим основные положения работы [15]. Известно [13], что для моделирования сигнала (4) можно использовать следующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1; \quad (6)$$

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 = k_1 x_1 + k_2 \dot{x}_1, \quad (7)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — строго положительные постоянные коэффициенты.

Пусть искомым параметр  $\theta = -\omega^2$ , тогда идеальный алгоритм идентификации параметра  $\theta$  может быть представлен следующим образом:

$$\dot{\hat{\theta}} = kx_1^2(\theta - \hat{\theta}), \quad (8)$$

где  $\hat{\theta}$  — текущая оценка параметра  $\theta$ .

Алгоритм вида (8) основан на классическом методе настройки неизвестных параметров и при выполнении условий предельной интегральной невырожденности гарантирует асимптотическую сходимость  $\hat{\theta}$  к  $\theta$  (см., например, [7, 13]). Однако схема идентификации (8) технически нереализуема, так как содержит неизмеряемый сигнал  $x_1$  и неизвестный параметр  $\theta$ . Для того чтобы получить реализуемый алгоритм, проведем следующие преобразования. Из уравнения (7) имеем

$$\dot{x}_1 = k_2^{-1}(-k_1 x_1 + y) = -ax_1 + by, \quad (9)$$

где  $a = k_1 / k_2$ ,  $b = k_2^{-1}$ .

Тогда, пренебрегая экспоненциально затухающими членами, вызванными ненулевыми начальными условиями  $x_1(0)$ , для восстановления переменной  $x_1$  будем использовать уравнение (9) при  $x_1(0) = 0$ . Для того чтобы компенсировать неопределенность  $x_1^2 \theta$  в выражении (8), воспользуемся уравнением (6), при этом алгоритм (8) принимает вид

$$\dot{\hat{\theta}} = -kx_1^2 \hat{\theta} + kx_1 \dot{x}_2. \quad (10)$$

Из выражений (5) и (9) получаем уравнение

$$\dot{x}_2 = -ax_1 + b\dot{y}, \quad (11)$$

подставляя которое в (10), имеем

$$\dot{\hat{\theta}} = -kx_1^2 \hat{\theta} + kx_1(-ax_1 + b\dot{y}), \quad (12)$$

где функции  $x_1$  и  $\dot{x}_1$  определяются из уравнения (9).

Очевидно, что алгоритм (12) по-прежнему нереализуем, так как содержит неизвестную функцию  $\dot{y}$ . Для компенсации этой неизвестной составляющей введем в рассмотрение новую переменную

$$\zeta = \hat{\theta} - kbx_1 y. \quad (13)$$

Дифференцируя (13), получаем реализуемый алгоритм идентификации параметра  $\theta$ :

$$\dot{\zeta} = \dot{\hat{\theta}} - kb\dot{x}_1 y - kbx_1 \dot{y} = -kx_1^2 \hat{\theta} - kax_1 \dot{x}_1 - kb\dot{x}_1 y, \quad (14)$$

$$\hat{\theta} = \zeta + kbx_1 y, \quad \hat{\omega} = \sqrt{|\hat{\theta}|}. \quad (15)$$

Итак, уравнения (9), (14) и (15) представляют собой схему идентификации частоты синусоидального сигнала вида (4), где в случае ненулевого неучтенного возмущения  $\delta(t)$  в канале измерения полезного сигнала вместо  $y(t)$  используется  $\bar{y}(t) = y(t) + \delta(t)$ . Заметим, что предложенная схема идентификации является робастной относительно неучтенных возмущений.

При наличии внешнего возмущения  $\delta(t)$  в канале измерений алгоритм оценивания частоты позволяет обеспечить выполнение целевого условия (3), где величина  $\bar{\delta}$  зависит от  $\delta(t)$ . Следует отметить, что уравнение (9) представляет собой низкочастотный фильтр первого порядка: это, в свою очередь, позволяет подавлять возмущение  $\delta(t)$  за счет выбора коэффициентов  $a$  и  $b$ . С другой стороны, для повышения точности оценивания частоты  $\omega$  необходимо уменьшать параметры  $a$  и  $b$ , что влечет за собой увеличение времени оценивания частоты.

В целях повышения точности и быстродействия оценивания рассмотрим нелинейный фильтр, структурная схема которого представлена на рис. 1.

