УДК 5:51(076)+62:51(076)

А. Б. Бушуев, С. В. Быстров, В. В. Григорьев

АНАЛИЗ ТРЕУГОЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Рассматривается проблема системного эффекта структуры из трех элементов, связанных динамическими отношениями.

Ключевые слова: *триадная структура, веполь, гомеостат.*

Введение. Треугольную структуру образует граф из трех элементов, характеризуемых связями или отношениями. В различных областях естествознания и техники структура из трех элементов, или триадная структура, является основой понятийного аппарата, простейшей моделью.

В динамической структуре связь между элементами зависит от времени, поэтому треугольная динамическая структура (динамический треугольник) может быть задана системой трех дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Например, математическая модель сообщества „производители—продукт—управленцы“ на качественном уровне описывается системой уравнений [1]

$$\dot{x} = f_1(x, y, z), \quad \dot{y} = f_2(x, y, z), \quad \dot{z} = f_3(x, y, z),$$

где x — число производителей, y — число управленцев, z — количество продукта, f_i, i=1, 2, 3, — в общем случае нелинейные функции.

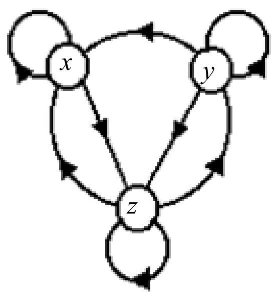

Рис. 1

Граф-схема такой структуры приведена на рис. 1; каждая стрелка на схеме соответствует воздействию переменной, от которой она направлена, на изменение той переменной, к которой она ведет.

В теории решения изобретательских задач (ТРИЗ) [2] широко используется метод структурного анализа и синтеза по статическим треугольным структурам. По первым буквам слов „вещество“ и „поле“, образующим вершины графа-треугольника, этот метод называется вепольным анализом. Однако методы анализа и синтеза по динамическим треугольникам недостаточно исследованы. Рассмотрим эту проблему более подробно.

Проектирование треугольных структур. Единицей структурного анализа является веполь — триада из двух веществ и поля или двух полей и вещества. В отличие от обычного представления, в ТРИЗ под веществами понимаются любые элементы устройства или технической системы, ее функциональные части, или даже целые системы. Поля отражают любое взаимодействие между веществами. Решение изобретательской задачи представляется как некоторое преобразование вепольной структуры. В ТРИЗ существуют два основных метода синтеза треугольных структур: достройка неполной триады до полного треугольника (рис. 2, *а*) и разрушение прежней треугольной структуры и постройка новой (рис. 2, *б*). Этот метод синтеза может быть назван дискретным, так как осуществляется по шагам. Например, в задаче на разрушение (см. рис. 2, *б*) первым шагом является разрушение связи между веществами В1 и В2, вторым шагом — поиск нового вещества В3, третьим шагом — замыкание веполя до полного треугольника. В некоторых задачах может быть еще один шаг между первым и вторым — поиск нового поля П.

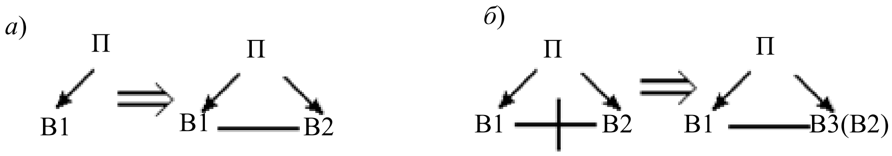

Рис. 2

При дискретном синтезе треугольных структур вещества и поля появляются или исчезают, но их свойства не изменяются. Для учета инерционных свойств мышления при поиске веществ или полей, разрушении или достройке треугольника введем понятие динамического поля и динамического вещества.

Будем считать динамическим веществом или полем такое вещество или поле, свойство $u_1(t)$ которого развивается во времени по так называемой *S*-кривой развития [3]. Кривую развития аппроксимируем логистической кривой Ферхюльста — Перла:

$$\dot{u}_1 = a_1 u_1^2 + b_1 u_1, \tag{1}$$

где a_1 и b_1 — коэффициенты генерации новых идей и забывания прежних.

Треугольная структура содержит три элемента, следовательно, для двух других элементов получаем аналогичные уравнения:

$$\dot{u}_2 = a_2 u_2^2 + b_2 u_2, \ \dot{u}_3 = a_3 u_3^2 + b_3 u_3. \tag{2}$$

Таким образом, система уравнений (1), (2) задает эволюцию координат u_1, u_2, u_3 треугольника во времени.

