УДК 62.50

С. В. Быстров, В. В. Григорьев, О. К. Мансурова, Е. Ю. Рабыш,
В. Ю. Рюхин, Н. А. Черевко

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для линейных дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами разработана процедура синтеза регулятора на основе метода локальной оптимизации. Предлагаемая процедура сводится к решению системы матричных алгебраических уравнений типа Риккати, число которых соответствует количеству интервалов дискретности, содержащихся в периоде изменения параметров системы. С использованием полученных результатов осуществлен синтез пропорционального регулятора.

Ключевые слова: *дискретная система, периодическое изменение параметров, пропорциональный регулятор, качество процессов, математическое моделирование.*

Введение. При аналитическом конструировании регуляторов для многомерных САУ наряду с методом модального управления широко применяются методы оптимального управления. Под оптимальной САУ понимается система, которой тем или иным способом приданы наилучшие качества в определенном смысле [1—4].

В оптимальных системах успешное решение задачи зависит от выбора параметров критерия качества, относительно которого проектируемая система должна быть оптимальной. Функционал конструируется таким образом, чтобы оптимальности системы всегда соответствовал его минимум как при минимальном, так и при максимальном значении требуемого показателя качества. Функционал, в общем случае, может представлять собой любую желаемую комбинацию оценок различных качеств проектируемой системы. В условиях задачи оптимизации любого из качеств системы присутствуют ограничения других ее качеств [5].

Постановка задачи синтеза регуляторов для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами. Рассмотрим синтез закона оптимальных управлений для объекта управления (ОУ), характеризуемого следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &x\big((mk+i)+1\big)=A_{i+1}x(mk+i)+B_{i+1}u(mk+i);\\ &y(mk+i)=C_{i+1}x(mk+i);\\ &e(mk+i)=g(mk+i)-y(mk+i);\quad i=\overline{0,(k-1)},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где x — вектор состояния ОУ, $x\in R^n$; y — вектор регулируемых переменных, $y\in R^l$; u — управляющее воздействие на систему, $u\in R^l$; g — вектор внешних воздействий, $g\in R^l$; e— вектор ошибки, $e\in R^l$; m=0, 1, 2, ... — дискретные моменты времени; k — интервал периодичности; i=0, 1, ..., (k–1) — номер временного шага системы внутри интервала k; A_{i+1} — периодическая $n\times n$-матрица описания ОУ на (i+1)-м шаге внутри интервала k; B_{i+1} — периодическая $n\times l$-матрица входов ОУ по управляющему воздействию на (i+1)-м шаге внутри интервала k; C_{i+1} — периодическая $l\times n$-матрица выходов ОУ на (i+1)-м шаге внутри интервала k.

Для объекта управления (1) введем критерий качества, характеризующий изменение траекторий движений системы:

$$J=\sum_{m=0}^{\infty}\begin{bmatrix}x^T(mk+i) & u^T(mk+i)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & R\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(mk+i)\\ u(mk+i)\end{bmatrix};\quad i=\overline{0,(k-1)}, \tag{2}$$

где Q_1 — симметрическая, положительно-полуопределенная, т.е. $Q_1\ge 0$, $n\times n$-матрица штрафов по отклонениям траекторий движения системы от положения равновесия; R — симметрическая, положительно-определенная, т.е. $R>0$, $l\times l$-матрица штрафов по управлению.

Ставится задача найти закон управления вида

$$u(mk+i)=-K_{i+1}x(mk+i);\quad i=\overline{0,(k-1)}, \tag{3}$$

где K_{i+1} — периодическая $l\times n$-матрица линейных обратных связей (ЛОС) по состояниям ОУ на (i+1)-м шаге внутри интервала k; $K_{i+1}=\left[K_{e_{i+1}};\bar{K}_{i+1}\right]$, здесь $K_{e_{i+1}}$ — периодическая $l\times l$-матрица линейных обратных связей по ошибке на (i+1)-м шаге внутри интервала k; $\bar{K}_{i+1}$ — периодическая $l\times(n-l)$-матрица линейных обратных связей по состояниям ОУ $\bar{x}=\left[x_{l+1};\ \ldots;\ x_n\right]^T$ на (i+1)-м шаге внутри интервала k.

