ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ И НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.197

Т. О. Мысливцев

ОЦЕНКА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ АЛГОРИТМА ВТОРИЧНОЙ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ К ВОЗМУЩЕНИЯМ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ НАБЛЮДЕНИЯ

Предлагается методика оценки чувствительности алгоритма вторичной обработки навигационных измерений в радиолокационной системе к возмущениям параметров модели наблюдения и погрешностям в исходных данных. Использование приведенной методики позволяет сделать вывод об объеме и качестве требуемых исходных данных, необходимых при решении задачи вторичной обработки.

Ключевые слова: *вторичная обработка, модель наблюдения, навигационные параметры, матрица наблюдений.*

Одним из примеров навигационной задачи, часто возникающей на практике, является задача определения параметров движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) по данным навигационных измерений. Эта радионавигационная задача решается, как правило, с использованием сложных многопараметрических радиолокационных станций (РЛС). Окончательная оценка параметров движения формируется после вторичной обработки (ВО) измерений текущих параметров движения объекта, по результатам которой определяются параметры его траектории. В качестве таких параметров обычно используются либо значения координат и составляющих вектора скорости ИСЗ в выбранной системе отсчета в некоторый начальный момент времени, либо оскулирующие параметры орбиты [1, 2]. При этом на точность решения оказывают влияние следующие факторы:

— точность описания модели движения ИСЗ;

— корректность модели описания связи пространства измерений и пространства состояний системы;

— состав и объем измерительной выборки;

— погрешность измерения навигационных параметров;

— выбранная система координат, точность задания констант, геодезическая привязка фазового центра антенны и ряд других параметров.

Влияние указанных факторов на окончательное решение, как правило, неравномерно. Так, неполный состав измерительной выборки может привести к тому, что матрица, описывающая связь пространства измерений и пространства состояний объекта, будет плохо обусловленной, что, в свою очередь, вызовет существенные погрешности при решении задачи. При этом увеличение объема измерений, не связанное с улучшением наблюдаемости навигационных параметров, практически не повлияет на окончательное решение. К такому же результату могут привести погрешности в задании этой матрицы, вызванные недостаточной информативностью модели. Кроме того, при больших погрешностях измерений существенное увеличение точности описания модели движения ИСЗ практически не повлияет на итоговое решение, но приведет к увеличению вычислительных затрат. Таким образом, для оценки эффективности алгоритма вторичной обработки навигационных измерений необходимо проанализировать чувствительность решения к ошибкам задания исходных данных и на основе полученных точностных оценок сделать вывод об объеме и качестве требуемой исходной информации применительно к конкретной РЛС.

При решении навигационной задачи измеряемыми параметрами сигнала $S(t, \nu)$ являются: время запаздывания сигнала (τ), доплеровский сдвиг частоты ($F_{\text{д}}$), разность времен запаздывания ($\Delta\tau$) и разность доплеровских сдвигов частоты ($\Delta F_{\text{д}}$). В общем виде их можно представить вектором $\mathbf{v} = [\tau, F_{\text{д}}, \Delta\tau, \Delta F_{\text{д}}]^T$. Параметры сигнала однозначно связаны с навигационными параметрами объекта: $\mathbf{r} = [R, \dot{R}, \alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}]^T$, где R — дальность до объекта, $\dot{R}$ — его радиальная скорость, α — угол азимута, β — угол места, $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ — их производные.

Не останавливаясь подробно на задаче вторичной обработки, приведем основные соотношения, применяемые для ее решения.