При синтезе треугольника элементы структуры привносят в нее свои свойства. В общем случае возникающее системное свойство не сводится к сумме свойств элементов. Рассмотрим механизм преобразования свойств элементов в свойство структуры, т.е. появление системного эффекта. Для этого необходимо уравнения (1) и (2) объединить.

Элементы в одной структуре могут действовать как согласованно друг с другом, так и антагонистично. Действительно, процесс разрушения веполя обусловлен вредными связями между веществами и полями, а процесс достройки структуры до полного веполя осуществляется полезными связями. Возникает вопрос, как эту ситуацию отразить математически. Ответ может подсказать дискретный вепольный анализ. Например, самое сильное изобретательское решение получается при достройке неполного веполя (см. рис. 2, *а*), когда в качестве второго вещества В2 выбирается уже имеющееся в структуре вещество В1, т.е. принимается решение выбрать В2=В1. Это связано с тем, что для решения задачи не привлекаются внесистемные ресурсы, решение получается близким к идеальному. Так как элементы выбираются одинаковыми, следовательно, они будут иметь и одинаковые свойства. Поэтому при объединении элементов в треугольник первоначально будем считать, что в уравнениях (1) и (2) можно принять условие

$$u_1 = u_2 = u_3. \qquad (3)$$

Распад структуры происходит на максимальном обострении противоречий, когда свойства элементов строго противоположны. Следовательно, для этой ситуации можно принять условия, что

$$u_1 = -u_2, \quad u_2 = -u_3, \quad u_3 = -u_1. \qquad (4)$$

Так как эти условия противоречат друг другу, то для их выполнения необходимо нарушить одно из условий, т.е. использовать уравнение (3): например, считать, что

$$\left.\begin{array}{r} u_1 = -u_2, \quad u_2 = -u_3, \quad u_3 = u_1, \\ \text{или } \; u_1 = u_2, \quad u_2 = -u_3, \quad u_3 = -u_1, \\ \text{или } \; u_1 = -u_2, \quad u_2 = u_3, \quad u_3 = -u_1. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Чтобы выполнялись условия (3)—(5), для коэффициентов уравнений (1), (2) должны соблюдаться условия

$$|a_1| = |a_2| = |a_3| \quad \text{и} \quad |b_1| = |b_2| = |b_3|,$$

и коэффициенты должны иметь соответствующие математические знаки. В зависимости от набора знаков элементам структуры могут быть присущи различные стереотипы поведения, например согласие, компромисс, конкуренция и т.п. [4].

Для структурного синтеза дифференциальных уравнений и получения инварианта динамического треугольника будем считать, что знаки и величины коэффициентов a_i, b_i могут любыми. При этом структура уравнений (1), (2) сохраняется, а структурный синтез заключается в обмене координатами u_1, u_2, u_3 в уравнениях (1) и (2). Обмен координатами можно осуществлять по-разному. Так как динамический треугольник должен отражать соединение и распад, единство и борьбу элементов структуры, то для „склеивания“ элементов используем механизм компенсационного гомеостата [4].

В моделях изобретательских задач [3] компенсационный гомеостат образуется двумя противоположными свойствами x и y технического противоречия. В результате разрешения противоречия формируется новое решение задачи, определяемое координатой z. Гомеостат является двухуровневым: на первом уровне находятся две координаты x и y, на втором уровне — одна координата z. За единство координат x и y и передачу наследственной информации координате z отвечает произведение xy, так как в теории популяций это произведение пропорционально числу попарных встреч особей разного пола. Взаимодействие координат отражают слагаемые типа $b_1 x$ и $b_2 y$, входящие в правую часть дифференциальных уравнений, задающих эволюцию координат y и x соответственно, поскольку определяют вынужденное движение одной координаты от другой.

Используем этот же подход для динамического треугольника. Однако необходимо учитывать то, что в динамическом треугольнике все три координаты считаются равнозначными: единство координат $u_1 u_2$ производит координату u_3, единство координат $u_1 u_3$ производит координату u_2, а единство координат $u_2 u_3$ производит координату u_1.

Для получения единства в правой части уравнений (1), (2) с учетом условий (3)—(5) произведем замену координат. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_1 &= a_1 u_2 u_3 + b_1 u_1;\\ \dot{u}_2 &= a_2 u_1 u_3 + b_2 u_2,\\ \dot{u}_3 &= a_3 u_1 u_2 + b_3 u_3.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Для обеспечения взаимодействия между координатами треугольника введем вынужденное движение. Например, первое уравнение системы (6) можно записать в виде

$$\dot{u}_1 = a_1 u_2 u_3 + \frac{b_1}{3} u_1 + \frac{b_1}{3} u_1 + \frac{b_1}{3} u_1. \qquad (7)$$

Уравнение (7), с учетом произвольности коэффициентов и условий (3)—(5), может быть преобразовано к следующему виду:

$$\dot{u}_1 = a_1 u_2 u_3 + b_1 u_1 + c_1 u_2 + d_1 u_3,$$

где $b_1 = c_1 = d_1 = b_1/3$.