Выходная переменная фильтра  $\hat{\omega}_f$  определяется соотношением

$$\hat{\omega}_f = \int_0^t \mathfrak{G}(\tau) d\tau, \quad (16)$$

где сигнал  $\mathfrak{G}(\tau)$  является выходом нелинейного звена „насыщение“:

$$\dot{\hat{\omega}}_f = \begin{cases} \frac{c}{d}(\hat{\omega} - \hat{\omega}_f), & |\hat{\omega} - \hat{\omega}_f| \leq d; \\ c \operatorname{sgn}(\hat{\omega} - \hat{\omega}_f), & |\hat{\omega} - \hat{\omega}_f| > d, \end{cases} \quad (17)$$

где  $c$  и  $d$  — настроечные параметры.

На вход фильтра поступает сигнал оценки частоты  $\hat{\omega}$ , рассчитанной по закону (15). Суть фильтра заключается в том, чтобы удалить из сигнала  $\hat{\omega}$  высокочастотную составляющую, связанную с возмущением  $\delta(t)$ . В работе [18] показано, что пропускная способность нелинейного звена „насыщение“ понижается с ростом дисперсии входного сигнала: действительно, чем больше амплитуда на входе, тем меньше коэффициент передачи звена.

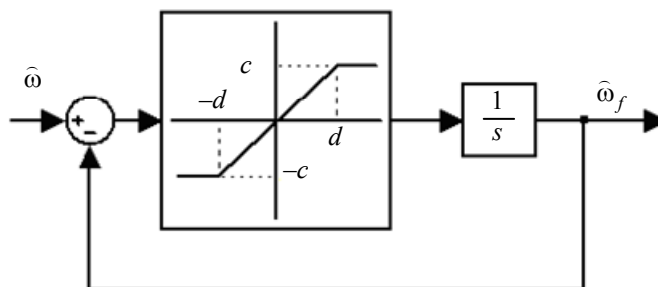


Рис. 1

Как видно из рис. 1, нелинейное звено (17) в фильтре ограничивает скорость роста переменной  $\hat{\omega}_f$  благодаря константам  $c$  и  $d$ . Настройка фильтра сводится к определению констант  $c$  и  $d$ , которые, в свою очередь, определяют максимальную скорость изменения градиента полезного сигнала. Исходя из этого следует, что при настройке фильтра (16), (17) должны учитываться динамические свойства входного процесса.

Если входной сигнал содержит компонент с заведомо большей скоростью, чем полезный сигнал, то этот компонент будет подавлен фильтром (16), (17). Если в возмущении  $\delta(t)$  присутствует большой по амплитуде выброс, вызванный, например, сбоем датчика, то нелинейный фильтр (16), (17) в силу своей структуры не пропустит его, в отличие от любого линейного фильтра.

Результат работы алгоритма идентификации частоты (формулы (9), (14) и (15)) без использования фильтра (16), (17) зависит только от выбора параметров  $k$ ,  $a$  и  $b$  [15]. С ростом значений этих параметров увеличится скорость сходимости оценки частоты в установившуюся область, но размер этой области, как и дисперсия сигнала, будет увеличиваться. Наличие фильтра (16), (17) обеспечивает существенное повышение точности оценивания при сохранении быстродействия алгоритма идентификации частоты.

Для иллюстрации работоспособности предложенной схемы идентификации рассмотрим пример.

**Пример.** Сравним работу схемы идентификации, предложенной в настоящей статье, со схемой, рассмотренной в работе [15]. На рис. 2 и 3 приведены результаты моделирования схем идентификации (9), (14)—(17).