При погрешностях измерений, распределенных по нормальному закону, максимально правдоподобная оценка параметров траектории $\mathbf{q}$, в общем случае, определяется как результат решения итерационной задачи с использованием, например, метода Гаусса — Ньютона:

$$\hat{\mathbf{q}}_N = \hat{\mathbf{q}}_{N-1} + (A^T K^{-1} A)^{-1} A^T K^{-1} \Delta\mathbf{r}, \tag{1}$$

где $\hat{\mathbf{q}}_N$ — оценка параметров траектории при N-й итерации; $A = \dfrac{\partial \mathbf{r}(\hat{\mathbf{q}}_{N-1})}{\partial \mathbf{q}^T}$ — $n \times m$-матрица частных производных от измеряемых навигационных параметров $\mathbf{r}$ по параметрам траектории $\mathbf{q}$ в точке $\hat{\mathbf{q}}_{N-1}$; K — корреляционная $n \times n$-матрица погрешностей измерения навигационных параметров; $\Delta\mathbf{r}$ — разность измеренных и расчетных значений навигационных параметров.

Основной особенностью данной задачи является ее итерационный характер, так как выбранный алгоритм оптимизации проводит линеаризацию целевой функции вблизи истинного решения (метод Гаусса — Ньютона) либо аппроксимирует ее квадратичной зависимостью (метод Ньютона — Рафсона). Таким образом, для отдельных итераций задача ВО в общем случае сводится к решению операторного уравнения первого рода в дискретной форме [3]:

$$Ax = b, \tag{2}$$

где в качестве вектора x выступает вектор поправок к начальным условиям движения объекта, а в качестве вектора b — вектор $\Delta\mathbf{r}$.

Если измерения не коррелированы и равноточны, то решение представляет собой оценку минимума второй нормы невязки:

$$\|b - Ax\|_2 = \min_{g \in \mathbb{R}(A)} \|b - Ag\|_2. \tag{3}$$

Задача состоит в определении неизвестного вектора x по известному вектору b и матрице A. В силу ограниченности знаний о законах движения ИСЗ и факторах, влияющих на параметры его движения, практически всегда приходится решать задачу определения траектории при неточно заданной матрице A. Кроме того, погрешности определения матрицы A могут быть обусловлены приближенным описанием связи пространства измерений и пространства состояний объекта. Речь, прежде всего, идет о некомпенсируемых тропосферной и ионосферной погрешностях измерений текущих навигационных параметров. Таким образом, особенность данной задачи заключается в том, что вектор b исходных данных и матрица A известны с некоторой погрешностью; в этом случае линейная система (2) примет следующий вид:

$$A_\delta x = b_\delta, \tag{4}$$

где $A_\delta = A + \delta A$ — возмущенная матрица системы (в общем случае размерности $n \times m$), A — точная матрица системы, δA — матрица возмущения; $b_\delta = b + \delta b$ — вектор измерения навигационных параметров, δb — вектор погрешностей задания исходных данных, который не может быть рассмотрен отдельно от вектора b, поэтому $b_\delta = Ax + \delta b$.

Как правило, при накоплении большого числа статистических данных матрица A становится переопределенной, и классическое решение уравнения (4) формируется с помощью обобщенной обратной матрицы [3].

Положим, что матрица A_δ не вырождена, а вектор b отличен от нуля, при этом $n \ge m$. Тогда в соответствии с выражением (4) можно записать уравнение

$$A_\delta^T A_\delta x = A_\delta^T b_\delta, \tag{5}$$

решение которого, в отличие от решения уравнения (4), как правило, существует, т.е. существует такой вектор $\hat{x} = x + \delta x$, что

$$A_\delta^T A_\delta \hat{x} = A_\delta^T b_\delta \tag{6}$$

или, раскрывая соответствующие параметры, $(A + \delta A)^T (A + \delta A)(x + \delta x) = (A + \delta A)^T (b + \delta b)$.

Поскольку $A_\delta^T A_\delta$ — квадратная $m \times m$-матрица, то решение уравнения (6) примет следующий вид:

$$\hat{x} = (A_\delta^T A_\delta)^{-1} A_\delta^T b_\delta. \tag{7}$$

Матрица $(A_\delta^T A_\delta)^{-1} A_\delta^T$ называется обобщенной обратной матрицей для матрицы A_δ.