Соответствующие уравнению (3) траектории движения удовлетворяют системе уравнений (1). Найденные закон управления и траектории движения должны обеспечивать минимальное значение критерия качества вида (2), а также свойство устойчивости замкнутой системы.

Синтез закона оптимальных управлений для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами. Рассмотрим уравнения движения замкнутой системы с проектируемым регулятором относительно переходной составляющей, по которой и определяются динамические показатели качества. В соответствии с уравнениями (1) и (3) имеем

$$\left.\begin{aligned} &x_{\text{п}}\big((mk+i)+1\big)=F_{i+1}x_{\text{п}}(mk+i);\\ &y_{\text{п}}(mk+i)=C_{i+1}x_{\text{п}}(mk+i);\\ &i=\overline{0,(k-1)},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $F_{i+1} = A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}$ — периодическая матрица описания замкнутой системы на (i+1)-м шаге внутри интервала k.

Проанализируем уравнения движения системы (4) на каждом шаге интервала периодичности k, которые принимают вид системы, описываемой k уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &x_{\text{п}}\left(\left(mk+i\right)+k\right) = \tilde{F}_{i+1}x_{\text{п}}\left(mk+i\right);\\ &y_{\text{п}}\left(mk+i\right) = C_{i+1}x_{\text{п}}\left(mk+i\right);\\ &i = \overline{0,\left(k-1\right)},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $\tilde{F}_{i+1} = \prod\limits_{j=i+1}^{k+i} F_{k+2i+1-j}$ — периодическая обобщенная матрица описания (i+1)-го уравнения движения замкнутой системы внутри интервала k.

Внутри интервала периодичности k система (4) не является системой с периодически изменяющимися коэффициентами и ее можно рассматривать как линейную стационарную дискретную систему.

Для решения задачи синтеза закона оптимальных управлений введем дополнительный критерий качества

$$J_a = \sum_{j=m}^{\infty}\left[x^T\left(jk+i\right) \quad u^T\left(jk+i\right)\right]\cdot\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & R\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\left(jk+i\right)\\ u\left(jk+i\right)\end{bmatrix}; \quad i = \overline{0,\left(k-1\right)}, \tag{6}$$

который при $j = 0$ порождает критерий вида (2).

Для связи искомых оптимальных законов управления со свойством устойчивости рассмотрим периодическую квадратичную функцию Ляпунова, равную критерию J_a:

$$V_{i+1}\left(x_{\text{п}}\left(mk+i\right)\right) = x_{\text{п}}^T\left(mk+i\right)P_{i+1}x_{\text{п}}\left(mk+i\right) =$$

$$= \sum_{j=m}^{\infty}\left[x_{\text{п}}^T\left(jk+i\right) \quad u^T\left(jk+i\right)\right]\cdot\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & R\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{\text{п}}\left(jk+i\right)\\ u\left(jk+i\right)\end{bmatrix}; \quad i = \overline{0,\left(k-1\right)}, \tag{7}$$

где P_{i+1} — периодическая, симметрическая, положительно-определенная на (i+1)-м шаге внутри интервала k, т.е. $P_{i+1} > 0$, $n \times n$-матрица.

Замкнутая система (4) будет асимптотически устойчива, если на всех траекториях движения первая разность от функции Ляпунова (7) внутри интервала периодичности будет строго отрицательна. Найдем значение первой разности от функции Ляпунова вида (7) внутри интервала периодичности:

$$\begin{gathered} x_{\text{п}}^T\left(mk+i\right)\left(\tilde{F}_{i+1}^T P_{i+1}\tilde{F}_{i+1} - P_{i+1}\right)x_{\text{п}}\left(mk+i\right) = -x_{\text{п}}^T\left(mk+i\right)Q_1x_{\text{п}}\left(mk+i\right) - \\ -u^T\left(mk+i\right)Ru\left(mk+i\right); \quad i = \overline{0,\left(k-1\right)}. \end{gathered} \tag{8}$$