Аналогично можно записать уравнение для любой координаты треугольника или систему уравнений треугольника в целом:

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^{3} q_{i,j} u_i + a_i N_i,\ i = 1, 2, 3, \qquad (8)$$

где $q_{i,j}$ — элементы матрицы

$$Q = \left[q_{i,j}\right] = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

а $N_1 = u_2 u_3$, $N_2 = u_1 u_3$, $N_3 = u_1 u_2$.

Анализ треугольных динамических структур. Рассмотрим примеры анализа динамического треугольника с точки зрения проявляемых им стереотипов поведения при включении или исключении тех или иных связей. Такой подход характерен для гомеостатики [4].

Пример 1. Исследуем симметричный динамический треугольник, имеющий только собственные движения и нелинейные связи в виде произведения координат. В этом случае матрица Q (9) будет равна

$$Q = \left[q_{i,j}\right] = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

а все коэффициенты $a_i = a$. Структура треугольника для этой ситуации приведена на рис. 3, *а*.

Приравнивая нулю правые части уравнений (8) и решая полученную систему уравнений относительно неизвестных координат, находим матрицу стационарных решений

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-b}{a} & \frac{b}{a} & \frac{b}{a} & \frac{-b}{a} \\ 0 & \frac{b}{a} & \frac{b}{a} & \frac{-b}{a} & \frac{-b}{a} \\ 0 & \frac{b}{a} & \frac{-b}{a} & \frac{b}{a} & \frac{-b}{a} \end{bmatrix},$$

по столбцам которой определяются пять векторов координат стационарных точек. Для определения характера стационарных точек находим якобиан системы (8) $J=\begin{bmatrix} b & au_3 & au_2 \\ au_3 & b & au_1 \\ au_2 & au_1 & b \end{bmatrix}$, а также его собственные числа. Для первого, нулевого, вектора координат стационарных точек имеем один корень третьей кратности, равный $p_1 = b$. Выбирая b<0, получаем в начале координат устойчивый стереотип поведения.

Для остальных стационарных точек собственные числа $p_i^T = [-b\ 2b\ 2b]$, i=2…5, матрицы S имеют разные знаки. Следовательно, остальные стационарные точки неустойчивы. Обратим внимание, что стереотипы устойчивого и неустойчивого поведения не зависят от знака параметра a, т.е. этот параметр может быть как положительным, так и отрицательным. Тогда матрица S стационарных решений будет иметь 8 неустойчивых стационарных точек, которые в трехмерном пространстве координат u_1, u_2, u_3 образуют вершины куба, центр которого расположен в устойчивой точке в начале координат. Структура стационарных точек для случая b= –1 и a=±1 приведена на рис. 3, *б*. По своей сути этот куб подобен бифуркационной диаграмме, используемой в теории катастроф для исследования эволюции стационарных точек в зависимости от управляющих параметров.