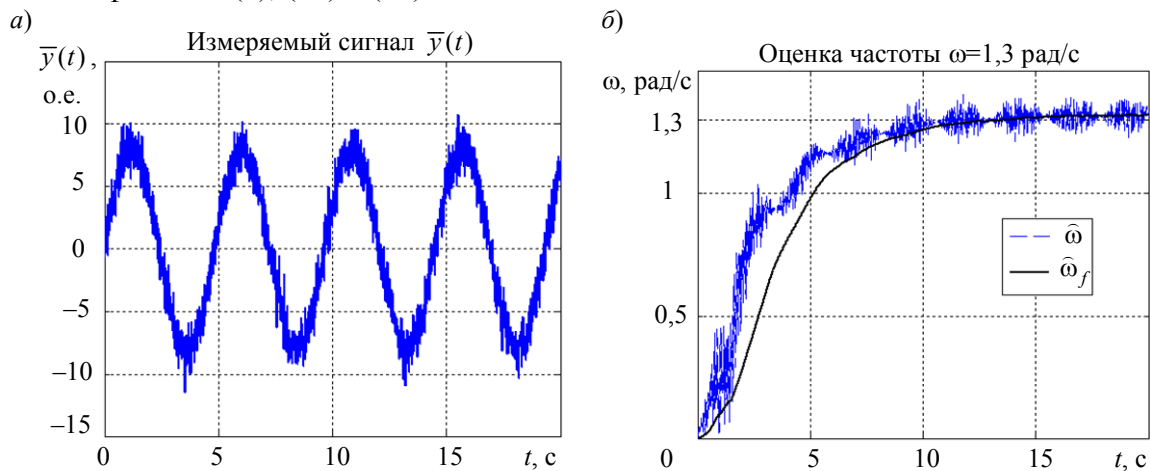


Рис. 2

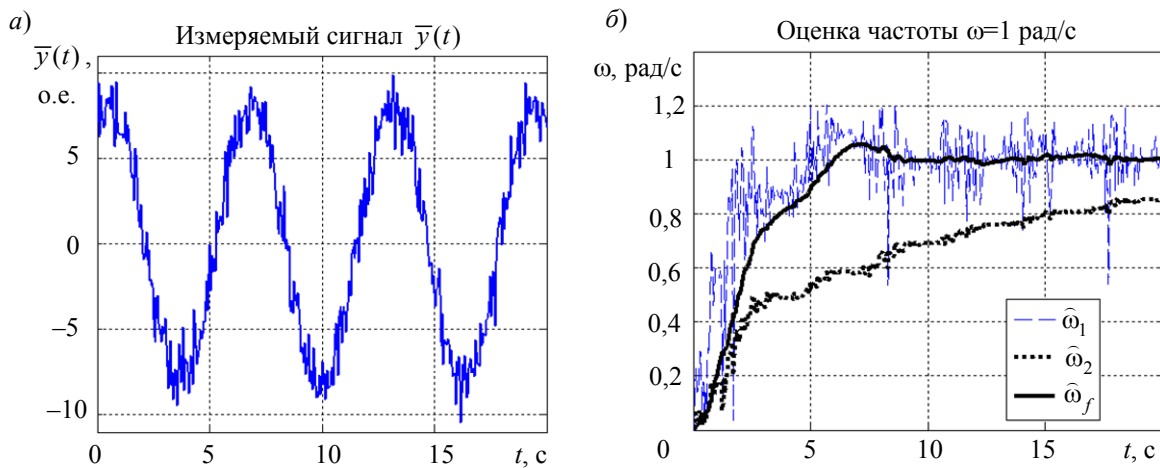


Рис. 3

Возмущение  $\delta(t)$  типа белый шум моделировалось как последовательность случайных чисел с нормальным распределением, сменяющихся на каждом интервале времени  $t_0$ . На рис. 2, а представлена временная диаграмма для измеряемого сигнала  $\bar{y}(t)$ , где  $y(t) = 8\sin(1,3t)$ . При моделировании были выбраны следующие параметры сигнала  $\delta(t)$ : мощность  $N = 0,001$ , интервал квантования  $t_0 = 0,001$  с. На рис. 2, б представлены результаты

оценивания частоты при следующих параметрах алгоритма идентификации:  $a = 0,5$ ,  $b = 0,3$ ,  $k = 0,2$ ,  $c = 0,3$ ,  $d = 0,3$ . Оценка частоты  $\hat{\omega}$ , полученная по алгоритму (9), (14), (15), соответствует результату, приведенному в работе [15]. При использовании дополнительного фильтрующего устройства (16) получена оценка  $\hat{\omega}_f$ . Очевидно, что оценка  $\hat{\omega}_f$  точнее  $\hat{\omega}$  при том же времени переходного процесса.

В статье [15] рассматривается возможность компенсации возмущения  $\delta(t)$  за счет выбора коэффициентов  $a$  и  $b$  без использования дополнительных фильтрующих устройств. Рис. 3 иллюстрирует, что нелинейный фильтр (16), (17) позволяет получить более точную оценку за меньшее время. На рис. 3, *a* представлена временная диаграмма для измеряемого сигнала  $\bar{y}(t)$ , где  $y(t) = 8\sin(1t+1)$ . В этом случае при моделировании были выбраны следующие параметры сигнала  $\delta(t)$ : мощность  $N = 0,05$ , интервал квантования  $t_0 = 0,05$  с. На рис. 3, *b* представлены результаты оценивания частоты при различных параметрах схемы идентификации: оценки  $\hat{\omega}_1(t)$  и  $\hat{\omega}_2(t)$  получены на основе алгоритма (9), (14), (15) при  $a_1 = 0,2$ ,  $b_1 = 0,2$ ,  $k_1 = 0,7$  и  $a_2 = 0,1$ ,  $b_2 = 0,1$ ,  $k_2 = 0,2$  соответственно; оценка  $\hat{\omega}_f(t)$  получена на основе сигнала  $\hat{\omega}_1(t)$  при  $c = 1$ ,  $d = 1$ . Здесь, как и на рис. 2, видно, что использование нелинейного фильтра значительно повышает точность оценивания частоты. Для обеспечения такой же точности оценивания без использования фильтра (16), (17), следуя работе [15], были выбраны другие параметры схемы идентификации. Сравнение времени переходного процесса для  $\hat{\omega}_2(t)$  и  $\hat{\omega}_f(t)$  показывает очевидное преимущество метода оценивания частоты с использованием нелинейного фильтра (16), (17).