Можно показать [4, 5], что относительная норма погрешности решения уравнения $A_\delta \hat{x} = b_\delta$ при ошибках в исходных данных будет удовлетворять неравенству

$$\frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{2\operatorname{cond}_2(A)}{\cos\theta}\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + 2(\operatorname{cond}_2(A)^2 \operatorname{tg}\theta + \operatorname{cond}_2(A))\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + O(\varepsilon^2), \tag{8}$$

где $\operatorname{cond}_2(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \|$ — число обусловленности матрицы A, рассчитанное по второй норме (всюду в выражении используется вторая норма), которое характеризует близость матрицы A к вырожденной матрице; θ — угол между векторами b и Ax, рассчитываемый из соотношения $\| Ax \| = \| b \| \cos\theta$ и определяющий меру того, насколько хорошо решение задачи согласуется с исходными данными [4]; $O(\varepsilon^2)$ — малая величина порядка ε^2 при $\varepsilon = \max\left\{\|\delta A\| / \|A\|, \|\delta b\| / \|b\|\right\}$.

Соотношение (8) определяет верхнюю границу погрешностей вычисления поправок к начальным условиям движения объекта, оценив которую, можно сделать вывод об эффективности решения задачи вторичной обработки.

Для существующих РЛС, которые определяют параметры движения ИСЗ, решается задача калибровки и юстировки измерительных каналов. При решении этой задачи устраняются систематические составляющие погрешности измерений. Поэтому вектор b и его погрешности δb, как правило, остаются постоянными (изменяются в незначительных пределах), и при анализе чувствительности алгоритма ВО их значения можно зафиксировать на уровне технических характеристик измерительных каналов РЛС.

Рассмотрим матрицу наблюдения $A_\delta = A + \delta A$, которая характеризует связь пространства измерений и пространства состояний системы. Если эта связь некорректно описывает физическое процессы, определяющие движение объекта и функции погрешностей измерений навигационных параметров, то ошибки решения могут быть существенными. Это следует из анализа выражения (8), где погрешности определения матрицы наблюдения связаны с квадратом числа обусловленности $\mathrm{cond}(A)$.

Погрешности определения матрицы A можно разделить на две группы. К первой группе относятся погрешности, обусловленные неточностью описания модели движения ИСЗ. Величину этих погрешностей будем задавать исходя из количества используемых гармоник геопотенциала при интегрировании уравнений движения ИСЗ. Ко второй группе следует отнести некомпенсируемые погрешности определения навигационных параметров, вызванные влиянием среды распространения сигнала, прежде всего тропосферы и ионосферы.

Рассмотрим задачу ВО при следующих параметрах орбиты ИСЗ: наклонение 98,01°; прямое восхождение 45,46°; эксцентриситет 0,0042; аргумент перигея 288,58°; средняя аномалия 71,07°, среднее количество движения (оборотов в сутки) 14,54907930242273. РЛС расположена в пункте с координатами (59,9 с.ш. 30,3 в.д.). Измерительная выборка содержит четыре текущих навигационных параметра: $\mathbf{r} = [R, \dot{R}, \alpha, \beta]^T$, и состоит из 150 измерений каждого из них с шагом измерения 1 с. Погрешности измерений представлены двумя вариантами задания СКО: 1 — $\sigma_R = 10$ м, $\sigma_{\dot{R}} = 0{,}15$ м/с, $\sigma_{\alpha,\beta} = 1'$; 2 — $\sigma_R = 100$ м, $\sigma_{\dot{R}} = 1$ м/с, $\sigma_{\alpha,\beta} = 3'$.

Относительная погрешность при задании измерительной выборки определяется как $\varepsilon_b = \|\delta b\| / \|b\| = 5{,}67\text{e-}006$ для первого варианта и $\varepsilon_b = 7{,}94\text{e-}005$ — для второго.