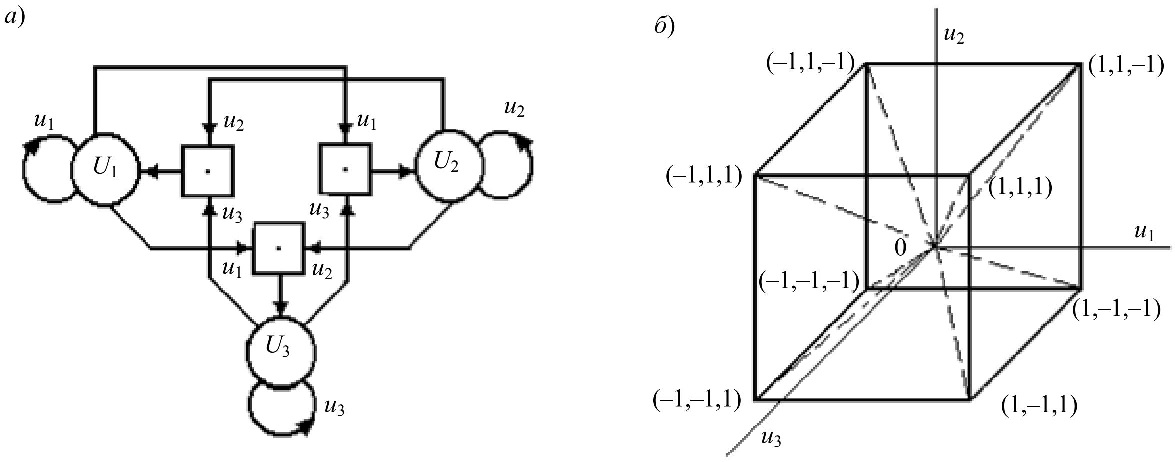

Рис. 3

Нетрудно найти расстояние D от каждой неустойчивой точки равновесия до начала координат: $D = |b/a| \cdot \sqrt{3}$. При уменьшении абсолютного значения параметра b снижается запас устойчивости стационарной точки в начале координат, а неустойчивые точки равновесия в вершинах куба начинают передвигаться к началу координат по соответствующим штриховым линиям (см. рис. 3, *б*). При b=D=0 происходит потеря устойчивости структуры, и треугольник распадается, демонстрируя стереотип поведения, называемый в гомеостатике коллапсом.

В техническом творчестве коллапс моделирует процесс распада вепольной структуры прототипа, находящегося в потенциальной яме ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$) психологической инерции мышления.

Пример 2. Рассмотрим несимметричную треугольную структуру. Если в уравнении (8) выбрать матрицу

$$Q=\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -g \end{bmatrix},$$

где σ=10, r≥27,74, g=8/3, и коэффициенты $a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 1,$ то получим систему уравнений хаотического аттрактора Лоренца [5].

Если матрицу Q выбрать в виде

$$Q = \begin{bmatrix} -\mu & \mu K^2 & K^{-1} \\ \mu K^2 & -\mu & K \\ -K^{-1} & -K & 0 \end{bmatrix},$$

где $\mu=1$, $K=2$, то получим систему уравнений динамо Рикитаке [5], также демонстрирующую хаотические колебания.

Хаотические аттракторы служат для моделирования процесса поиска нового решения в мышлении изобретателя и передачи наследственной информации от прототипа к новому изобретению [6].

Заключение.

1. Элемент, который вводится в треугольную структуру, теряет свое исходное свойство, а структура, благодаря включению или исключению тех или иных связей между элементами, приобретает различные стереотипы поведения.

2. Основной моделирующей единицей развития в техническом творчестве является динамический треугольник, для эволюции вершин которого используется логистическое уравнение Ферхюльста — Перла. Модель треугольника получается в результате структурного синтеза дифференциальных уравнений.

3. Симметричный динамический треугольник представляет собой трехмерный гомеостат с равнозначными элементами, имитирующий коллапс прототипа при переходе к новому решению.

4. Симметричный динамический треугольник может служить основой для построения треугольных динамических решеток (фрактальных множеств). Например, в работе [7] анализируется фрактальное множество „салфетка Серпинского“ на предмет прохождения волн через треугольную решетку. Поэтому для эволюционного уравнения элементов решетки используется волновое уравнение Шредингера второго порядка.

5. Несимметричные динамические треугольники типа хаотических аттракторов Лоренца и динамо Рикитаке моделируют поисковые движения в мышлении изобретателя.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 08-09-00857-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю. И.* Математические модели естествознания и техники: Цикл лекций. Н. Новгород: Изд-во Нижегородск. гос. ун-та, 1994. Вып. 1.

2. *Альтшуллер* Г. С. Найти идею. Новосибирск: Наука, 1991.

3. *Бушуев А. Б.* Х-элемент: поиск, захват, слежение //Тр. Междунар. конф. ТРИЗФЕСТ 2006 „Три поколения ТРИЗ“. СПб: РОО „ТРИЗ-Петербург“, 2006. С. 310—317.

4. *Горский Ю. М.* Основы гомеостатики. Гармония и дисгармония в живых, природных, социальных и искусственных системах. Иркутск: Изд-во Иркутск. гос. экономической акад.,1998.

5. Странные аттракторы: Сборник статей / Под ред. *Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова*. М.: Мир, 1981.

6. *Бушуев А. Б., Чепинский С. А.* Хаотические гомеостаты // Изв. вузов. Приборостроение. 2007. Т. 50, № 11. С. 59—63.

7. *Абрамова И. В., Мельничук О. П., Попов И. Ю., Сандлер М. М.* Резонансные эффекты в задаче рассеяния на сложном графе // Науч.-техн. вестн. СПбГУ ИТМО. 2003. Вып. 11. С. 129—136.

Сведения об авторах

Александр Борисович Бушуев	—	канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: Bushuev@inbox.ru
Сергей Владимирович Быстров	—	канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: sbystrov@mail.ru
Валерий Владимирович Григорьев	—	д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: grigvv@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
18.01.11 г.