**Заключение.** Предложен новый метод оценивания частоты сигнала, содержащего полезную составляющую в форме синусоидальной функции времени, и возмущающего сигнала, вызванного помехами в канале измерения. Достоинством представленной схемы является обеспечение желаемой точности идентификации частоты за меньшее время в сравнении с известными мировыми аналогами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 09-08-00139-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bodson M., Douglas S. C.* Adaptive algorithms for the rejection of periodic disturbances with unknown frequencies // *Automatica*. 1997. Vol. 33. P. 2213—2221.
2. *Hsu L., Ortega R., Damm G.* A globally convergent frequency estimator // *IEEE Transact. on Automatic Control*. 1999. Vol. 46. P. 967—972.
3. *Mojiri M., Bakhshai A. R.* An adaptive notch filter for frequency estimation of a periodic signal // *IEEE Transact. on Automatic Control*. 2004. Vol. 49. P. 314—318.
4. *Marino R., Tomei R.* Global estimation of unknown frequencies // *IEEE Transact. on Automatic Control*. 2002. Vol. 47. P. 1324—1328.
5. *Xia X.* Global frequency estimation using adaptive identifiers // *IEEE Transact. on Automatic Control*. 2002. Vol. 47. P. 1188—1193.
6. *Obregon-Pulido G., Castillo-Toledo B., Loukianov A. A.* Globally convergent estimator for  $n$ -frequencies // *IEEE Transact. on Automatic Control*. 2002. Vol. 47. P. 857—863.
7. *Bobtsov A., Lyamin A., Romasheva D.* Algorithm of parameter's identification of polyharmonic function // 15th IFAC World Congress on Automatic Control. Barcelona, Spain, 2002.
8. *Бобцов А. А., Кремлев А. С.* Адаптивная идентификация частоты смещенного синусоидального сигнала // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2005. Т. 48, № 4. С. 22—26.

9. *Hou M.* Amplitude and frequency estimator of a sinusoid // IEEE Transact. on Automatic Control. 2005. Vol. 50. P. 855—858.
10. *Арановский С. В., Бобцов А. А., Кремлев А. С., Лукьянова Г. В.* Робастный алгоритм идентификации частоты синусоидального сигнала // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 1—6.
11. *Арановский С. В., Бобцов А. А., Кремлев А. С.* и др. Идентификация частоты смещенного синусоидального сигнала // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 3—9.
12. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Kremlev A.* et al. Identification of frequency of biased harmonic signal // IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP 07). St. Petersburg, 2007.
13. *Bobtsov A.* New approach to the problem of globally convergent frequency estimator // Intern. Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2008. N 3. P. 306—317.
14. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Kremlev A.* et al. Identification of frequency of biased harmonic signal // European Journal of Control. 2010. N 2.
15. *Бобцов А. А., Николаев Н. А., Слута О. В.* Новая схема идентификации частоты синусоидального сигнала // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 11. С. 2—4.
16. *Пыркин А. А.* Адаптивный алгоритм компенсации параметрически неопределенного смещенного гармонического возмущения для линейного объекта с запаздыванием в канале управления // Автоматика и телемеханика. 2010. № 8. С. 62—78.
17. *Бобцов А. А., Колюбин С. А., Пыркин А. А.* Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // Там же. 2010. № 11. С. 136—148.
18. *Первозванский А. А.* Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М.: Физматгиз, 1962. 352 с.

**Сведения об авторах**

- Алексей Алексеевич Бобцов** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики;  
E-mail: bobtsov@mail.ifmo.ru
- Андрей Валентинович Крылов** — канд. техн. наук; ЗАО „НАВИС“, Санкт-Петербург; начальник отдела;  
E-mail: a.krylov@navisincontrol.com
- Антон Александрович Пыркин** — канд. техн. наук; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: a.pyrkin@gmail.com

Рекомендована кафедрой  
систем управления и информатики СПбГУ ИТМО

Поступила в редакцию  
18.01.11 г.