В рассматриваемых условиях относительная погрешность задания матрицы A, вызванная неточностью описания модели движения ИСЗ, определяется как

$$\varepsilon_{A(36)} = \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = \frac{\|A_{36,\Delta} - A_{36}\|}{\|A_{36,\Delta}\|} = 7{,}79\text{e-}009,$$

где цифровой индекс (36) при матрице показывает количество гармоник геопотенциала, используемых при интегрировании уравнения движения спутника, а Δ характеризует учет параметров сопротивления атмосферы и лунно-солнечные возмущения. Для модели, в которой учитываются 16 гармоник геопотенциала, относительная погрешность $\varepsilon_{A(16)} = 2{,}24\text{e-}008$, при учете трех гармоник — $\varepsilon_{A(3)} = 2{,}75\text{e-}007$.

Для простоты оценку верхней границы погрешностей будем производить для первой поправки выражения (1), так как при последующих итерациях оценки будут совпадать с учетом масштаба поправки. Исходя из постановки задачи, для достаточно хорошего соответствия исходных данных их модельному описанию, угол θ примем равным 6,97°.

На рис. 1 представлен график зависимости числа обусловленности матрицы A от количества обрабатываемых измерений (Q). При построении графика изменялось количество измерений азимута, угла места и радиальной скорости при фиксированном (Q = 150) количестве измерений дальности до ИСЗ.

На рис. 2, *а*, *б* представлены графики рассчитываемой по соотношению (8) зависимости верхней границы погрешностей вычисления поправок к вектору начальных условий движения объекта ($\|\delta x\|/\|x\|$) от количества измерений при различных параметрах описания модели движения ИСЗ и точности задания исходных данных.

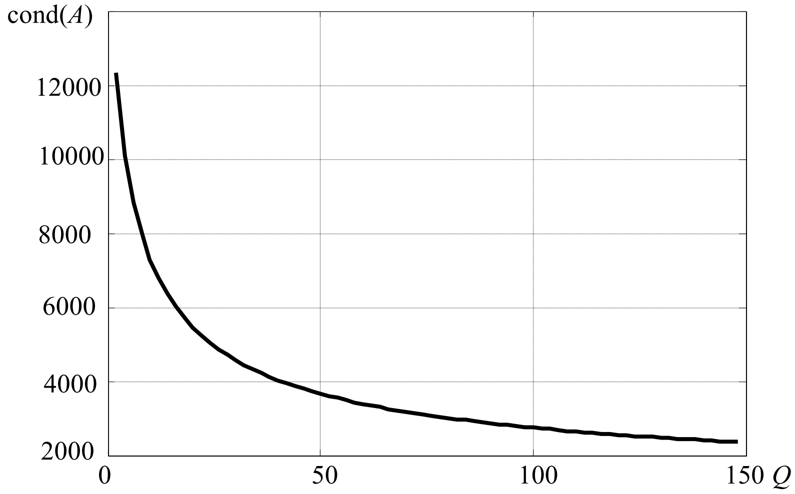
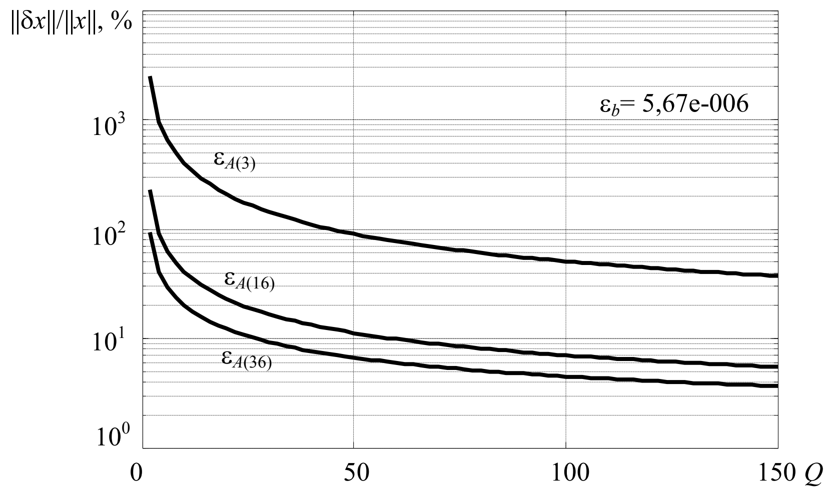