В уравнении (8) матрица Q_1 является, по крайней мере, положительно-полуопределенной, а матрица R — положительно-определенной. Следовательно, первая разность от функции Ляпунова будет строго отрицательной, т.е. при искомом законе управления вида (3), удовлетворяющем уравнению (8), замкнутая система (4) будет устойчива. С учетом того, что

$$\Delta V_{i+1} < 0,\ i = \overline{0,\left(k-1\right)},$$

уравнение (8) примет следующий вид:

$$\begin{gathered} x_{\text{п}}^T\left(mk+i\right)\left(F_{i+1}^T P_{i+2}F_{i+1} - P_{i+1}\right)x_{\text{п}}\left(mk+i\right) = -x_{\text{п}}^T\left(mk+i\right)Q_1x_{\text{п}}\left(mk+i\right) - \\ -u^T\left(mk+i\right)Ru\left(mk+i\right); \quad i = \overline{0,\left(k-1\right)}. \end{gathered} \tag{9}$$

Подставив в формулу (9) уравнение (3) и значение периодической матрицы $F_{i+1} = A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}$, $i = \overline{0,(k-1)}$, из уравнения (4), получим

$$x_{п}^T(mk+i)A_{i+1}^T P_{i+2}A_{i+1}x_{п}(mk+i) + x_{п}^T(mk+i)A_{i+1}^T P_{i+2}B_{i+1}u(mk+i) +$$
$$+u^T(mk+i)B_{i+1}^T P_{i+2}A_{i+1}x_{п}(mk+i) + u^T(mk+i)B_{i+1}^T P_{i+2}B_{i+1}u(mk+i) -$$
$$-x_{п}^T(mk+i)P_{i+1}x_{п}(mk+i) = -x_{п}^T(mk+i)Q_1 x_{п}(mk+i) -$$
$$-u^T(mk+i)Ru(mk+i); \quad i = \overline{0,(k-1)}. \tag{10}$$

Будем искать оптимальный закон управления вида (3) исходя из условия, что первая разность от функции Ляпунова на всех траекториях движения системы должна принимать минимальное значение. Для этого частные производные по управлению от правой и левой частей уравнения (10) должны быть равны. Возьмем частные производные по управлению, т.е. $\partial/\partial u$, от обеих частей уравнения (10), в результате получим

$$x_{п}^T(mk+i)A_{i+1}^T P_{i+2}B_{i+1} + B_{i+1}^T P_{i+2}A_{i+1}x_{п}(mk+i) + 2u(mk+i)B_{i+1}^T P_{i+2}B_{i+1} =$$
$$= -2u(mk+i)R; \quad i = \overline{0,(k-i)}. \tag{11}$$

Сгруппируем в одной части уравнения (11) все члены, содержащие $u(mk+i)$, $i = \overline{0,(k-1)}$, а в другой — члены, содержащие $x_{п}(mk+i)$, $i = \overline{0,(k-1)}$; так как последние являются скалярами, то получим

$$u(mk+i) = -\left(R + B_{i+1}^T P_{i+2}B_{i+1}\right)^{-1} B_{i+1}^T P_{i+2}A_{i+1}x(mk+i); \; i = \overline{0,(k-1)}. \tag{12}$$

С учетом закона управления (3) из уравнения (12) следует, что искомая периодическая матрица ЛОС K_{i+1}, $i = \overline{0,(k-1)}$, имеет вид

$$K_{i+1} = \left(R + B_{i+1}^T P_{i+2}B_{i+1}\right)^{-1} B_{i+1}^T P_{i+2}A_{i+1}, \quad i = \overline{0,(k-1)}. \tag{13}$$

В силу того, что уравнение (10) должно выполняться для всех траекторий движения $x_{п}(mk+i)$, $i = \overline{0,(k-1)}$, и учитывая найденное значение для матрицы ЛОС K_{i+1}, $i = \overline{0,(k-1)}$, приходим от уравнения (10) к системе матричных алгебраических уравнений типа Риккати:

$$\left.\begin{aligned} &A_{i+1}^T P_{i+2}A_{i+1} - K_{i+1}^T\left(R + B_{i+1}^T P_{i+2}B_{i+1}\right)K_{i+1} - P_{i+1} = -Q_1; \\ &K_{i+1} = \left(R + B_{i+1}^T P_{i+2}B_{i+1}\right)^{-1} B_{i+1}^T P_{i+2}A_{i+1}; \quad i = \overline{0,(k-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Таким образом, задача синтеза закона оптимального управления для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами сводится к решению на каждом шаге $i = \overline{0,(k-1)}$ внутри интервала периодичности системы матричных алгебраических уравнений типа Риккати (14) относительно матриц P_{i+1} и K_{i+1}.