Рис. 1

а)



б)

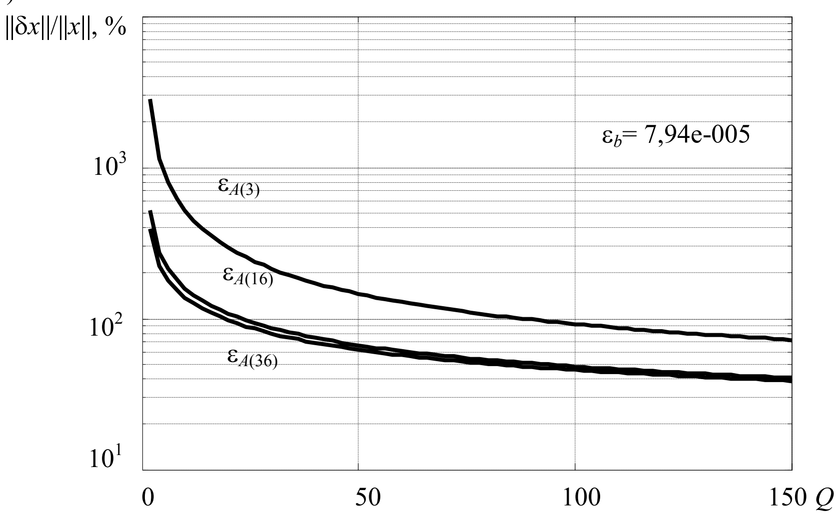


Рис. 2

Анализ результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы:

1. Точность получаемых оценок существенно зависит от параметров модели наблюдения и состава измерительной выборки.

2. При достаточно высокой точности измерений точное описание модели движения ИСЗ имеет определяющее значение. Так, для получения оценок с точностью не хуже 10 % модель, в которой используются три гармоники геопотенциала, неприемлема. При полной измерительной выборке (150 измерений всех параметров) верхняя граница погрешностей вычисления поправок к вектору начальных условий достигает 37 % (см. рис. 2, *а*). В то же время при низкой точности измерений повышение точности описания матрицы системы не приводит к увеличению точности решения. При полной измерительной выборке верхняя граница погрешностей достигает 38 % при использовании 36 гармоник и 40 % — при использовании 16 гармоник (см. рис. 2, *б*).

3. В рассмотренном примере для получения оценок параметров орбиты ИСЗ с точностью не хуже 10 % необходимо проведение 60 измерений (ε_b=5,67e-006) при использовании 16 гармоник геопотенциала в описании модели движения ИСЗ. Если погрешность задания исходных данных велика ($\varepsilon_b = 7{,}94\text{e-}005$, см. рис. 2, *б*), то единственный способ повышения точности решения — компенсация погрешности на основе анализа геофизической обстановки в зоне функционирования РЛС либо переход к методам смещенного оценивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы радионавигационных измерений: Учебник для вузов / *В. А. Губин, А. А. Костылев, Б. Г. Мельников* и др.; Под ред. *Н. Ф. Клюева*. МО СССР, 1987. 430 с.
2. Космические траекторные измерения / *П. А. Агаджанов, Н. М. Барабанов, Н. И.Буренин* и др.; Под ред. *П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича, А. А. Коростелева*. М.: Сов. радио, 1969. 352 с.
3. *Костылев А. А., Степанов М. Г.* Смещенные оценки и метод регуляризации в радиотехнических задачах. МО СССР, 1984. 84 с.
4. *Уоткинс Д. С.* Основы матричных вычислений: Пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 664 с.
5. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.

Сведения об авторе

Тимофей Олегович Мысливцев — канд. техн. наук; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра антенно-фидерных, передающих устройств и средств СЕВ, Санкт-Петербург; E-mail: tim33@list.ru

Рекомендована кафедрой антенно-фидерных, передающих устройств и средств СЕВ

Поступила в редакцию 11.07.11 г.