Для нахождения матриц P_{i+1}, $i = \overline{0,(k-1)}$, очевидна связь между уравнением типа Риккати (14) и уравнением типа Ляпунова:

$$F_{i+1}^T P_{i+2}F_{i+1} - P_{i+1} = -Q_{i+1}; \quad i = \overline{0,(k-1)}. \tag{15}$$

Чтобы показать эту связь, подставим в уравнение (15) значение матрицы $F_{i+1} = A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}$, $i = \overline{0,(k-1)}$, замкнутой системы (4) и положим, что следующая матрица является периодической и положительно-определенной:

$$Q_{i+1} = Q_1 + K_{i+1}^T R K_{i+1}, \; i = \overline{0,(k-1)}.$$

Так как $Q_1 > 0$ и $R > 0$, то матрица Q_{i+1} также будет положительно-определенной, а так как матрицы ЛОС K_{i+1}, $i = \overline{0,(k-1)}$, периодические, то данная матрица будет и периодической. В результате получим матричное алгебраическое уравнение типа Риккати (14) для нахождения матриц P_{i+1}, $i = \overline{0,(k-1)}$.

Связь между уравнениями типа Ляпунова и Риккати показывает, что задачу синтеза оптимального управления можно свести к решению системы

$$\left.\begin{aligned} &\left(A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}\right)^T P_{i+2}\left(A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}\right) - P_{i+1} = -Q_{i+1}; \\ &K_{i+1} = \left(R + B_{i+1}^T P_{i+2} B_{i+1}\right)^{-1} B_{i+1}^T P_{i+2} A_{i+1}; \quad i = \overline{0,(k-1)}, \end{aligned}\right\}$$

или, воспользовавшись модифицированным уравнением типа Ляпунова вида $F_{i+1}^T P_{i+2} F_{i+1} - \lambda_{i+1}^2 P_{i+1} = -Q_{i+1}$; $i = \overline{0,(k-1)}$, — к решению системы

$$\left.\begin{aligned} &\left(A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}\right)^T P_{i+2}\left(A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}\right) - \lambda_{i+1}^2 P_{i+1} = -Q_{i+1}; \\ &K_{i+1} = \left(R + B_{i+1}^T P_{i+2} B_{i+1}\right)^{-1} B_{i+1}^T P_{i+2} A_{i+1}; \quad i = \overline{0,(k-1)}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где λ_{i+1} — степень устойчивости системы на i-м шаге внутри интервала периодичности.

Вычисление матриц P_{i+1} и K_{i+1}, $i = \overline{0,(k-1)}$, выполняется на основе матричной рекуррентной процедуры:

$$\left.\begin{aligned} &P_{i+1}\left((m+1)k - i\right) = \lambda_{i+1}^{-2}\left(A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}\left((m+1)k - i\right)\right)^T \times \\ &\qquad \times P_{i+2}\left((m+1)k - i - 1\right)\left(A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1}\left((m+1)k - i\right)\right) + Q_{i+1}; \\ &K_{i+1}\left((m+1)k - i\right) = \left(R + B_{i+1}^T P_{i+2}\left((m+1)k - i - 1\right) B_{i+1}\right)^{-1} \times \\ &\qquad \times B_{i+1}^T P_{i+2}\left((m+1)k - i - 1\right) A_{i+1}; \quad i = \overline{0,(k-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

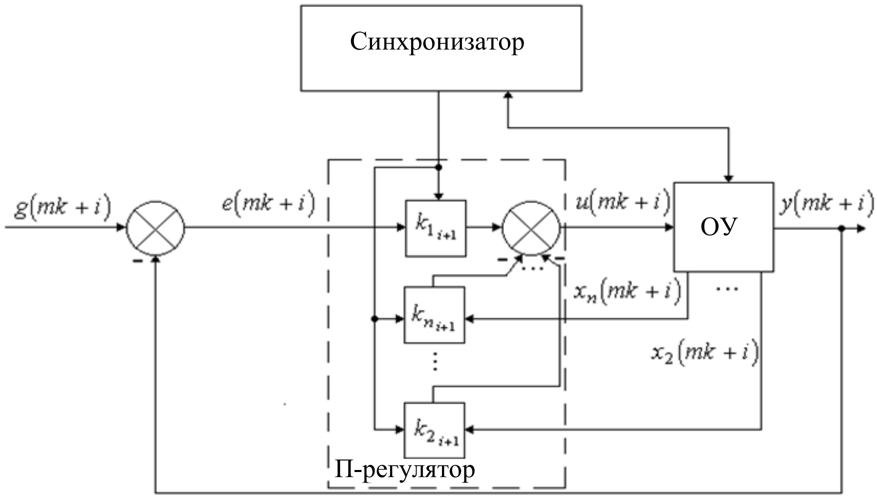
Используя полученные выражения, в общем виде можно представить следующий алгоритм синтеза закона управлений (синтеза П-регулятора) для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами на основе метода локальной оптимизации.

1. Проверка на каждом шаге $i = \overline{0,(k-1)}$ внутри интервала периодичности пар матриц $\left(A_{i+1}, B_{i+1}\right)$ на полную управляемость.

2. Задание на каждом шаге $i = \overline{0,(k-1)}$ внутри интервала периодичности скорости сходимости траекторий движения в соответствии с требуемыми динамическими показателями качества и условием, что $0 < \prod\limits_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} \le 1$.

3. Решение системы уравнений (16) относительно матриц K_{i+1} и P_{i+1}, $i = \overline{0,(k-1)}$, на основе матричной рекуррентной процедуры (17).

Функциональная схема дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами с П-регулятором, полученным на основе метода оптимального управления, приведена на рисунке.



Метод синтеза матрицы ЛОС K_{i+1}, $i=\overline{0,(k-1)}$, с использованием метода локальной оптимизации, гарантирующего расположение корней характеристического полинома замкнутой системы в желаемой области, можно рассматривать как метод синтеза модальных управлений, когда желаемые корни характеристического полинома должны быть расположены в некоторой области, а не заданы однозначно [6].

Вывод. Рассмотренный метод синтеза закона оптимальных управлений позволяет спроектировать для линейной дискретной системы с периодически изменяющимися коэффициентами такой закон, который обеспечивает устойчивость сконструированной системы, задавая расположение желаемых корней характеристического полинома в некоторой области, принадлежащей кругу единичного радиуса, путем минимизации заданного функционала качества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брайсон А., Хо-Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

2. *Бобцов А. А., Быстров С. В., Григорьев В. В.* и др. Построение регуляторов для систем пространственного слежения с периодическими коэффициентами // Тез. мультиконференции ИКТМ-2007. Геленджик, 2007.

3. *Григорьев В. В., Мотылькова М. М., Мансурова О. К.* Построение регуляторов для систем пространственного слежения // Изв. вузов. Приборостроение. 2007. Т. 50, № 11.

4. *Бобцов А. А., Быстров С. В., Григорьев В. В.* и др. Построение моделей систем пространственного слежения со сканированием // Материалы I Рос. мультиконференции по проблемам управления, Санкт-Петербург, 10—12 окт. 2006 г. СПб: ЦНИИ „Электроприбор“, 2006.

5. *Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П.* Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 240 с.

6. *Подчукаев В. А.* Оптимальное модальное управление и наблюдение // Автоматика и телемеханика. 1983. № 8. С. 49—54.

Сведения об авторах

Сергей Владимирович Быстров — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: sbystrov@mail.ru

Валерий Владимирович Григорьев — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: grigvv@yandex.ru

Ольга Кирибековна Мансурова — канд. техн. наук, доцент; Северо-Западный государственный заочный технический университет, Санкт-Петербург

Евгений Юрьевич Рабыш — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: Rabysh@yandex.com

Валентин Юрьевич Рюхин — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики;

Николай Александрович Черевко — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: epostbox1@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики СПбГУ ИТМО

Поступила в редакцию
18.01.11 г.